

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОСТРОЕНИЯ

В. Л. РВАЧЕВ

ТЕОРИЯ  
R-ФУНКЦИЙ  
И НЕКОТОРЫЕ  
ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1982

Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения / В. Ф. Рвачев. — Киев : Наук. думка, 1982. — 552 с.

В монографии изложены методы алгебры логики, теория  $R$ -функций, а также их приложения в аналитической геометрии, математическом программировании и математической физике. Основное внимание уделено прямым методам решения краевых задач (расчет температурных, деформационных, силовых, гидродинамических, электромагнитных и других полей). При этом теория  $R$ -функций позволила решить проблему построения полных систем координатных функций для областей сложной формы и различных типов граничных условий, что в свою очередь дало возможность существенно расширить применение на практике различных типов вариационных методов и создать принципиально новые программируемые системы — генераторы программ серии «Поле». Рассмотрены вопросы математического программирования (в частности, оптимальный раскрой), сплайны и атомарные функции.

Для специалистов, интересующихся современными методами прикладной математики. Может быть использована при подготовке специальных курсов лекций по теории  $R$ -функций.

Ил. 189. Табл. 26. Библиогр.: с. 535—543 (206 назв.).

Ответственный редактор

*В. И. Моссаковский*

Рецензенты

*В. С. Проценко, Ю. Г. Стоян*

Редакция физико-математической литературы

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Повышенный интерес к теории  $R$ -функций (или, если говорить с более общих позиций, теории  $R$ -отображений) объясняется как простотой и привлекательностью ее начальных идей, так и широким диапазоном областей, в которых она находит приложение. В этом отношении теория  $R$ -функций напоминает теорию групп: обе эти теории базируются на чисто алгебраических концепциях, а их приложения весьма многообразны. Для  $R$ -функций областями применения оказались: аналитическая геометрия, математическое программирование, оптимальное размещение геометрических объектов, распознавание образов, теория устойчивости, химическая технология и в особенности математическая физика с ее многочисленными задачами исследования, расчета и оптимизации физико-механических полей (температурных, деформационных, силовых, электромагнитных, магнитогидродинамических и др.).

Цель монографии — изложить основные результаты, полученные почти за двадцатилетний период в теории  $R$ -функций и ряде ее приложений. Особенно интенсивно стала развиваться и применяться теория  $R$ -функций в последние несколько лет. В связи с этим возникла необходимость осмысливания и обобщения полученных результатов, однако вышедшие в свет монографии в основном были посвящены отдельным прикладным направлениям и не отражали в должной мере прогресс в развитии многих вопросов теории.

Монография состоит из введения и четырех глав. Гл. 1 вводит читателя в круг представлений алгебры логики и исчисления предикатов (называемых также дискретной или конечной математикой). Эти вопросы освещаются лишь в объеме, необходимом для дальнейшего изложения. Более полно данные вопросы рассмотрены в работе С. В. Яблонского [194]. В гл. 2 вводятся понятия  $R$ -отображения ( $R$ -функции), чертежа, уравнения чертежа, алгебраически полной системы и так далее (термин «чертеж» используется вместо часто употребляемых терминов «линия», «фигура», «поверхность», «тело», «гиперповерхность», «геометрический объект» и т. п.). В этой же главе решается принципиально важный вопрос о построении уравнений чертежей (решение обратной задачи аналитической геометрии), рассматриваются приложения полученных результатов в математическом программировании и оптимальном размещении геометрических объектов. Новый в идейном плане материал в основном содержится в гл. 3 и 4.

Материал гл. 3, в которой используются результаты предыдущих глав, посвящен развитию конструктивных средств математики и решению казавшейся ранее неразрешимой проблемы построения полных координатных последовательностей, удовлетворяющих различного типа краевым условиям для областей

практически произвольной формы. Эти результаты легли в основу новой технологии программирования и ее реализации в виде программирующих систем (генераторов программ) серии «Поле», позволивших в десятки раз сократить затраты на составление и отладку программ. О генераторах программ и решении краевых задач в условиях их эксплуатации речь идет в гл. 4. Материал этой главы подобран с таким расчетом, чтобы не только показать возможности применения  $R$ -функций к решению задач расчета полей различного типа, но и отметить некоторые специфические особенности реализации теории  $R$ -функций на практике.

Многие параграфы сопровождаются упражнениями и задачами. Некоторые из них носят проблемный характер, и автор не знает их решений. Ряд нерешенных вопросов отмечен в основном тексте. Большое число примеров, приведенных в работе, облегчает освоение материала, делает его доступным для студентов старших курсов инженерных и математических специальностей. (Примеры и некоторые параграфы, которые при первом чтении можно опустить, набраны петитом). В списке литературы указаны лишь те источники, содержание которых в какой-то мере связано с излагаемыми результатами. Обширная библиография содержится в монографиях и статьях автора и его учеников И. В. Гончарюка, В. С. Проценко, Ю. Г. Стояна, В. А. Рвачева, А. П. Слесаренко, Г. П. Манько, Т. И. Шейко, Н. С. Синькопа, Ф. Ф. Ковалея и др. [25—27, 49, 50, 67—75, 100, 101, 109—148, 154—156, 160—164, 167—172, 184—188]. Ссылки (на теоремы, примеры, упражнения и т. д.) внутри параграфов (глав) даются без указаний номеров параграфов (глав).

## ВВЕДЕНИЕ

Существует обширный круг научно-технических проблем, при решении которых необходимо учитывать и преобразовывать геометрическую информацию. В простейших случаях (например, при задании информации о машиностроительном чертеже для хранения ее в памяти ЭВМ) вполне можно ограничиться тем или иным способом кодирования элементов чертежа или в крайнем случае поточечным их сканированием. Такие задачи в большинстве случаев носят чисто технический характер и их решение не сопряжено с преодолением принципиальных затруднений. Вместе с тем во многих случаях простого кодирования геометрической информации недостаточно, а необходимо описание ее в той форме, какая принята в аналитической геометрии, т. е. с помощью уравнений или неравенств. Речь идет о том, чтобы так же, как, например, для прямой на плоскости или шара в пространстве, можно было бы и для таких «сложных» геометрических объектов, как усеченный конус с цилиндрическим отверстием, ломаная линия, зубчатое колесо и других применять уравнения  $\omega(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  (или неравенства  $\omega(x) \geq 0$ ). Здесь  $\omega(x)$  — функция, которая имеет вид единого аналитического выражения и обладает, возможно, еще и некоторыми дополнительными свойствами.

Естественно, что при такой общей постановке возникает ряд вопросов, требующих строгой формализации (и такая формализация выполнена в данной работе). К их числу относятся следующие: что такое сложный геометрический объект и единое аналитическое выражение, при каких условиях поставленная задача разрешима, имеются ли эффективные алгоритмы решения этой задачи и т. д.?

В историческом плане сформулированная выше проблема восходит еще к Декарту и известна в литературе как обратная задача аналитической геометрии: задан геометрический объект, требуется написать его уравнение. (Прямая задача: дано уравнение  $\omega(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , найти соответствующий ему в  $\mathbb{R}^n$  геометрический объект  $L$ , т. е. совокупность всех точек  $\mathbb{R}^n$ , которые удовлетворяют уравнению  $\omega(x) = 0$ .) Во времена Декарта запас изученных линий и поверхностей (чертежей) мало чем отличался от того, каким располагали математики древности. Метод координат

позволил беспредельно увеличивать число изученных чертежей, так как каждое новое уравнение давало и новый чертеж. Это привело к тому, что в дальнейшем основное внимание было уделено изучению чертежей, описываемых заданными уравнениями. Обратная же задача рассматривалась лишь для простейших геометрических объектов: прямой, конических сечений, эллипсоидов, параболоидов и др.

В аналитической геометрии обычно ограничиваются системой  $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, a = \text{const } \forall a \in \mathbb{R}\}$  операций, применяемых для написания уравнений, которая приводит к множеству  $\mathfrak{M}(H_0)$  целых рациональных функций (полиномов). Ему соответствует множество  $\mathfrak{N}(H_0)$  чертежей, описываемых уравнениями  $\omega(x) = 0$ ,  $\omega(x) \in \mathfrak{M}(H_0)$  и называемых алгебраическими. Однако множество алгебраических чертежей все же весьма «бедно». Оно не содержит, например, таких чертежей, как прямоугольник, двуглав, поверхность искусственного спутника Земли и т. п. Правда, существует принципиальная возможность аппроксимации сложных чертежей алгебраическими (это следует из известной теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций полиномами [7]), но сама по себе реализация ее весьма сложная проблема. То же можно сказать и относительно известной теоремы о возможности сколь угодно хорошей аппроксимации замкнутых кривых на плоскости лемнискатами (т. е. также алгебраическими кривыми) [150].

Существенным расширением множества  $\mathfrak{N}(H_0)$  алгебраических чертежей является множество  $\mathfrak{N}_{\frac{1}{2}}(H_0)$  полуалгебраических чертежей [5]. Оно включает в себя всякие чертежи, которые также могут

быть описаны с помощью упомянутой системы операций  $H_0$ , но уже не одним уравнением, а системами систем уравнений и неравенств вида  $f_{ik} = 0$ ,  $\varphi_{ik} \geq 0$ , где  $f_{ik}, \varphi_{ik} \in \mathfrak{M}(H_0)$ ,  $i, j, k$  — принадлежат конечным множествам индексов (точка принадлежит чертежу, если хотя бы одна из систем удовлетворяется). Из определения множества  $\mathfrak{N}_{\frac{1}{2}}(H_0)$  следует, что  $\mathfrak{N}(H_0) \subset \mathfrak{N}_{\frac{1}{2}}(H_0)$ .

Не трудно установить также (см. § 9 гл. 2), что существуют полуалгебраические, но не алгебраические чертежи, т. е.  $\mathfrak{N}(H_0) \neq \mathfrak{N}_{\frac{1}{2}}(H_0)$ .

Пусть  $H$  есть некоторое расширение системы операций  $H_0$ . Тогда, подобно тому как системе  $H_0$  были поставлены в соответствие множества чертежей  $\mathfrak{N}(H_0)$  и  $\mathfrak{N}_{\frac{1}{2}}(H_0)$ , системе  $H$  будут соответствовать множества  $\mathfrak{N}(H)$  и  $\mathfrak{N}_{\frac{1}{2}}(H)$  чертежей, которые назовем

$H$ -реализуемыми и полу- $H$ -реализуемыми соответственно. Правомерен вопрос: нельзя ли так выбрать систему  $H$ , чтобы получить равенство  $\mathfrak{N}(H) = \mathfrak{N}_{\frac{1}{2}}(H)$ ? Располагая такой системой, можно было бы задавать сложные геометрические объекты не упомянуты-

ми выше системами систем уравнений и неравенств, а одним уравнением, написанным в символах системы  $H$ . В гл. 2 будет показано, что такие системы, названные алгоритмически полными, существуют и могут быть построены с помощью  $R$ -функций. Впервые понятие  $R$ -функции как раз и было введено в связи с возникшей необходимостью составлять уравнения сложных чертежей (в процессе поиска приближенных решений некоторых пространственных контактных задач теории упругости).

Со временем понятие  $R$ -функции было обобщено и возникло общее понятие  $R$ -отображения (см. § 2 гл. 2). В основе этого понятия лежит выделение из систем алгебраических операций (т. е. отображений вида  $f: X^n \rightarrow X$ , где  $X$  — некоторое множество) таких, которые в некотором смысле соответствуют функциям  $k$ -значной логики (т. е. алгебраическим операциям вида  $F = B_k^n \rightarrow B_k$ , у которых множество  $B_k$  состоит из  $k$  элементов). В общем виде теория  $R$ -отображений еще мало разработана. В основном изучались  $R$ -функции, которые строятся на множестве  $X = R = (-\infty, \infty)$ , и соответствуют функциям двузначной (булевым функциям) и трехзначной логики. Именно эти функции позволили решить обратную задачу аналитической геометрии, а в последствии найти и другие приложения на более высоких уровнях прикладной математики. При этом оказалось, что существуют элементарные алгоритмически полные системы и в целом само множество основных элементарных функций (в сочетании с арифметическими операциями) алгоритмически полное. Это означает, в частности, что всякий чертеж, составленный из «кусков» элементарных линий или поверхностей, сам элементарен, т. е. может быть описан уравнением  $\omega(x) = 0$ , где  $\omega(x)$  — элементарная (имеет вид единого аналитического выражения) функция.

В первых работах по теории  $R$ -функций был определен и достаточно широкий круг возможных ее приложений: оптимальное размещение геометрических объектов (в частности, оптимальный раскрой [109, 142, 143]), распознавание образов [157, 158], математическое программирование [109], конструктивная теория функций [61, 111] и в особенности краевые задачи математической физики [111, 128, 134].

Одно из неожиданных направлений, в котором  $R$ -функции нашли применение, — это теория устойчивости движения. Первоначально метод  $R$ -функций применен в этом направлении при исследовании области устойчивости неустановившегося движения [77]. За истекшее время с использованием  $R$ -функций получены новые результаты при численной реализации классических критериев устойчивости [78, 79, 82], построении функций Ляпунова, синтезе систем, асимптотически устойчивых по первому приближению [79], выборе параметров функций связей крупномасштабных систем с лишь устойчивыми подсистемами [80], в задаче об устойчивости аналитических движений [76] и других [77]. Этим, судя по всему, не исчерпываются возможности применения  $R$ -функций. В част-

ности, представляют значительный интерес разработка теории  $R$ -отображений в пространстве параметров динамических систем [81], построение и исследование свойств  $R$ -отображений, управляемых специальными системами сравнения [76—82], а также применение  $R$ -функций в задачах распознавания образов [157, 158], химической технологии [46], медицинской диагностики [19] и других направлениях [7, 36].

Математическому программированию и размещению геометрических объектов посвящены § 26, 27 гл. 2. В основном они написаны на уровне монографии [109], изданной в 1967 г., более глубоко эти вопросы освещены в работах Ю. Г. Стояна и его учеников [167—172]. Кратко изложены также вопросы, относящиеся к теории сплайнов и атомарных функций (§ 15, 16 гл. 3). Более детально эти вопросы рассмотрены в монографии [127]. Основные результаты в развитии теории атомарных функций принадлежат В. А. Рвачеву [123—127], первые приложения — Т. И. Шейко [184].

В последние годы в индустриально развитых странах возросли темпы создания новых математических теорий и разработки на их основе методов решения на ЭВМ задач исследования, расчета и оптимизации физико-механических полей. Все возрастающий интерес к проблеме физико-механических полей объясняется тем, что ею охвачен широкий круг направлений, таких как электродинамика, теплофизика, теория фильтрации, теория упругости и пластичности, магнитная гидродинамика и другие, развитие которых имеет первостепенное значение для научно-технического прогресса. Математическими моделями физико-механических полей являются задачи для уравнений с частными производными при определенных краевых и начальных условиях. Специфическая особенность полей — их зависимость не только от характера физических законов, учитываемых соответствующими уравнениями, но и от формы, взаимного расположения тел, в которых поля возбуждаются, конфигурации площадок их контактного взаимодействия и других геометрических и физических факторов.

Наличие в постановке краевых задач двух разнородных видов информации — аналитической и геометрической — серьезное препятствие при создании методов и алгоритмов решения этих задач. Дело в том, что всякий метод неизбежно должен учитывать оба упомянутые вида информации, а это требует преобразования геометрической информации в аналитическую (при этом не всякое кодирование геометрической информации годится). В таких классических методах, как, например, разделения переменных и интегральных преобразований, форма областей и участков их границ учитывается благодаря подходящему выбору систем координат, в методе конформных отображений — при построении отображающих функций, в вариационных методах — при построении координатных функций, в сеточных методах — при составлении уравнений для узлов, близких к границе, и т. д. Метод конечных элементов (МКЭ) [31, 66] возник именно в связи со стремлением как



можно точнее учитывать геометрические формы. Появился также ряд методов (Рейснера, штрафов и др.), в которых краевые условия естественны и формально им можно не удовлетворять [58, 88]. В этих методах геометрическая информация учитывается путем интегрирования по областям соответствующей формы (т. е. геометрическая информация учитывается интегрально).

Особенно актуальна разработка таких методов решения краевых задач, которые имели бы универсальный характер и не требовали от исследователя (как правило, не математика) знания тонких вопросов теории. Кроме того, универсальность обуславливает возможность привлечения методов системного программирования, что имеет существенное значение для автоматизации научных исследований в области краевых задач. Конечно, для того или иного конкретного класса задач существуют или могут быть созданы специальные методы, превосходящие по эффективности любой универсальный метод, но их использование требует, как правило, хорошей математической и специальной подготовки и значительных затрат времени, что может оказаться неприемлемым для быстрого решения все новых и новых задач, различных по специфике. Из упомянутых выше методов универсальны разностные, вариационные и конечных элементов. Можно назвать также методы Трефтца, локальных вариаций [183], штрафов [112] и др. Перечисленные методы принято называть прямыми; для них характерно сведение краевых задач к решению алгебраических систем линейных уравнений. Есть, однако, другая, более глубокая связь между этими методами, которая делает различие между ними весьма условным: во всех прямых методах приближенное решение краевой задачи отыскивается в виде

$$u_N = \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k(x) + \varphi_0(x), \quad (1)$$

где  $\varphi_k(x)$  — некоторые заранее выбранные функции, а  $C_k$  — числа, которые находятся в результате решения упоминавшихся выше систем алгебраических уравнений. Заметим, что в некоторых методах (сеточных, МКЭ) формула (1) представления решения не всегда явно выписывается, однако это не меняет сути. В простейших конечно-разностных методах, например, за основу берется функция  $y = h_1(t)$  (финитный сплайн Шенберга первого порядка).

Приближенное решение (например, для двумерной задачи) выбирается в виде линейной комбинации произведений сдвигов сжатий функций  $h_1$ :

$$u_N(x_1, x_2) = \sum_{i,j} C_{ij} h_1(\alpha x_1 - \beta i) h_1(\gamma x_2 - \delta j). \quad (2)$$

Здесь  $C_{ij} = u_{ij}$  — значение искомой функции в узле  $(i, j)$ , а  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  выбираются такими, чтобы функция  $\varphi_{ij} = h_1(\alpha x_1 - \beta i) h_1(\gamma x_2 - \delta j)$  была равна единице в  $(i, j)$ -м узле и

нулю — в остальных узлах сетки. Нетрудно представить, что графически функция (2) — это многогранная поверхность. При этом изменение какой-либо из величин  $C_{ij}$  приводит лишь к локальному ее изменению в окрестности узла  $(i, j)$ . Если, учтя граничные условия, подставить формулу (2) в функционал, соответствующий краевой задаче, и написать условия его экстремума, то относительно величин  $C_{ij}$  получим систему конечно-разностных уравнений. Другие конечно-разностные схемы получаем аналогично, используя иные финитные функции (например, сплайны Шенберга второго и третьего порядков) (см. § 15 гл. 3), что соответственно приводит к менее разреженным матрицам систем алгебраических уравнений. В этом смысле ничем по существу не отличается от сеточных методов и метод конечных элементов, в котором функции  $\varphi_k(x)$  также локальные сплайны (в большинстве случаев дефектные, т. е. порядок используемых в них полиномов превосходит их гладкость больше чем на единицу), однако их носители могут иметь более сложную геометрическую форму, разную в различных подобластях рассматриваемой области. Именно вследствие этого и осуществляется более гибкая привязка к геометрии области.

В классических вариационных методах функции  $\varphi_k(x)$  — это так называемые координатные функции, вообще, не финитные, удовлетворяющие, если это необходимо, краевым условиям. Применение таких функций приводит к системе алгебраических уравнений, как правило, с полностью заполненными матрицами. Такие системы обычно плохо обусловлены даже при сравнительно небольших  $N$  (порядка  $10^2$ ) и требуют для хранения элементов матрицы в памяти ЭВМ  $N^2$  ячеек. Кроме того, вычисление коэффициентов в методах типа Ритца — Галеркина или наименьших квадратов требует вычисления кратных интегралов по всей области, в которой решается задача, и как следствие — больших затрат машинного времени. Таким образом, если взять за основу один и тот же вариационный принцип (например, минимизировать функционал Ритца), то метод сеток, конечных элементов и классический вариационный будут отличаться лишь выбором функций  $\varphi_k(x)$ . Будут различными при одном и том же  $N$  вычислительные затраты и накопление погрешностей, что, конечно, очень важно, однако тип сходимости, вообще, будет один и тот же.

Возможен и другой вариант: функции  $\varphi_k(x)$  выбираются одни и те же, но по-разному определяются постоянные  $C_k$ . Например, используя одну и ту же формулу (1), можно находить постоянные по методу Ритца, а можно, добавив к функционалу Ритца соответствующие слагаемые, применить метод Куранта и получить благодаря этому более высокий тип сходимости, чем сходимость по энергии.

Таким образом, все прямые методы объединяет между собой формула (1), а отличие между ними состоит лишь в выборе функций  $\varphi_k(x)$  и способах отыскания постоянных  $C_k$ .

Каким же условиям должны удовлетворять функции  $\varphi_k(x)$ , если проблему рассматривать с позиций теории приближений, вычислительной математики и системного программирования? В большинстве случаев требуется, а в остальных желательно, чтобы функции  $\varphi_k(x)$  удовлетворяли краевым условиям рассматриваемой задачи. Основная трудность в решении этого вопроса связана с тем, что в формулы, представляющие функции  $\varphi_k(x)$ , должна некоторым образом включаться информация геометрического характера о форме границы рассматриваемой области (и форме ее участков для краевых условий смешанного типа). Как уже отмечалось, в некоторых методах (сеточных, МКЭ) эта информация учитывается приближенно вследствие локального приближения узлов сетки к границе, а в некоторых (Рейснера, штрафов) — в интегральном смысле. Это, конечно, накладывает определенный отпечаток на тип сходимости и величину погрешностей. Тем не менее с этими недостатками можно было бы мириться при условии, что погрешность в результате приближенного учета геометрических форм соразмерна с погрешностью самого приближенного метода. Однако есть еще один весьма важный фактор, который необходимо учитывать: и в сеточных методах, и в МКЭ составление уравнений для пограничных узлов трудно формализуемое, что затрудняет решение вопросов автоматизации программирования.

Рассмотрим, какая ситуация складывается в методе штрафов. В простейшем варианте этого метода краевая задача (3.263), (3.264) (см. § 9 гл. 3) заменяется задачей о минимуме функционала

$$I = \int_{\Omega} (Au - f)^2 d\Omega + \sum_{i=1}^m M_i \int_{\partial\Omega_i} (L_i u - \varphi_i)^2 d\Gamma_i, \quad (3)$$

где  $M_i > 0$  — некоторые постоянные. Нетрудно заметить, что минимум  $I$  достигается на решении (обобщенном) этой краевой задачи. Однако при численной реализации метода штрафов не ясно, как следует выбирать постоянные  $M_i$ . Ответ можно получить на основе численных экспериментов, но организация этих экспериментов — дело сложное, требующее больших затрат времени. (Видимо, этим и объясняется то обстоятельство, что к настоящему времени опубликованы лишь немногие решения реальных краевых задач, полученные методом штрафов, и касаются они лишь простых случаев.) Поэтому, если бы появилась возможность строить в конструктивном отношении достаточно простые функции  $\varphi_k(x)$  так, чтобы краевые условия удовлетворялись точно и в то же время были сохранены все другие положительные факторы, характерные для упомянутых методов, то это имело бы важное значение для дальнейшего развития.

В течение длительного времени задача построения в явном виде функций  $\varphi_k(x)$ , точно удовлетворяющих произвольным краевым условиям для областей сложной формы, казалась практически неразрешимой. Дж. Ортега и В. Рейнболдт [95, с. 36] по этому поводу,

например, пишут: «Хотя формально метод Рунца распространяется на двумерные вариационные задачи и задачи более высокой размерности, здесь имеется серьезная практическая трудность, состоящая в построении подходящих базисных функций для общих областей».

В гл. 3, 4 показано, что эта проблема может быть решена с помощью конструктивного аппарата теории  $R$ -функций. При этом речь идет не просто об однородной задаче Дирихле, а о краевых условиях самых различных типов для областей практически произвольной формы. Для линейных краевых условий получаются формулы вида (1), а для нелинейных — формулы общего вида:

$$u_N = f(x, C_1, \dots, C_N). \quad (4)$$

По теории  $R$ -функций—довольно много работ (количество их с каждым годом возрастает), в том числе монографии [111, 127, 128, 134, 135]. Заметим, что в этой теории речь идет не только об удовлетворении краевым условиям. С точки зрения теории приближений одного лишь удовлетворения краевым условиям не достаточно для того, чтобы можно было получать приближения к точному решению. Задачу можно считать успешно решенной лишь при обеспечении определенных аппроксимационных свойств функций  $\varphi_k(x)$ : их линейные комбинации (1) должны достаточно хорошо приближать функции того класса, которому принадлежит точное решение задачи, т. е. функции (1) должны удовлетворять условиям полноты, а по возможности и условию аппроксимационной универсальности [126].

Основное внимание в данной монографии обращено на конструктивную сторону теории  $R$ -функций. Именно эта сторона сыграла главную роль при создании генераторов программ серии «Поле» (§ 1, 2 гл. 4), позволивших во много раз сократить затраты на составление и отладку программ при решении краевых задач. (Более подробная информация содержится в публикациях Г. П. Манько [67—71].)

Развитие конструктивного начала в математике всегда происходило наряду с развитием самой теории, причем вызывалось оно в первую очередь запросами практики. Например, если бы в свое время не был введен символ  $\operatorname{tg} x$ , а каждый раз вместо него писали бы  $\frac{\sin x}{\cos x}$ , то от этого не пострадала бы ни одна из теорем математики. Но нетрудно представить, насколько усложнилось бы решение многих прикладных проблем.

Функция  $\operatorname{tg} x$  выдержала испытание «естественным отбором». В связи с появлением ЭВМ темпы этого «отбора» неизмеримо возросли. Одна из задач данной работы—показать, что есть новые функции (элементарные и неэлементарные), которые по широте применения на практике и важности для развития теории, несомненно, выдержат испытание временем.

## ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

## § 1. Множества и логические операции над ними

Логические операции над множествами в настоящее время применяются не только в математике, но и в многочисленных ее приложениях. В данной работе им отводится особая роль: формализация, достигаемая на уровне алгебры множеств, будет представлять собой существенное звено в конструктивных построениях, осуществляемых с помощью  $R$ -функций (в частности, при построении уравнений сложных геометрических объектов и структур решений краевых задач). Заметим, что в ряде случаев наряду с термином «множество» используются его синонимы «совокупность», «многообразие», «система» и др.

Примем следующие обозначения:

$\mathbb{N}$  — множество неотрицательных целых чисел;

$\mathbb{Z}$  — множество произвольных целых чисел;

$\mathbb{Q}$  — множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$  — множество действительных чисел;

$C^m(\Omega)$  — множество  $m$  раз непрерывно дифференцируемых функций;

$\emptyset$  — пустое множество;

$2^A$  — множество всех подмножеств множества  $A$ ;

$f(A)$  — образ множества  $A$  при отображении  $f$ ;

$f^{-1}(A)$  — прообраз множества  $A$  при отображении  $f$ ;

$f/A$  — сужение (ограничение) отображения  $f$  на множество  $A$  (т. е.  $f/A$  есть отображение, совпадающее с  $f$  на множестве  $A$ . Вне множества  $A$  отображение  $f/A$ , вообще, не определено);

$\inf(\sup) A$  — нижняя (верхняя) грань множества  $A \subset \mathbb{R}$ ;  
 $a \in A$  (или  $A \ni a$ ) — элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$  ( $a$  находится в состоянии принадлежности к  $A$ );

$a \notin A$  (или  $A \not\ni a$ ) — элемент  $a$  не принадлежит множеству  $A$  ( $a$  находится в состоянии непринадлежности к  $A$ );

$A \subset B$  (или  $B \supset A$ ) — множество  $A$  является подмножеством множества  $B$ ;

$A \equiv B$  — множества  $A$  и  $B$  тождественны, т. е.  $A \supset B$  и  $A \subset B$ ;

$\exists a \in A \dots$  — существует (по крайней мере один) элемент  $a$  множества  $A$ , что ... ( $\exists$  — квантор существования);

$\forall a \in A \dots$  — для всякого элемента  $a$  множества  $A \dots$  ( $\forall$  — квантор общности);

$A_1 \times \dots \times A_n$  — прямое произведение множеств  $A_1, \dots, A_n$  есть множество упорядоченных строк  $a_1, \dots, a_n$ , где  $a_i \in A_i$ . В частности, если  $A_1 = \dots = A_n$ , то  $A \times \dots \times A = A^n$  называется  $n$ -й степенью множества  $A$ . Например,  $n$ -мерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  есть  $n$ -я степень множества  $\mathbb{R}$ .

Перейдем к логическим операциям над множествами. Операцию  $F$  над множествами  $A, B, \dots$  будем называть логической, если в результате ее применения получается множество, принадлежность элементов к которому вполне определяется их состояниями принадлежности или непринадлежности к множествам  $A, B, \dots$ . Примеры логических операций следующие:

1.  $A \cap B$  (или  $AB$ ) — *пересечение* множеств  $A$  и  $B$  — есть множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как множеству  $A$ , так и множеству  $B$ .

2.  $A \cup B$  (или  $A + B$ ) — *соединение* (сумма) множеств  $A$  и  $B$  — есть множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $A$  или  $B$ .

3.  $A \setminus B$  (или  $A - B$ ) — *разность* множеств  $A$  и  $B$  — есть совокупность тех элементов  $A$ , которые не принадлежат  $B$ :

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}. \quad (1.1)$$

4.  $A \triangle B$  — *симметрическая разность* — есть соединение разностей  $A \setminus B$  и  $B \setminus A$ , т. е.

$$A \triangle B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}). \quad (1.2)$$

Часто приходится рассматривать системы множеств, являющиеся подмножествами некоторого основного (так называемого унитарного) множества  $I$ . Для них вводится понятие дополнения (или отрицания).

5. Множество  $\bar{A} = I \setminus A$  называется дополнением (отрицанием) множества  $A$ . (Иногда употребляются обозначения  $\bar{A} = A' = \sim A$  и др.)

6. Тождество  $F(A, B, \dots) \equiv \Phi(A, B, \dots)$ , где  $F$  и  $\Phi$  — некоторые формулы, построенные с помощью тех или иных логических операций над множествами  $A, B, \dots$ , означает равенство множеств  $F(A, B, \dots)$  и  $\Phi(A, B, \dots)$  при любом выборе множеств  $A, B, \dots$

Нетрудно убедиться, что операции пересечения, соединения и дополнения обладают следующими свойствами, выраженными в виде тождеств.

I. Коммутативность:

$$1^\circ) A \cap B \equiv B \cap A; \quad 2^\circ) A \cup B \equiv B \cup A.$$

II. Ассоциативность:

$$3^\circ) A \cap (B \cap C) \equiv (A \cap B) \cap C,$$

$$4^\circ) A \cup (B \cup C) \equiv (A \cup B) \cup C.$$

III. Дистрибутивность:

$$5^{\circ}) A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$6^{\circ}) A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

IV. Идемпотентность:

$$7^{\circ}) A \cap A \equiv A; \quad 8^{\circ}) A \cup A \equiv A.$$

V. Закон двойного отрицания:

$$9^{\circ}) \overline{\overline{A}} \equiv \overline{\overline{\overline{A}}} \equiv A.$$

VI. Правила де Моргана:

$$10^{\circ}) \overline{A \cap B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}; \quad 11^{\circ}) \overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cap \overline{B}.$$

VII. Закон логического противоречия:

$$12^{\circ}) A \cap \overline{A} \equiv \emptyset.$$

VIII. Закон исключенного третьего:

$$13^{\circ}) A \cup \overline{A} \equiv I.$$

IX. Операции с унитарным множеством  $I$  и пустым множеством  $\emptyset$ :

$$14^{\circ}) I \cap A \equiv A; \quad 17^{\circ}) \emptyset \cup A \equiv A;$$

$$15^{\circ}) I \cup A \equiv I; \quad 18^{\circ}) \overline{\emptyset} \equiv I;$$

$$16^{\circ}) \emptyset \cap A \equiv \emptyset; \quad 19^{\circ}) \overline{I} \equiv \emptyset.$$

Приведенные формулы позволяют осуществлять тождественные преобразования формул, записанных в символах операций  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $\overline{A}$ , например, с целью их упрощения.

Пример.

$$(A \cap \overline{B} \cap C) \cap (A \cap C) \equiv (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (A \cap C \cap I) \equiv (A \cap C) \cap (\overline{B} \cup I) \equiv (A \cap C) \cap I \equiv A \cap C.$$

(Здесь использованы свойства  $1^{\circ}$ ,  $3^{\circ}$ ,  $5^{\circ}$ ,  $14^{\circ}$ ,  $15^{\circ}$ .)

Логическая терминология, использованная для наименования некоторых из приведенных выше формул, имеет свои корни в метаматематике [84], в частности в исчислении высказываний или булевой алгебре. О последней речь будет идти подробнее в § 6—8 данной главы.

Справедливость свойств  $1^{\circ}$ — $19^{\circ}$  легко проверяется. Убедимся, например, в справедливости формулы  $5^{\circ}$ . Пусть  $x \in A \cap (B \cup C)$ , т. е.  $x$  — элемент множества, стоящего в левой части формулы  $5^{\circ}$ . Это означает, что  $x$  принадлежит одновременно как множеству  $A$ , так и множеству  $B \cup C$ . Но тогда  $x \in B$  или  $x \in C$ . Следовательно,  $x$  принадлежит по крайней мере одному из множеств  $A \cap B$  или  $A \cap C$ . Тогда  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$  и, таким образом,  $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Наоборот, если  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , то  $x \in A \cap B$  или  $x \in A \cap C$ . Следо-

вательно,  $x \in A$  и по крайней мере одному из множеств  $B$  или  $C$ . Но тогда  $x \in B \cup C$ , а значит, и  $x \in A \cap (B \cup C)$ . Таким образом,  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ . Сравнивая эту формулу с полученной ранее формулой  $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , приходим к формуле 5°.

Благодаря тому что операции  $A \cap B$  и  $A \cup B$  ассоциативны, при многократном их применении можно опускать скобки, например  $((A \cap B) \cap C) \cap D \equiv A \cap B \cap C \cap D$ . Применяется также сокращенная запись:

$$A_1 \cap \dots \cap A_n \equiv \bigcap_{i=1}^{i=n} A_i; \quad A_1 \cup \dots \cup A_n \equiv \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i. \quad (1.3)$$

*Упражнения и задачи.* 1. Доказать тождества

$$\begin{aligned} A \Delta B &\equiv (A \cup B) \setminus (A \cap B); \\ A \cup B &\equiv (A \Delta B) \Delta (A \cap B); \quad A \setminus B \equiv A \Delta (A \cap B); \\ (A \cap B) \cup B &\equiv B; \quad (A \cup B) \cap B \equiv B; \\ (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) &\equiv A; \quad (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \equiv A; \\ (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) &\equiv (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

(Для доказательства использовать формулы (1.1), (1.2) и свойства 1°—19°.)

2. Показать, что симметрическая разность — это коммутативная и ассоциативная операции.

**Решение.** В соответствии с формулой (1.2) и свойствами 1°—19° получаем

$$\begin{aligned} A \Delta (B \Delta C) &\equiv [A \cap (\overline{B \Delta C})] \cup [\bar{A} \cap (B \Delta C)] \equiv \\ &\equiv [A \cap \overline{[(B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C)]}] \cup \{\bar{A} \cap [(B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C)]\} \equiv \\ &\equiv [A \cap \overline{[(B \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cap C)]}] \cup \{\bar{A} \cap [(B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C)]\} \equiv \\ &\equiv [A \cap \overline{[(\bar{B} \cup C) \cap (B \cup \bar{C})]}] \cup \{\bar{A} \cap (B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)\} \equiv \\ &\equiv \{[A \cap (\bar{B} \cup C)] \cap [A \cap (B \cup \bar{C})]\} \cup \{\bar{A} \cap B \cap \bar{C}\} \cup \\ &\cup \{\bar{A} \cap \bar{B} \cap C\} \equiv \{[(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap C)] \cap [(A \cap B) \cup (A \cap \bar{C})]\} \cup \\ &\cup \{\bar{A} \cap B \cap \bar{C}\} \cup \{\bar{A} \cap \bar{B} \cap C\} \equiv \{[(A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B)] \cup \\ &\cup [(A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C})] \cup [(A \cap C) \cap (A \cap B)] \cup [(A \cap C) \cap \\ &\cap (A \cap \bar{C})]\} \cup \{\bar{A} \cap B \cap \bar{C}\} \cup \{\bar{A} \cap \bar{B} \cap C\} \equiv \\ &\equiv \{[(A \cap A) \cap (B \cap \bar{B})] \cup [(A \cap A) \cap (\bar{B} \cap \bar{C})] \cup [(A \cap A) \cap \\ &\cap (C \cap B)] \cup [(A \cap A) \cap (C \cap \bar{C})]\} \cup \{\bar{A} \cap B \cap \bar{C}\} \cup \{\bar{A} \cap \bar{B} \cap C\} \equiv \\ &\equiv (A \cap \emptyset) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \emptyset) \cup \\ &\cup \{\bar{A} \cap B \cap \bar{C}\} \cup \{\bar{A} \cap \bar{B} \cap C\} \equiv \emptyset \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & U(A \cap B \cap C) \cup \emptyset \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = \\ & = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C). \end{aligned}$$

Поскольку последнее выражение инвариантно относительно циклической перестановки букв (т. е. при замене  $A, B, C$  на  $C, A, B$  соответственно), то оно равно также  $C \Delta (A \Delta B)$ . Таким образом, ассоциативность операции  $A \Delta B$  доказана. Ее коммутативность очевидна.

3. Пусть  $I = \mathbb{R}$ . Показать, что равенство  $(A \cap B) \cup C = C \cup (B \cap C)$  справедливо, если  $A = [a, b]$ ,  $B = [c, d]$ ,  $C = [e, f]$  и  $e \leq \max(a, c)$ ;  $f \geq \min(b, d)$ , но оно не является тождеством.

4. Показать, что правила де Моргана 10° и 11° верны для  $n$  ( $n \geq 2$ ) компонент, т. е.

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i} \equiv \bigcup_{i=1}^{i=n} \bar{A}_i; \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i} \equiv \bigcap_{i=1}^{i=n} \bar{A}_i. \quad (1.5)$$

## § 2. Диаграммы Эйлера

Логические операции над множествами допускают простую геометрическую интерпретацию. В качестве унитарного множества  $I$  возьмем плоскость, на которой будем изображать множества в виде некоторых областей. Тогда множество  $A \cap B$  будет представлять собой область (заштрихованную), показанную на рис. 1, а. Области (заштрихованные), соответствующие операциям  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $A \Delta B$  и  $\bar{A}$ , показаны на рис. 1, б, в, г и д соответственно.

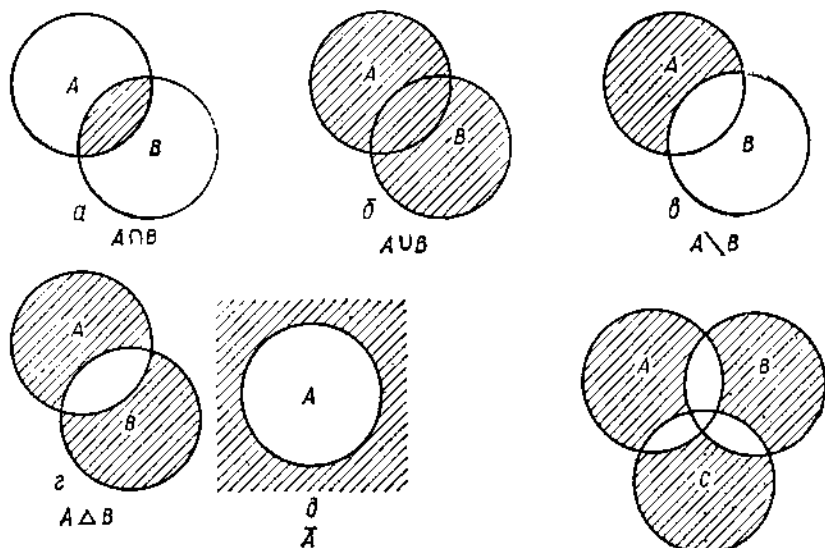


Рис. 1.

Рис. 2.

Применение этих диаграмм, названных диаграммами Эйлера, во многих случаях позволяет существенно упростить решение задач.

Рассмотрим, например, упражнение 2 § 1. Формальное доказательство ассоциативности симметрической разности  $A \Delta B$  потребовало выполнения ряда тождественных преобразований. Построим диаграмму Эйлера для выражения  $A \Delta (B \Delta C)$  (рис. 2). Из диаграммы видно, что область  $A \Delta (B \Delta C)$  симметрична относительно множеств  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , и такую же диаграмму имеет множество  $(A \Delta B) \Delta C$ .

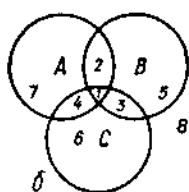
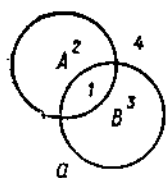


Рис. 3.

Заметим, что диаграммами Эйлера удобно пользоваться лишь при небольшом числе рассматриваемых областей. С увеличением их числа трудность построения диаграмм быстро возрастает. Дело в том, что граница каждой следующей области, изображаемой на диаграмме, должна обязательно пересекаться с каждой из логически возможных подобластей, на которые предыдущие заданные области разбивают плоскость. (В противном случае некоторые логически возможные ситуации могут быть пропущены.) Так, одной области  $A$  соответствуют две под-

области плоскости  $\mathbb{R}^2$ : сама область  $A$  и ее внешность  $\bar{A}$ . Двум областям  $A$  и  $B$  соответствуют уже четыре подобласти (рис. 3, а), а трем подобластям — восемь (рис. 3, б). Такие области будем называть *конституентными областями*. Очевидно, подобрать четвертую область  $D$ , граница которой проходила бы через внутренние точки каждой из подобластей, уже труднее (рис. 4). Заметим, что если, например, вместо рис. 3, б принять расположение областей такое, как показано на рис. 5, то логической формуле  $(A \cap B) \cap C$  соответствовало бы пустое множество  $\emptyset$ , что для других множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ , вообще, не верно.

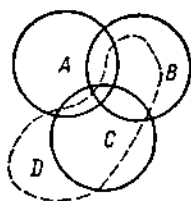


Рис. 4.

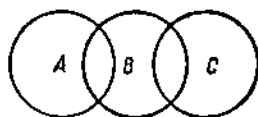


Рис. 5.

*Упражнения и задачи. 1.* Используя диаграммы Эйлера, доказать тождества

$$(A \cup C) \cap B \equiv (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B \cap C);$$

$$[A \cap (B \cup C)] \cup (\bar{A} \cap C) \equiv C \cup (A \cap B);$$

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (C \setminus A) \equiv C; \quad A \Delta B \equiv (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$

$$[A \cap (B \Delta C)] \cup (B \Delta C) \equiv B \Delta C;$$

$$A \cup [(B \setminus \bar{A}) \Delta C] \equiv (A \cap B) \Delta C.$$

2. Выпуклые области  $A, B, C \subset \mathbb{R}^2$  разбивают плоскость на восемь частей, различающихся состояниями принадлежности их точек множествам  $A, B$  и  $C$ . Может ли добавление выпуклой области  $D$  привести к разбиению  $\mathbb{R}^2$  на 16 подобластей указанного типа? Какое максимальное число таких подобластей могут образовать  $n$  выпуклых областей в  $\mathbb{R}^2$ ?

3. Существуют ли (для всякого  $n$ ) конгруэнтные (т. е. получающиеся одна из другой переносом и поворотом) области  $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^2$ , разбивающие плоскость на максимально возможное ( $2^n$ ) число частей, которые различаются между собой состояниями принадлежности их точек областям  $A_1, \dots, A_n$ . (Заметим, что для  $n \leq 3$  такими областями, например, являются круги одинакового радиуса.)

### § 3. Принцип двойственности

Пусть  $F(A_1, \dots, A_n)$  — некоторая логическая формула, написанная с помощью символов (не обязательно всех) операций пересечения, соединения и дополнения, пустого  $\emptyset$  и унитарного  $I$  множеств. (Если в  $F(A_1, \dots, A_n)$  присутствуют символы разности  $A \setminus B$  и симметрической разности  $A \Delta B$ , то их можно с помощью формул (1.1) и (1.2) исключить.)

Формулу  $F^*(A_1, \dots, A_n)$  будем называть *двойственной* формуле  $F(A_1, \dots, A_n)$ , если она может быть получена из последней путем формальной замены («преобразования двойственности») символов ( $\cap$  на  $\cup$ ,  $\cup$  на  $\cap$ ,  $\emptyset$  на  $I$ ,  $I$  на  $\emptyset$ ) и, возможно, последующих тождественных преобразований. Примерами двойственных формул являются

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap I) \quad \text{и} \quad (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \emptyset); \\ \overline{(A \cup B) \cap C} \quad \text{и} \quad \overline{(\bar{A} \cap B) \cup C}; \\ (A \cap B) \cup A \quad \text{и} \quad A. \end{aligned}$$

Если  $F(A_1, \dots, A_n) \equiv F^*(A_1, \dots, A_n)$  (т. е. двойственные формулы тождественны), формулу  $F(A_1, \dots, A_n)$  будем называть *самодвойственной*. Примером самодвойственной формулы является

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C). \quad (1.6)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) &\equiv [(A \cup A) \cap (A \cup C) \cap \\ &\cap (B \cup A) \cap (B \cup C)] \cup (B \cap C) \equiv [A \cap (A \cup C) \cap (A \cup B) \cap \\ &\cap (B \cup C)] \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup B \cup C) \cap \\ &\cap (A \cup B \cup B) \cap (B \cup C \cup C) \cap (A \cup C) \cap (A \cup C \cup C) \cap \\ &\cap (A \cup B \cup C) \cap (B \cup C \cup C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup B \cup C) \cap \\ &\cap (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C) \cap (A \cup C) \cap (A \cup B \cup C) \cap \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cap (B \cup C) &\equiv (A \cup B) \cap (A \cup B \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C) \equiv \\ &\equiv (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Очевидно, также, что если  $F(A_1, \dots, A_n) = A_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), то  $F(A_1, \dots, A_n)$  — самодвойственная формула.

Тождества в алгебре множеств можно рассматривать как теоремы, путь к доказательствам которых лежит через тождественные преобразования. (В исчислении высказываний этим преобразованиям соответствуют элементарные рассуждения формальной логики [24, 84].) Пусть

$$F(A_1, \dots, A_n) \equiv \Phi(A_1, \dots, A_n) \quad (1.7)$$

тождество, записанное с помощью символов  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\bar{\phantom{x}}$ ,  $\emptyset$  и  $I$ . Нетрудно заметить, что если в тождествах  $1^\circ - 19^\circ$  § 1 произведем упомянутое выше преобразование двойственности (т. е. заменим  $\cap$  на  $\cup$ ,  $\cup$  на  $\cap$ ,  $\emptyset$  на  $I$  и  $I$  на  $\emptyset$ ), то получим ту же систему тождеств  $1^\circ - 19^\circ$ . Отсюда следует, что при этом преобразовании тождество (1.7) также сохраняется:

$$F^*(A_1, \dots, A_n) \equiv \Phi^*(A_1, \dots, A_n). \quad (1.8)$$

(Таким образом, каждой теореме в алгебре множеств соответствует двойственная теорема.)

Заметим, что если множества, определяемые формулами  $F(A_1, \dots, A_n)$  и  $\Phi(A_1, \dots, A_n)$ , совпадают лишь при некотором фиксированном выборе множеств  $A_1, \dots, A_n$  (т. е. (1.7) является равенством, а не тождеством), то двойственные им формулы будут, вообще, определять различные множества.

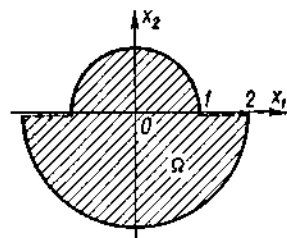


Рис. 6.

**Пример 1.** Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  — области на плоскости  $x_1 O x_2$ , определяемые неравенствами

$A \equiv (4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0)$  (круг радиуса два с центром в начале координат);

$B \equiv (x_2 \geq 0)$  (верхняя полуплоскость);

$C \equiv (1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0)$  (круг радиуса один с центром в начале координат). Легко проверить, что

множества  $M \equiv (C \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$  и  $N \equiv (C \cup \bar{B}) \cap A$  совпадают и определяют область  $\Omega$  (заштрихованная часть на рис. 6; штриховыми линиями обозначены участки границы области  $\Omega$ , не принадлежащие  $\Omega$ ). Поэтому  $(C \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (C \cup \bar{B}) \cap A$ . Рассмотрим двойственную формулу  $(C \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = (C \cap \bar{B}) \cup A$ . Нетрудно убедиться в том, что левой части этой формулы соответствует область, приведенная на рис. 7, а, а правой — на рис. 7, б. Таким образом, в этом случае двойственное равенство не выполняется.

**Пример 2.** Рассмотрим множество

$$M = (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap A_2) \cup \{(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_3 \cap I) \cap (A_2 \cap A_3)\}.$$

Применяя формулы  $1^\circ - 19^\circ$  § 1, последовательно получаем

$$M \equiv (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2 \cap I) \cup (A_2 \cap A_3) \equiv$$

$$\begin{aligned}
&\equiv (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3) \equiv \\
&\equiv (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup [A_1 \cap (A_2 \cup A_3)] \cup (A_2 \cap A_3) \equiv \\
&\equiv [A_1 \cap (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)] \cup [A_1 \cap (A_2 \cup A_3)] \cup (A_2 \cap A_3) \equiv \\
&\equiv [A_1 \cap \{(\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_2 \cup A_3)\}] \cup (A_2 \cap A_3) \equiv \\
&\equiv [A_1 \cap \{[(\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup A_2] \cup A_3\}] \cup (A_2 \cap A_3) \equiv \\
&\equiv [A_1 \cap \{[(\bar{A}_2 \cup A_2) \cap (\bar{A}_3 \cup A_2)] \cup A_3\}] \cup (A_2 \cap A_3) \equiv \\
&\equiv [A_1 \cap \{[I \cap (\bar{A}_3 \cup A_2)] \cup A_3\}] \cup (A_2 \cap A_3) \equiv \\
&\equiv [A_1 \cap (A_2 \cup A_3 \cup \bar{A}_3)] \cup (A_2 \cap A_3) \equiv \\
&\equiv [A_1 \cap (A_2 \cup I)] \cup (A_2 \cap A_3) \equiv (A_1 \cap I) \cup (A_2 \cap A_3) \equiv A_1 \cup (A_2 \cap A_3).
\end{aligned}$$

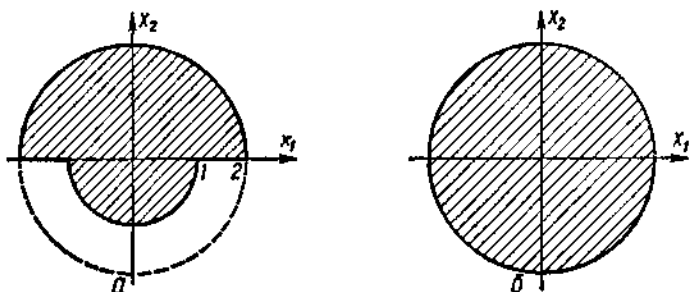


Рис. 7.

Таким образом, справедливо тождество

$$(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap A_2) \cup [(A_1 \cap A_3 \cap I) \cap (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)] \equiv A_1 \cup (A_2 \cap A_3).$$

Следовательно, выполнимо и двойственное тождество

$$(A_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3) \cap (A_1 \cup A_2) \cap [(A_1 \cup A_3 \cup \emptyset) \cup (\bar{A}_2 \cup \bar{A}_3)] \equiv A_1 \cap (A_2 \cup A_3).$$

*Упражнения и задачи.* 1. Существует ли самодвойственная двухместная операция  $F(A, B)$ , не равная тождественно  $A$  или  $B$ ?

2. Описать множество всех самодвойственных формул вида  $F(A_1, \dots, A_n)$  при любом  $n \geq 2$ .

3. Описать множество всех логических формул, для которых  $F \cap F^* = \emptyset$ . Будет ли при этом  $F \cup F^* = I$ ?

Будем предполагать, что  $F(A_1, \dots, A_n)$  — строго  $n$ -местная логическая операция, если не существует таких целых чисел  $k_1, \dots, k_s \in \{1, \dots, n\}$  ( $s < n$ ), что  $F(A_1, \dots, A_n) = \Phi(A_{k_1}, \dots, A_{k_s})$ , где  $\Phi$  —  $s$ -местная логическая формула. Для каких  $n$  существуют строго  $n$ -местные самодвойственные логические формулы? Простой перебор показывает, что для  $n = 2$  таких формул нет. Для  $n = 3$  примером самодвойственной строго трехместной формулы является (1.6).

5. Пусть  $\mu(n)$  — количество самодвойственных  $n$ -местных логических формул. Показать, что  $\mu(n)$  — неубывающая функция.

6. Пусть  $\tau(n)$  — количество самодвойственных строго  $n$ -местных логических формул. Показать, что  $\tau(2) = 0$ . Для каких еще  $n$   $\tau(n) = 0$ ?

7. Пусть  $\lambda\{F(A_1, \dots, A_n)\} = \lambda(F)$  — количество конъюнктивных областей в диаграмме Эйлера для логической формулы  $F(A_1, \dots, A_n)$ , а  $\lambda(F^*)$  — количество таких же областей для двойственной формулы. Описать класс функций, для которых  $\lambda(F) = \lambda(F^*)$ .

#### § 4. Композиция и суперпозиция. Замкнутые множества функций

Для задания функций в виде формул чаще всего используют так называемые элементарные функции, которые строятся по правилам образования сложных функций с помощью системы

$$H_e = \left\{ x \pm y; xy; \frac{x}{y}; x^n; a^x (a > 0); \log_a x (a > 0); \right. \\ \left. \sin x; \cos x; \operatorname{tg} x; \operatorname{ctg} x; \arcsin x; \arccos x; \operatorname{arctg} x; \right. \\ \left. \operatorname{arccctg} x; a, \forall a \in \mathbb{R} \right\},$$

состоящей из арифметических операций, основных элементарных функций и констант.

Примерами элементарных функций являются  $e^{2\sin^2 xy}$ ;  $\frac{x_1 x_2 + \operatorname{arctg} x_3}{1 + x_1 x_2 x_3}$ ;  $(2(x_1 x_2 + x_3) + x_4) + 2$ ;  $\sqrt{t^2}$  и др. Последняя из них  $\sqrt{t^2} = |t|$  ( $t$  — действительная переменная), если ее умело использовать, позволяет считать элементарными и многие кусочно-элементарные функции (но не все, если речь идет о функциях более чем одного аргумента), т. е. функции, задаваемые различными элементарными формулами в различных подобластях пространства аргументов. Например, можно убедиться, что функция

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > 1; \\ 1 + x & \text{при } -1 \leq x \leq 0; \\ 1 - x & \text{при } 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad (1.10)$$

может быть также задана одной формулой:

$$h_1(x) = \frac{1}{2} (1 - |x| + |1 - |x||).$$

(График функции  $h_1(x)$  показан на рис. 8.)

Во времена Ньютона и Лейбница понятие функции по существу исчерпывалось элементарными функциями. Лишь позже, когда было установлено, что некоторые интегралы от элементарных функций нельзя представить в элементарном виде, не все уравнения с элементарными коэффициентами можно разрешить в элементарных функциях и так далее, возникла общая теоретико-множественная

точка зрения и элементарные функции стали рассматриваться как примеры функций вообще.

По мере развития математики число функций, для которых вводилась стандартная символика, постепенно расширялось, причем происходило это в рамках как элементарных функций (например, гиперболические функции  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{th} x$  и др.), так и специальных функций (Эйлера, Бесселя, Матье и т. д.). Заметим, что расширение символики осуществлялось путем своего рода «естественного отбора» и определялось прежде всего практической значимостью рассматриваемых функций.

Необходимость совершенствования конструктивных средств математики, которые до недавнего времени почти исчерпывались базисной системой (1.9), особенно возросла в последние годы, когда широкое распространение получили быстродействующие вычислительные машины и возникла проблема повышения эффективности их использования. В частности, появились серьезные основания для расширения системы (1.9) как в рамках самих элементарных функций, так и за их пределами.

В дальнейшем наряду с системой (1.9) будут рассматриваться и другие базисные системы (например, системы булевых функций,  $R$ -функций и др.), поэтому целесообразно подойти к вопросу формирования сложных функций с помощью базисных систем с общих позиций.

Пусть  $\mathfrak{X}$  — некоторое множество,  $\mathfrak{X}^n$  — его  $n$ -я степень. Отображения вида  $y = f(x) : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^m$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$  назовем *правильными с алфавитом  $\mathfrak{X}$* . Множество всех правильных с алфавитом  $\mathfrak{X}$  отображений обозначим  $\mathfrak{F}(\mathfrak{X})$ . При  $m = 1$  правильные отображения вида  $f : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}$  называются  $n$ -местными ( $n$ -арными) *алгебраическими операциями* на  $\mathfrak{X}$  [45].

Пусть  $y = f(x) : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^m$ ;  $u = \varphi(y) : \mathfrak{X}^m \rightarrow \mathfrak{X}^p$ . Отображение  $u = \varphi[f(x)] : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^p$  принято называть *композицией  $f$  и  $\varphi$* . Для композиции применяется также обозначение  $\varphi[f(x)] = \varphi \circ f$ .

Введем понятие *суперпозиции*, некоторым образом обобщающее понятие композиции. Пусть  $H$  — некоторая система (не обязательно конечная) правильных с алфавитом  $\mathfrak{X}$  отображений

$$H = \{y = \varphi_i(x) : \mathfrak{X}^{n_i} \rightarrow \mathfrak{X}^{m_i}, i \in I_0\}, \quad (1.11)$$

где  $I_0$  — некоторое множество индексов.

Множество  $\mathfrak{M}(H)$  суперпозиций системы  $H$  включает:

- отображения, составляющие  $H$ ;
- тождественное отображение  $y \equiv x : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ ;
- отображения вида  $f = (\varphi, \psi) : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^{m+p}$ , где  $\varphi : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^m$ ,  $\psi : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^p$ ,  $(\varphi, \psi) = (\varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi_1, \dots, \psi_p)$ , а  $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}(H)$ ;
- композиции вида  $\varphi \circ \psi$ ,  $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}(H)$ .

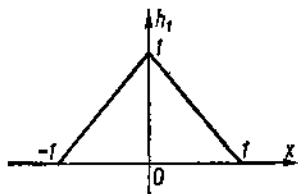


Рис. 8.

Для того чтобы подчеркнуть происхождение суперпозиций от базисной системы  $H$ , элементы множества  $\mathfrak{M}(H)$  будем называть  $H$ -реализуемыми отображениями, а если  $\mathfrak{X}$  — числовое множество, то  $H$ -реализуемыми функциями.

Понятие  $H$ -реализуемой функции является формализацией понятия функции, заданной аналитически (в виде единого аналитического выражения). Действительно, если для обозначения функций, составляющих базисную систему (1.11), ввести некоторый набор символов, то для каждой  $H$ -реализуемой функции можно будет написать формулу, содержащую лишь указанные символы, символы независимых переменных и, возможно, открывающие и закрывающие скобки.

Классическим примером применения операции суперпозиции являются элементарные функции, которые в соответствии с введенной терминологией можно назвать  $H_e$ -реализуемыми функциями (с базисной системой (1.9)).

Заметим, что при образовании суперпозиций (в силу пункта «б» их определения) допускается произвольное переименование независимых переменных. Так, например, суперпозициями системы  $H = \{f(x_1, x_2, x_3), \varphi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2)\}$  являются функции  $f[\varphi(x_1, x_2), x_2, \psi(x_3, x_4)]$ ;  $f[\varphi(x_1, x_2), x_1, f(x_1, x_1, x_1)]$ ;  $\psi[\varphi(x, y), \varphi(u, t)]$ .

Рассмотрим наряду с системой  $H = \{y = \varphi_i(x) : \mathfrak{X}^{n_i} \rightarrow \mathfrak{X}^{m_i}, i \in I_0\}$  систему  $H_1 = \{y = \psi_i(x) : \mathfrak{X}^{n_i} \rightarrow \mathfrak{X}^{m_i}, i \in I_0\}$ , полученную заменой

$$\begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s, \dots \\ \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s, \dots \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

функций  $\varphi_i$  на  $\psi_i$ ,  $i \in I_0$  соответственно. (При этом функции  $\psi_i$  имеют то же число аргументов, что и функции  $\varphi_i$ .)

Пусть  $f \in \mathfrak{M}(H)$  — некоторая  $H$ -реализуемая функция. Ей соответствует некоторая формула  $f[\varphi_{\alpha_1}, \dots, \varphi_{\alpha_m}]$ ,  $\alpha_i \in I_0$ , в которую входят какие-то функции  $\varphi_{\alpha_1}, \dots, \varphi_{\alpha_m}$  из  $H$ . Заменим в формуле (1.12) функции  $\varphi_i$  на  $\psi_i$ , сохранив при этом наименование независимых переменных. В результате получим новую функцию  $f_1 \in \mathfrak{M}(H_1)$ , описываемую формулой  $f[\psi_{\alpha_1}, \dots, \psi_{\alpha_m}]$ .

Формулы  $f[\varphi_{\alpha_1}, \dots, \varphi_{\alpha_m}]$  и  $f[\psi_{\alpha_1}, \dots, \psi_{\alpha_m}]$  называются формулами одинаковой структуры.

Пусть, например,  $H = H_e$  (1.9),  $u = (x_1 x_2 + 3) e^{x_1 x_2}$ , и дана замена:

$$\begin{pmatrix} x_1 x_2; & x_1 + x_2; & e^t; & 3 \\ x_1 + x_2; & x_1 x_2; & \sin t; & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда формула  $v = (x_1 + x_2) 5 + \sin(x_1 + x_2)$  имеет ту же структуру, что и формула  $u = (x_1 x_2 + 3) e^{x_1 x_2}$ .

С понятием суперпозиции тесно связано понятие замкнутого множества. Множество  $\mathfrak{M}_0$  называется суперпозиционно замкнутым, если для всякой системы  $H \subset \mathfrak{M}_0$  множество суперпозиций  $\mathfrak{M}(H) \subset \mathfrak{M}_0$ .



Если все возможные композиции функций из  $\mathfrak{M}$  принадлежат  $\mathfrak{M}$ , но имеются суперпозиции функций из  $\mathfrak{M}$ , не принадлежащие  $\mathfrak{M}$ , то множество  $\mathfrak{M}$  будем называть *композиционно замкнутым*.

В дальнейшем, для сокращения речи, суперпозиционно замкнутые множества будем называть *замкнутыми*. Очевидно, что всякое замкнутое множество является композиционно замкнутым.

Примерами замкнутых множеств являются:

1) множество  $C^k(\mathbb{R}^n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ )  $k$  раз непрерывно дифференцируемых везде функций (в том числе множества  $C^0 = C$  непрерывных и  $C^\infty$  бесконечно дифференцируемых функций);

2) множества  $C^R$  целых рациональных функций и  $C^Q$  — дробно-рациональных функций;

3) множество  $C^A$  везде аналитических функций (т. е. разложимых в ряд Тейлора в окрестности любой точки);

4) множество  $\mathfrak{F}(\mathfrak{X})$  правильных отображений с непустым алфавитом  $\mathfrak{X}$ ;

5) пусть  $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}(\mathfrak{X})$  множество правильных отображений с алфавитом  $\mathfrak{X}$ , а  $a \in \mathfrak{X}$ . Рассмотрим множество  $T_a \subset \mathfrak{M}$  всех таких отображений  $f: \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^m$  ( $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ), которые переводят элементы вида  $(a, a, \dots, a) \in \mathfrak{X}^n$  в элементы вида  $(a, a, \dots, a) \in \mathfrak{X}^m$ . В частности, если  $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}$  и  $a = 0 \in \mathfrak{X}$ , то отображения вида  $f: \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}$ , обладающие отмеченным свойством, принято называть *алгебраическими операциями, сохраняющими 0*. Для таких операций всегда  $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ . Нетрудно доказать (это непосредственно видно из определения суперпозиции), что множество  $\mathfrak{M}_a$  замкнуто.

**Теорема 1.** *Пересечение замкнутых (композиционно замкнутых) множеств есть замкнутое (композиционно замкнутое) множество. (Пустое множество считается замкнутым по определению.)*

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{M}_1$  и  $\mathfrak{M}_2$  — замкнутые множества, а  $H \subset \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ . Тогда множество  $\mathfrak{M}(H)$   $H$ -реализуемых функций должно в силу замкнутости  $\mathfrak{M}_1$  и  $\mathfrak{M}_2$  содержаться в каждом из них. Следовательно,  $\mathfrak{M}(H) \subset \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ , что и требовалось доказать.

В дальнейшем широко используется понятие полной системы отображений, смысл которого заключается в следующем. Система  $H$  называется *полной* по отношению к множеству  $\mathfrak{M}_0$ , если  $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}(H)$ , т. е. если всякая функция из  $\mathfrak{M}_0$   $H$ -реализуема.

**Пример 1.** Система  $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, a, \forall a \in \mathbb{R}\}$  полна по отношению к множеству  $C^R$  целых рациональных функций.

**Пример 2.** Пусть  $H$  — множество правильных непрерывных функций двух аргументов с алфавитом  $\mathfrak{X} = \{0, 1\}$ , а  $C$  — множество правильных непрерывных функций произвольного числа аргументов с тем же алфавитом. Из решения 13-й проблемы Гильберта, полученного А. Н. Колмогоровым [51] и В. И. Арнольдом [4], следует, что всякая непрерывная функция  $n$  аргументов ( $n \geq 3$ ) может быть представлена как суперпозиция непрерывных функций двух аргументов. Следовательно, множество  $H$  представляет собой полную систему относительно множества  $C$ .

Если для функций, составляющих полную систему, введена некоторая символика, то всякую функцию из  $\mathfrak{M}_0$  можно представить в виде единого аналитического выражения, записанного с помощью этой символики.

Приведем некоторое обобщение понятия полной системы. Пусть  $T: \mathfrak{M}_0 \rightarrow 2^{m_0}$ ,  $2^{m_0}$  — множество всех подмножеств  $\mathfrak{M}_0$ . Элементы множества  $Tx$ , соответствующего элементу  $x \in \mathfrak{M}_0$ , будем называть *похожими на  $x$  по признаку  $T$* . Множество  $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_0$  называется *замкнутым по признаку  $T$* , если для всякой суперпозиции  $f$  отображений из  $\mathfrak{M}_1$  в этом множестве есть отображения, похожие на  $f$  (по признаку  $T$ ).

Пусть  $H \subset \mathfrak{M}_1$  — система отображений такая, что для всех  $x \in \mathfrak{M}_1$  множество  $Tx \cap \mathfrak{M}(H)$ , где  $\mathfrak{M}(H)$  — множество  $H$ -реализуемых отображений, непустое. В этом случае систему  $H$  будем называть *полной по признаку  $T$*  или *достаточно полной*. Нетрудно заметить, что если  $T$  — каноническая инъекция  $\mathfrak{M}$  в  $2^m$  (т. е. всякому  $x \in \mathfrak{M}$  соответствует подмножество  $\mathfrak{M}$ , состоящее из этого же элемента  $x$ ), то полнота по признаку  $T$  есть полнота  $H$  по отношению к  $\mathfrak{M}$  в обычном смысле.

**Пример 3.** Будем предполагать, что функция  $\varphi \in C^k(\Omega)$  «похожа» по признаку  $T_\varepsilon$  на функцию  $f \in C^k(\Omega)$ , если  $\|\varphi - f\|_{C^k(\Omega)} < \varepsilon$ . Система  $H_0 = \{x_1 + x_2; x_1x_2; a, \forall a \in \mathbb{R}\}$  является полной по признаку  $T_\varepsilon$  в  $C^k(\Omega)$ , каким бы ни было  $\varepsilon > 0$ . Это следует из известной теоремы Вейерштрасса [144] о возможности приближения функций из  $C^k(\Omega)$  полиномами (т. е. элементами  $\mathfrak{M}(H_0)$ ).

**Пример 4.** Пусть  $\mathfrak{M}$  — множество всех функций, определенных на отрезке  $[0, 1]$  и имеющих на нем конечное число нулей. Каждой функции  $f \in \mathfrak{M}$  поставим в соответствие множество  $T(f) \in \mathfrak{M}$  функций, нули которых совпадают с нулями  $f$ . Тогда достаточно полной является, например, система  $H_0 = \{x_1 + x_2; x_1x_2; a, \forall a \in \mathbb{R}\}$ . Действительно, полином  $(x_1 - x) \dots (x_2 - x) \in \mathfrak{M}(H_0) \cap \mathfrak{M}$  и имеет произвольно заданные нули  $x_1, \dots, x_2$ .

Нетрудно заметить, что система  $H_\varepsilon$  (1.9) избыточная в том смысле, что некоторые из входящих в нее функций можно опустить, не изменив множества  $\mathfrak{M}(H_\varepsilon)$  всех элементарных функций. Такими функциями, например, являются  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ ,  $\operatorname{arctg} x$  и некоторые другие. (Для развития теоретической математики введение специальных символов для функций  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$  и других, вообще, не обязательно, однако легко представить себе те трудности, которые возникли бы в прикладной математике, если бы соответствующие символы не были введены.)

**Определение.** Полная в множестве  $\mathfrak{M}_0$  система  $H = \{\varphi_i\}$ ,  $i \in I$ ,  $I$  — некоторое множество индексов, называется *базисом* в  $\mathfrak{M}_0$ , если после исключения из нее любой непустой подсистемы  $H_1$  получаем не полную в множестве  $\mathfrak{M}_0$  систему (т. е.  $\mathfrak{M}(H \setminus H_1) \not\supset \mathfrak{M}_0$ ).

**Замечание.** До сих пор предполагалось, что образование суперпозиций осуществляется путем конечного числа действий над рассматриваемой системой  $H$ . Между тем в математике широко исполь-

зуются и бесконечные суперпозиции, и, без сомнения, изучению таких суперпозиций принадлежит большое будущее. (Эта точка зрения высказана в конце прошлого столетия русским математиком Н. В. Бугаевым [12].) Классическими примерами таких суперпозиций являются бесконечные ряды (суперпозиции операции сложения  $x_1 + x_2$ ) и бесконечные произведения (суперпозиции операции умножения  $x_1 x_2$ ). Оба случая — это частные случаи следующей более общей схемы. Даны двухместная функция  $\varphi(x_1, x_2)$  и последовательность (числовая или функциональная)  $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$ . Назовем частичными суперпозициями формулы

$$\begin{aligned} S_1 &= \varphi(y_0, y_1); \\ S_2 &= \varphi(y_0, \varphi(y_1, y_2)); \\ &\dots \dots \dots \\ S_n &= \varphi(y_0, \varphi(y_1, \varphi(y_2, \varphi(\dots, \varphi(y_{n-1}, y_n) \dots))))). \end{aligned} \quad (1.13)$$

При  $n \rightarrow \infty$  приходим к бесконечной суперпозиции со своими признаками сходимости и методами вычислений. При этом, если  $\varphi(x_1, x_2) \equiv x_1 * x_2$  — ассоциативная операция, то можно записать  $S_n = y_0 * y_1 * \dots * y_n$ .

Заметим, что ассоциативные операции далеко не редкость даже среди обычных элементарных функций. Ассоциативные (и коммутативные одновременно), например, следующие функции:

$\varphi_0(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{1 + c^{-1} x_1 x_2}$  (сложение скоростей в специальной теории относительности);

$\varphi_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \alpha x_1 x_2$  (при  $\alpha = -1$  — сложение вероятностей независимых событий);

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + a^2} \quad (a \in \mathbb{R});$$

$\varphi_3(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 - \alpha x_1 x_2}$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ; при  $\alpha = 0$  — сложение сопротивлений в электротехнике).

Впрочем, для построения интересных в теоретическом и прикладном отношении бесконечных суперпозиций коммутативность и ассоциативность вовсе не обязательны. Так, если взять за основу функцию  $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{x_2}$ , то процесс образования суперпозиций (1.13) запишется в виде

$$\begin{aligned} S_1 &= y_0 + \frac{1}{y_1}; \\ S_2 &= y_0 + \frac{1}{y_1 + \frac{1}{y_2}}; \\ S_3 &= y_0 + \frac{1}{y_1 + \frac{1}{y_2 + \frac{1}{y_3}}}; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

т. е. приходим к цепным дробям, интерес к которым с каждым годом возрастает [159].

Нетрудно заметить, что при замене в формулах (1.13) функции  $\varphi(x_1, x_2)$  другими функциями двух аргументов, будем получать формулы той же структуры. (Это означает, в частности, что ряды, бесконечные произведения и цепные дроби (1.14) имеют одинаковую структуру в том смысле, который определен в данном параграфе.) Нетрудно заметить, что, используя функции другого числа переменных или чередуя по тем или иным циклическим законам две или большее число различных формул, можем получать другие суперпозиционные бесконечные структуры, которые могут, в частности, иметь и ветвящийся характер. Например, используя функции  $\varphi(x_1, x_2)$  и  $\psi(x_1, x_2)$ , можем вместо (1.13) рассмотреть процесс

$$\begin{aligned} S_1 &= \varphi(y_0, y_1); \\ S_2 &= \varphi(y_0, \psi(y_1, y_2)); \\ S_3 &= \varphi(y_0, \psi(y_1, \varphi(y_2, y_3))), \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

в котором функции входят в формулы для  $S_k$ , чередуясь.

Если бесконечная структура, опирающаяся на некоторую систему функций  $\varphi_i(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), определена, то, осуществляя различные замены вида

$$\begin{pmatrix} \varphi_1, \dots, \varphi_k \\ \psi_1, \dots, \psi_k \end{pmatrix}$$

и выбирая функции  $\{\psi_i\}$  тех же аргументов, что и  $\varphi_i$  из некоторых функциональных множеств  $\{\Psi_i\}$ , получаем различные бесконечные суперпозиционные процессы одинаковой структуры со своими критериями сходимости и методами вычислений. При этом возникает ряд вопросов проблемного характера, касающихся типов сходимости и аппроксимационных свойств последовательностей  $S_n$  вида (1.13), (1.15) (это относится к случаю, когда  $\{y_i\} = \{y_i(x)\}$  — функциональные последовательности), нахождения тех подмножеств множества  $\Psi_1 \times \dots \times \Psi_k$ , которым соответствуют одинаковые критерии сходимости и др. Изучение таких вопросов особенно актуально в связи с совершенствованием вычислительной техники в направлении создания ЭВМ с переменной структурой (в частности, так называемых однородных вычислительных сред).

*Упражнения и задачи.* 1. Пусть  $x * y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторая ассоциативная операция,  $h(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — строго монотонная функция,  $h^{-1}(x)$  — функция, обратная  $h(x)$ . Показать, что двухместная операция  $\varphi(x, y) \equiv h^{-1}[h(x) * h(y)]$  ассоциативна.

2. Построить ассоциативную, но не коммутативную двухместную операцию  $x * y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

3. Пусть  $h_t(x) = (1 - t)e^x + tx$ ,  $h_t^{-1}(x)$  — обратная функция  $h_t(x)$ . Показать, что функция  $\varphi_t(x, y) \equiv h_t^{-1}[h_t(x) h_t(y)]$  комму-

тативна и ассоциативна при  $0 \leq t \leq 1$ , а  $\varphi_0(x, y) \equiv x + y$ ,  $\varphi_1(x, y) \equiv xy$ .

4. Пусть  $A$  — функциональное множество,  $Q(A)$  — наименьшее замкнутое множество, такое, что  $A \subset Q(A)$  ( $Q(A)$  — замкнутая оболочка  $A$ ). Показать, что  $Q(A) = \mathfrak{M}(H)$ , где  $H$  — полная по отношению к  $A$  система функций из  $A$ . Показать, что при  $H \cap \bar{A} \neq \emptyset$   $Q(A) \subset \mathfrak{M}(H)$ . Привести примеры.

5. Пусть  $A_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — функциональные множества,  $H_i \subset A_i$  — соответствующие им полные системы. Показать, что

$$\bigcup_{i=1}^{i=m} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{i=m} \mathfrak{M}(H_i) \subset \mathfrak{M}\left(\bigcup_{i=1}^{i=m} H_i\right).$$

6. Функция  $\varphi(x_1, x_2)$  определяет ассоциативную двухместную операцию, если  $\varphi(x_1, \varphi(x_2, x_3)) \equiv \varphi(\varphi(x_1, x_2), x_3)$ . Аналогично функция  $\psi(x_1, x_2, x_3)$  определяет ассоциативную трехместную операцию, если  $\psi(\psi(x_1, x_2, x_3), x_4, x_5) \equiv \psi(x_1, \psi(x_2, x_3, x_4), x_5) \equiv \psi(x_1, x_2, \psi(x_3, x_4, x_5))$ . Привести пример трехместной ассоциативной операции, не прибегая к конструкции  $\psi(x_1, x_2, x_3) \equiv \varphi(x_1, \varphi(x_2, x_3))$ , где  $\varphi(x_1, x_2)$  — двухместная ассоциативная операция. Обобщить эти рассуждения для  $n$ -местных операций ( $n > 3$ ).

7. Построить базисы для множеств целых рациональных функций с целыми, рациональными и действительными коэффициентами.

## § 5. Машинный способ задания функций. Коммутативные диаграммы'

Аналитический способ задания функций, формализованный в предыдущем параграфе с помощью понятий суперпозиции и  $H$ -реализуемой функции, предполагает наличие некоторой системы функций  $H$ . Функции, входящие в  $H$ , также могут оказаться суперпозициями каких-то других функций, а те, в свою очередь, выражаться через еще более простые функции и т. д. Однако в любом случае приходим к некоторой «простейшей» системе  $H^0$ , которую надо будет задавать уже с помощью каких-то иных средств. Например, для множества  $C^R$  целых рациональных функций простейшей системой является

$$H_1 = \{x_1 + x_2; x_1 x_2; a, \forall a \in \mathbb{R}\}. \quad (1.16)$$

Символы операций, входящих в эту систему, могут быть поняты потому, что мы помним таблицы сложения и умножения, и знаем правила выполнения этих операций для любых  $x$  и  $y$ . Поэтому можно считать, что эти операции некоторым образом материализованы в нашем мозгу. Впрочем, можно представить их в виде блоков некоторых аналоговых устройств («функциональных преобразователей»), блоков ЭВМ, подпрограмм, таблиц, номограмм и т. д. Эти блоки будем условно

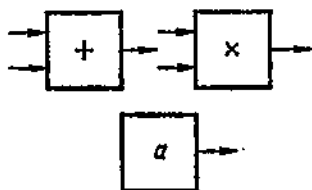


Рис. 9.

изображать так, как показано на рис. 9. Такой способ задания функций, независимо от способа его реализации, будем называть *машинным*. Из сказанного следует, что аналитическое задание функций возможно лишь при наличии некоторой системы функций, заданных машинным способом.

Используя изображение базисных функций в виде блоков, можно дать простую интерпретацию операции суперпозиции функций. Пусть базисная система состоит из трех функций

$$H = \{\varphi(x, y), \psi(x, y), f(x, y, z)\},$$

изображенных в виде блоков (рис. 10). Тогда, например, суперпозициям

$$\omega_1 = f[x, \varphi(x, y), \psi(z, t)];$$

$$\omega_2 = \varphi[f(x, x, z), \varphi(y, z)]$$

будут соответствовать две функциональные схемы, пока-

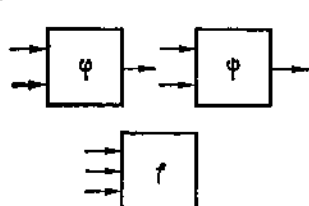
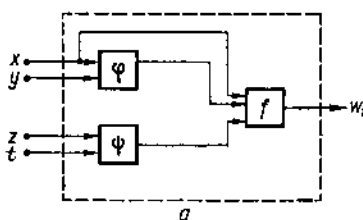


Рис. 10.

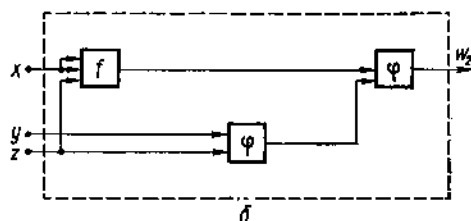


Рис. 11.

занные на рис. 11. Заметим, что если в некоторой схеме заменим входящие в нее элементарные блоки блоками, реализующими какие-то другие операции (с теми же аргументами, что и заменяемые), то получим функциональные схемы для формулы, имеющей эквивалентную структуру (см. § 4). Например, схема, показанная на рис. 11, а, при замене

$$\begin{pmatrix} f; & \varphi; & \psi \\ (x + y + z; & xy; & z^t) \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

становится схемой функции  $\omega_1 = x + xy + z^t$ .

Пусть теперь  $f[\varphi_1, \dots, \varphi_s]$  есть некоторая формула, построенная с помощью системы  $H = \{\varphi_i(x_{1i}, \dots, x_{n_i i})\}$ ,  $i = 1, \dots, s$ , а  $\Psi_i$  — некоторые множества функций вида  $\psi_i(x_{1i}, \dots, x_{n_i i})$ . Рассмотрим множество всевозможных замен вида

$$\begin{pmatrix} \varphi_1, \dots, \varphi_s \\ (\psi_1, \dots, \psi_s) \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

получаемых путем выбора элементов  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$  из множества  $\Psi_1 \times \dots \times \Psi_s$ . Такие замены приведут к образованию некоторого

функционального множества  $\mathfrak{F} = \{f[\psi_1, \dots, \psi_n]\}$ . Формулы, определяющие функции из  $\mathfrak{F}$ , имеют, очевидно, одинаковую структуру. Нетрудно заметить, что операция суперпозиции — самая дешевая с точки зрения технической реализации ее: ей соответствует простое соединение выходов и входов базисных блоков.

Если функции, входящие в систему  $H$ , обладают некоторой системой свойств, таких как коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность или каких-либо других, то можно осуществлять

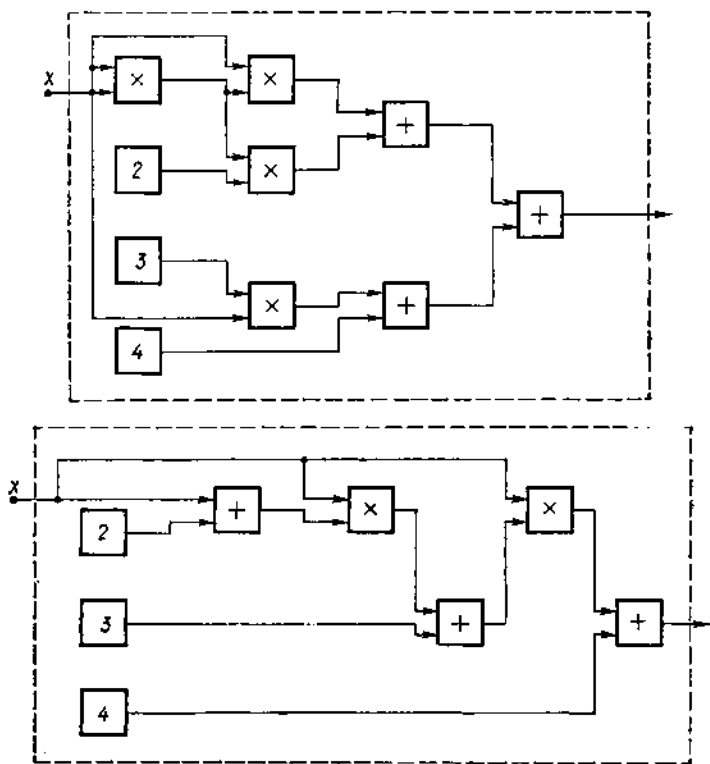


Рис. 12.

тождественные преобразования  $H$ -реализуемых функций и получать, вообще, различные формулы для одной и той же функции. Следовательно, для нее могут оказаться разными и функциональные схемы. Например, схемы для полинома  $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \equiv ((x + 2)x + 3)x + 4$  показаны на рис. 12, а, б (для формул  $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ ,  $((x + 2) + 3)x + 4$  соответственно). В то время как для блок-схемы, приведенной на рис. 12, а, понадобилось четыре блока умножения, для блок-схемы, показанной на рис. 12, б, — только два (при равном числе остальных блоков). На этом примере показана возможность упрощения на практике вычисли-

тельных устройств (например, с целью удешевления, повышения быстродействия и т. д.) на уровне тождественных преобразований.

Сказанное выше позволяет сформулировать следующую проблему минимизации суперпозиций. Пусть  $H = \{\varphi_i\}$ ,  $i \in I_0$  ( $I_0$  — некоторое множество индексов) — система отображений, а  $\beta_i$  — «стоимость» отображения  $\varphi_i$ . (Это могут быть стоимость изготовления блока, соответствующего  $\varphi_i$ , его быстродействие, накопление погрешностей при выполнении  $\varphi_i$  и др.) Всякой  $H$ -реализуемой функции  $f$  можно поставить в соответствие некоторое множество формул  $\{f_j\}$ ,  $j \in I_1$  ( $I_1$  — некоторое множество индексов), тожде-

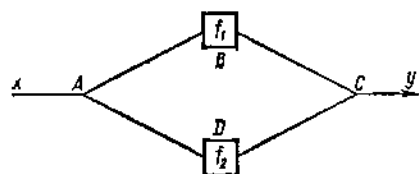


Рис. 13.

ственных  $f$ . Пусть  $n_i^j$  — количество блоков  $\varphi_i$  в формуле  $f_j$ . Тогда «стоимость»  $c_j$  формулы  $f_j$  определяется так:

$$c_j = \sum_{i \in I_0} n_i^j \beta_i. \quad (1.19)$$

Задача состоит в том, чтобы найти в множестве  $I_1$  такой индекс  $j = j_0$ , которому соответствовало бы наименьшее значение  $c_j$ , т. е. наименьшая стоимость определяется по формуле

$$c = \inf_{j \in I_1} c_j. \quad (1.20)$$

Сформулированная проблема в общем случае трудно разрешима. Для частных ситуаций она решается на основе накопленного опыта в проведении тождественных преобразований. (Вспомним, например, школьные задачи по алгебре и тригонометрии, которые начинаются словами «упростить выражение...»). Некоторые результаты по минимизации булевых функций будут приведены в § 10 настоящей главы.

Возможность представить одно и то же отображение  $f$  различными формулами  $f_1$  и  $f_2$  можно условно изобразить в виде диаграммы (рис. 13). Один и тот же образ  $y$  получится при движении входной информации (т. е.  $x$ ) по маршрутам  $ABC$  и  $ADC$ . Такого вида диаграммы принято называть *коммутативными* [62].

Отношение  $\beta$  между отображениями  $f_1$  и  $f_2$  (обозначим его  $f_1 \sim_{\beta} f_2$ ), задаваемое коммутативной диаграммой, является отношением эквивалентности [43]. Действительно, оно обладает следующими свойствами:

рефлексивностью —  $f \sim_{\beta} f \forall f \in \mathfrak{M}(H)$ ;

симметричностью — если  $f_1 \sim_{\beta} f_2$ , то  $f_2 \sim_{\beta} f_1$ ;

транзитивностью — если  $f_1 \sim_{\beta} f_2$ ,  $f_2 \sim_{\beta} f_3$ , то  $f_1 \sim_{\beta} f_3$ .

Таким образом, множество  $\mathfrak{M}(H)$   $H$ -реализуемых функций может быть разбито на классы эквивалентности по признаку эквивалентности коммутативных диаграмм.

*Упражнения и задачи.* 1. Доказать, что множество  $C^m(\mathbb{R}^n) (\forall n \in \mathbb{N})$   $m$  раз везде дифференцируемых функций (всевозможного



конечного числа аргументов) замкнуто. Верно ли это утверждение и при  $m = \infty$ ?

2. Доказать, что множество  $C^A(\mathbb{R}^n)$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) везде аналитических функций (т. е. раскладывающихся в ряд Тейлора с ненулевым радиусом сходимости в любой точке  $\mathbb{R}^n$ ) замкнуто.

3. Показать, что замкнутым множеством является множество  $e_n$   $n$  раз непрерывно дифференцируемых элементарных функций.

4. Построить полную систему в  $e_n$  (пример 3), содержащую конечное число функций (не считая констант из  $\mathbb{R}$ ).

5. Пусть  $\varphi_i \in C(\mathbb{R}^{n_i})$  ( $i = 1, \dots, s$ ), где  $C(\mathbb{R}^k)$  — множество всех непрерывных в  $\mathbb{R}^k$  функций. Пусть  $f$  есть суперпозиция функций  $\varphi_i$ , имеющая структуру  $f = \chi[\varphi_1(x_{11}, \dots, x_{n_1}), \dots, \varphi_s(x_{1s}, \dots, x_{n_s})]$ . Очевидно, что  $f$  как суперпозиция непрерывных функций есть непрерывная функция вида  $f(x_1, \dots, x_n)$ , где  $x_1, \dots, x_n$  получается из строки аргументов  $x_{11}, \dots, x_{n_1}, \dots, x_{1s}, \dots, x_{n_s}$  путем вычеркивания повторно встречающихся букв. Таким образом, приходим к отображению  $\chi^* : \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^n$  (где  $\chi^*(\mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_s}) \subset C(\mathbb{R}^n)$  — образ этого отображения), вполне определяемому структурой  $\chi$ .

Для каких структур  $\chi(\mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_s}) = C(\mathbb{R}^n)$ ? Привести пример структуры, для которой такое равенство не достижимо. Выяснить, в частности, всякая ли непрерывная функция  $f(x, y, z, t)$  может быть представлена в виде  $f(x, y, z, t) \equiv \varphi(x, \varphi(y, \varphi(z, t)))$ , где  $\varphi(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$ ? В упоминавшейся в § 4 (пример 2) 13 проблеме Гильберта речь шла о представлении непрерывных функций трех и большего числа аргументов в виде суперпозиций непрерывных функций двух аргументов; при этом разрешалось использовать формулы любой структуры. Здесь же ставится вопрос так: нельзя ли сократить множество структур, используемых для представления непрерывных функций трех и более аргументов через непрерывные функции двух аргументов? Может быть существует такая одна структура, которой будет достаточно для этой цели?

6. Вопросы, поставленные в задаче 5, могут быть перенесены и на другие функциональные классы ( $C^m(\mathbb{R}^n)$ ,  $H^s(\mathbb{R}^n)$  и др.).

## § 6. Функции алгебры логики

Алгебра логики — раздел дискретной математики, в котором рассматриваются правильные функции (в частности, алгебраические операции) вида  $F : B_k^n \rightarrow B_k^m$ , где  $B_k$  — множество, состоящее из конечного числа элементов. (Случай, когда  $k = \infty$  и множество  $B_\infty$  счетно, рассматривается сравнительно редко [194].) Верхние индексы  $n$  и  $m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , указывают на то, что рассматриваются соответствующие степени множества  $B_k$ , а нижний индекс  $k$  —

количество элементов в множестве  $B_k$ . (В дальнейшем в основном рассматривается случай, когда  $m = 1$ .) В качестве элементов, составляющих множество  $B_k$ , можно взять в принципе элементы любой природы и обозначать их любыми отличающимися друг от друга нероглифами. Так, например, в исчислении высказываний — разделе так называемой метаматематики или оснований математики [84], рассматривается множество  $B_2$ , состоящее всего лишь из двух элементов, которые часто обозначаются словами «ложь»

и «истина». В большинстве случаев полагают  $B_k = \{0; 1; 2; \dots; k-1\}$ .

Отображения указанного выше вида исторически впервые рассматривались в исчислении высказываний и это наложило свой отпечаток на терминологию, используемую в дискретной математике. В частности, упомянутые выше отображения были названы *функциями  $k$ -значной логики*, а при  $k = 2$  — *булевыми функциями* (по имени английского математика XIX ст. Дж. Буля, работами которого

положено начало развитию алгебры логики).

В булевой алгебре все величины (аргументы и функции) называются высказываниями. *Истинность* булевой переменной определяется значением 0 или 1 («ложь» или «истина»), которое оно может принимать.

Функции алгебры логики (особенно при  $k = 2$ ) широко применяются для решения задач описания, исследования и оптимизации релейно-контактных, пороговых и других схем, используемых в автоматике и вычислительной технике. Отсюда другое их название — *переключаемые функции*.

1. Приведем вначале общие сведения о функциях  $k$ -значной логики с алфавитом  $B_k = \{0; 1; \dots; k-1\}$ . В связи с тем что в дальнейшем будут одновременно рассматриваться как функции алгебры логики, так и функции обычных непрерывных аргументов, условимся для удобства обозначать первые большими латинскими буквами, а вторые — малыми.

В виду того что алфавит  $B_k$  состоит из конечного числа элементов, область определения функции  $F(X) : B_k^n \rightarrow B_k^m$ ,  $X = (X_1, \dots, X_n)$  всегда конечна. Нетрудно подсчитать, что она содержит  $\beta(n, k) = k^n$  различных точек  $X^i = (X_1^i, \dots, X_n^i)$  ( $i = 1, \dots, k^n$ ).

Таблица 1

$X_1 X_2 \dots X_{n-1} X_n$	$Y_1 Y_2 \dots Y_m$
0 0 ... 0 0	$Y_1^1 Y_2^1 \dots Y_m^1$
0 0 ... 0 1	$Y_1^2 Y_2^2 \dots Y_m^2$
...	...
0 0 ... 0 $k-1$	$Y_1^k Y_2^k \dots Y_m^k$
0 0 ... 1 0	$Y_1^{k+1} Y_2^{k+1} \dots Y_m^{k+1}$
0 0 ... 1 1	$Y_1^{k+2} Y_2^{k+2} \dots Y_m^{k+2}$
...	...
0 0 ... 1 $k-1$	$Y_1^{2k} Y_2^{2k} \dots Y_m^{2k}$
...	...
$k-1 k-1 \dots$ ... $k-1 k-1$	$Y_1^{k^n} Y_2^{k^n} \dots Y_m^{k^n}$

Действительно, каждому набору  $X_1^i, \dots, X_n^i$  можно поставить в соответствие  $n$ -разрядное число  $X_1^i X_2^i \dots X_n^i$   $k$ -ичной системы счисления (с цифрами  $0, 1, \dots, k-1$ ):

$$X_1^i X_2^i \dots X_n^i = X_1^i k^{n-1} + X_2^i k^{n-2} + \dots + X_{n-1}^i k + X_n^i. \quad (1.21)$$

Очевидно, что формула (1.21) определяет наименьшее число (а именно нуль), если  $X_1^i = X_2^i = \dots = X_n^i = 0$ , а наибольшее — если  $X_1^i = X_2^i = \dots = X_n^i = k-1$ . Это наибольшее число согласно (1.21) равно  $(k-1)(k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k + 1)$ . Всем остальным строкам  $X_1^i X_2^i \dots X_n^i$  соответствуют различные целые числа, заключенные между  $0$  и  $k^n - 1$ . Следовательно, всего имеется  $k^n$  различных точек  $X^i = (X_1^i, \dots, X_n^i)$ .

Сказанное выше позволяет ввести естественную нумерацию точек  $X^i = (X_1^i, \dots, X_n^i)$ , принадлежащих области определения функции  $k$ -значной логики  $Y = F(X) = F(X_1, \dots, X_n)$ , а именно: точка  $X^i$  имеет номер  $i$ , равный значению числа  $X_1^i X_2^i \dots X_n^i$   $k$ -ичной системы счисления. Таким образом, всякая функция  $k$ -значной логики  $F(X): B_k^n \rightarrow B_k^m$  может быть задана таблицей, содержащей  $\beta(n, k) = k^n$  строк. Очевидно, что  $i$ -й строке этой таблицы  $X_1^i X_2^i \dots X_n^i$  соответствует строка  $Y_1^i Y_2^i \dots Y_m^i$  координат точки  $Y^i = F(X^i)$  — образа точки  $X^i$  (табл. 1).

В каждом из столбцов  $\{Y_j^i\}$  ( $i = 1, \dots, k^n$ ) значения  $Y_j^i$  могут выбираться независимо друг от друга и эти столбцы также можно рассматривать как числа, записанные в  $k$ -ичной системе счисления, но уже  $k^n$ -разрядные. Следовательно, есть возможность выбирать в каждом столбце  $\beta(k^n, k) = k^{k^n}$  различных вариантов наборов значений  $Y_j^i$ . Поскольку значения, выбираемые в различных столбцах, также не зависят друг от друга, получаем

$$N(n, m, k) = k^{m k^n} \quad (1.22)$$

различных функций вида  $F: B_k^n \rightarrow B_k^m$ .

На первый взгляд может показаться, что в виду ограниченности чисел  $\beta(n, k)$  и  $N(n, m, k)$  можно свести изучение функций алгебры логики вида  $F: B_k^n \rightarrow B_k^m$  к рассмотрению соответствующих им таблиц. Однако такой путь нереален вследствие того, что количество функций  $k$ -значной логики быстро возрастает с ростом  $n$  и при относительно небольших значениях  $n$ , даже если  $k = 2, m = 1$ , достигает астрономических величин:

$n$	1	2	3	4	5
$N(n, 1, 2)$	4	16	256	65536	4294967296

Заметим, что в приложениях (в частности, тех, которые будут рассмотрены в данной работе) часто приходится рассматривать

функции алгебры логики, имеющие значительно большее число аргументов, чем пять. Это создает дополнительные трудности, так как соответствующие таблицы функций алгебры логики становятся громоздкими и трудно обозримыми.

В связи с тем что путь оперирования с таблицами функций алгебры логики оказывается не эффективным, возникает мысль о разработке аналитических методов их изучения.

Возможность аналитического подхода к изучению функций алгебры логики вытекает из рассмотренных в § 4, 5 результатов, относящихся к понятиям замкнутого множества функций, полной системы функций и  $H$ -реализуемых функций. Дело в том, что множество  $\mathfrak{F}(B_k)$  всех правильных функций с алфавитом  $B_k$  (т. е. множество всех функций  $k$ -значной логики произвольного числа аргументов), как и всякое другое такое множество с произвольным непустым алфавитом  $B_k$ , является замкнутым (суперпозиционно). Далее будет показано, что в множестве  $\mathfrak{F}(B_k)$  существуют конечные полные системы, содержащие небольшое число функций (даже одну!). Таким образом, если для функций, составляющих одну из таких систем, ввести некоторую символику, то в силу ее полноты в  $\mathfrak{F}(B_k)$ , откроется принципиальная возможность записывать любую функцию  $k$ -значной логики с помощью введенных символов (не считая символов независимых переменных и, возможно, открывающих и закрывающих скобок). Конечно, реализация этой возможности потребует создания специальных конструктивных средств и методик и именно им будет уделено основное внимание в § 7—15.

## § 7. Булевы функции одного и двух аргументов

Имеется  $N(n, 1, 2) = 2^{2^n}$  различных булевых функций вида  $F: B_2^n \rightarrow B_2$ . При  $n = 1$  получаем четыре функции, которые можно задать табл. 2.

Две из этих функций — тождественные константы:  $F_1 \equiv 0$ ,  $F_4 \equiv 1$ . (Значения этих функций не изменяются при изменении

Таблица 2

$X$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

аргумента  $X$ .) Функция  $F_2$  повторяет значения аргумента  $X$ , поэтому для нее естественно ввести обозначение  $F_2 \equiv X$ . И лишь функция  $F_3$  представляет собой нечто новое: она равна 1 при  $X = 0$  и равна 0 при  $X = 1$ . Эту функцию принято называть *отрицанием* и обозначать  $\bar{X}$  (иногда используются и

другие обозначения, например  $\neg X$ ;  $X'$ ).

В терминах исчисления высказываний функция «отрицание» описывается так: «Отрицание истины есть ложь, отрицание лжи есть истина».

Из определения операции  $\bar{X}$  следуют формулы

$$(\overline{\bar{X}}) \equiv \bar{\bar{X}} \equiv X; \quad \bar{1} \equiv 0; \quad \bar{0} \equiv 1. \quad (1.23)$$

Рассмотрим булевы функции двух аргументов. Есть  $N(2, 1, 2) = 2^{2^2} = 16$  различных булевых функций вида  $F: B_2^2 \rightarrow B_2$  (табл. 3). Две из функций ( $F_1$  и  $F_{16}$ ) — тождественные константы:  $F_1 \equiv 0$ ;  $F_{16} \equiv 1$ . Функции  $F_4$  и  $F_6$  повторяют значения аргументов  $X_1$  и  $X_2$  соответственно, т. е.  $F_4 \equiv X_1$ ,  $F_6 \equiv X_2$ . Функции  $F_{11}$  и

Таблица 3

$X_1$ $X_2$	0 0	0 1	1 0	1 1	Функция	
					Обозначение	Наименование
$F_1$	0	0	0	0	0	Константа 0
$F_2$	0	0	0	1	$X_1 \wedge X_2$	Конъюнкция
$F_3$	0	0	1	0	$X_1 \rightarrow X_2$	Отрицание импликации
$F_4$	0	0	1	1	$X_1$	Переменная $X_1$
$F_5$	0	1	0	0	$X_2 \rightarrow X_1$	Отрицание импликации (обратной)
$F_6$	0	1	0	1	$X_2$	Переменная $X_2$
$F_7$	0	1	1	0	$X_1 \approx X_2$	Отрицание равнозначности
$F_8$	0	1	1	1	$X_1 \vee X_2$	Дизъюнкция
$F_9$	1	0	0	0	$X_1 \vee X_2$	Отрицание дизъюнкции
$F_{10}$	1	0	0	1	$X_1 \sim X_2$	Равнозначность
$F_{11}$	1	0	1	0	$\bar{X}_2$	Отрицание $X_2$
$F_{12}$	1	0	1	1	$X_2 \rightarrow X_1$	Импликация (обратная)
$F_{13}$	1	1	0	0	$\bar{X}_1$	Отрицание $X_1$
$F_{14}$	1	1	0	1	$X_1 \rightarrow X_2$	Импликация
$F_{15}$	1	1	1	0	$X_1 / X_2$	Операция Шеффера
$F_{16}$	1	1	1	1	1	Константа 1

$F_{13}$  представляют собой отрицания аргументов  $X_2$  и  $X_1$ , т. е.  $F_{11} \equiv \bar{X}_2$ ,  $F_{13} \equiv \bar{X}_1$ . Остальные 10 булевых функций встречаются впервые.

Функция  $F_2$  называется конъюнкцией или логическим умножением. Для нее будем использовать обозначение  $F_2 \equiv X_1 \wedge X_2$  (читается: « $X_1$  и  $X_2$ »). Другие принятые обозначения  $F_2 \equiv X_1 X_2$  и  $F_2 \equiv X_1 \& X_2$  здесь использоваться не будут. Дело в том, что в дальнейшем операция конъюнкции будет встречаться одновременно с операцией обычного умножения и применение обозначения  $X_1 X_2$  может привести к путанице. Что касается символа  $X_1 \& X_2$ , то его применение нарушит симметрию ряда рассмотренных в дальнейшем формул.

В терминах исчисления высказываний конъюнкция может быть описана следующим образом: «Утверждение  $X_1 \wedge X_2$  является истинным тогда и только тогда, когда истинны утверждения  $X_1$  и  $X_2$ ». Заметим, что  $X_1 \wedge X_2 = \min(X_1, X_2)$ .

Функция  $F_8$  называется *дизъюнкцией* или *логическим сложением* и обозначается  $F_8 \equiv X_1 \vee X_2$  (читается: « $X_1$  или  $X_2$ »). Для дизъюнкции часто используется обозначение  $X_1 + X_2$ , которое здесь, однако, ввиду сказанного выше относительно обозначения  $X_1 X_2$  для конъюнкции применяться не будет. Из табл. 3 видно, что дизъюнкция  $X_1 \vee X_2$  равна единице, если хотя бы один из ее аргументов равен 1, и равна нулю, если  $X_1 = X_2 = 0$ . (В отличие от дизъюнкции конъюнкция  $X_1 \wedge X_2$  равна 1, только если оба ее аргумента равны 1.) Другими словами,  $X_1 \vee X_2$  есть истина тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний  $X_1$  или  $X_2$  является истинным. Для  $X_1 \vee X_2$  верна формула  $X_1 \vee X_2 = \max(X_1, X_2)$ .

Функция  $F_{10}$  называется *равнозначностью* или *эквиваленцией* и обозначается  $F_{10} \equiv X_1 \sim X_2$  (читается: « $X_1$  равнозначно  $X_2$ »). Эта функция равна единице тогда и только тогда, когда оба ее аргумента совпадают. (На языке исчисления высказываний утверждения «ложь равнозначна лжи», «истина равнозначна истине» — истинны; утверждения «ложь равнозначна истине», «истина равнозначна лжи» — ложны.)

Функция  $F_{14}$  называется *импликацией* и обозначается  $F_{14} \equiv X_1 \rightarrow X_2$  (читается: «если  $X_1$ , то  $X_2$ », или «из  $X_1$  следует  $X_2$ »). Импликация равна единице всегда, за исключением случая, когда  $X_1 = 1$ ;  $X_2 = 0$ . (Утверждения «из лжи следует ложь», «из лжи следует истина» и «из истины следует истина» — истинны; утверждения «из истины следует ложь» — ложно).

Функция  $F_{15}$  называется *операцией Шеффера* и обозначается  $F_{15} \equiv X_1 / X_2$  (читается: « $X_1$  черта  $X_2$ »). Эта операция приводит к значению ноль только в одном единственном случае, когда  $X_1 = X_2 = 1$ . Нетрудно заметить, что  $X_1 / X_2 \equiv \overline{X_1 \wedge X_2}$ , т. е. является отрицанием конъюнкции.

Функция  $F_8$  представляет собой *отрицание равнозначности*  $F_{10}$ , т. е.  $F_8 \equiv \overline{F_{10}} \equiv \overline{X_1 \sim X_2}$ . Эту функцию называют также сложением по модулю два или строгой дизъюнкцией. Для этой операции будем использовать обозначение  $X_1 \approx X_2$ . Иногда применяются обозначения  $X_1 \vee \vee X_2$ ;  $X_1 + X_2$  и др. В данной работе в основном будем использовать первое из этих обозначений. Подобно операции Шеффера и отрицанию равнозначности остальные булевы функции двух аргументов могут быть получены в результате применения к уже рассмотренным функциям операции отрицания.

Действительно, из табл. 3 значений булевых функций двух аргументов легко установить справедливость следующих формул:

$$\overline{F_{8-i}} \equiv F_{9+i}; \quad \overline{F_{9+i}} = F_{8-i}, \quad i = 0, 1, \dots, 7. \quad (1.24)$$

Отсюда можно получить выражения для  $F_8$ ,  $F_5$ ,  $F_9$ , которые приведены в табл. 3.

Располагая некоторой системой  $H = \{F_i\}$ , составленной из числа рассмотренных выше булевых функций, для которых введена символика, можем (если  $H$  содержит хотя бы одну двухместную

функцию) записать формулы для более сложных булевых функций произвольного числа аргументов. Примерами формул, построенных с помощью рассмотренных булевых функций одного и двух аргументов, являются

$$(X_1 \rightarrow \bar{X}_2) \wedge X_2; \quad \overline{(X_1 \wedge X_2)} \sim (X_1 / X_2); \quad (X_1 \vee \bar{X}_2) \wedge X_3. \quad (1.25)$$

Пользуясь табл. 2 и 3, легко осуществить переход от задания булевой функции посредством формулы к ее таблице. При этом необходимо помнить, что, как и в обычной алгебре, одноместные операции имеют приоритет перед двухместными при определении очередности их выполнения. Все двухместные операции будем считать равноценными и в связи с этим заключать их в скобки (кроме последней выполняемой операции, которую можно и не заключать в скобки). Например, формула  $X_1 \rightarrow X_2 \wedge X_3$  может толковаться либо как  $(X_1 \rightarrow X_2) \wedge X_3$ , либо как  $X_1 \rightarrow (X_2 \wedge X_3)$ , и поэтому запись  $X_1 \rightarrow X_2 \wedge X_3$  будем считать недопустимой; формулы  $((X_1 \rightarrow X_2) \wedge X_3)$  и  $(X_1 \rightarrow X_2) \wedge X_3$  — эквивалентны. (Естественно, если некоторая булева операция  $X_1 * X_2$  ассоциативна, то при повторном ее применении скобки также можно опускать.) Например,

$$\begin{aligned} X_1 * (X_2 * X_3) &\equiv (X_1 * X_2) * X_3 \equiv X_1 * X_2 * X_3; \\ (X_1 * X_2) * (\bar{X}_3 * X_4) &\equiv X_1 * X_2 * \bar{X}_3 * X_4. \end{aligned} \quad (1.26)$$

**Пример.** Построить таблицу булевой функции  $Y \equiv (X_1 \rightarrow X_2) \wedge \bar{X}_3$ . Поскольку это функция трех аргументов, ее таблица должна содержать  $2^3 = 8$  строк. Согласно табл. 2 и 3 последовательно получаем

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1 \rightarrow X_2$	$\bar{X}_3$	$(X_1 \rightarrow X_2) \wedge \bar{X}_3$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Множество  $\mathfrak{M}(H)$   $H$ -реализуемых функций (т. е. всех суперпозиций  $H$ ), очевидно, является замкнутым множеством и  $\mathfrak{M}(H) \subset \mathfrak{F}(B_2)$ . Однако может оказаться, что  $\mathfrak{M}(H) \neq \mathfrak{F}(B_2)$  и, следовательно, в этом случае  $H$  не полная система булевых функций. Более того, заранее неизвестно, образуют ли полную систему все булевы функции двух аргументов (в частности, булевы функции одного аргумента также входят в их число)? Ответ на этот вопрос будет дан в следующем параграфе.

*Упражнения и задачи.* 1. Построить таблицы булевых функций  $Y_1 \equiv (\bar{X}_1 \rightarrow X_2) \sim (X_1 \wedge X_2)$ ;  $Y_2 \equiv ((X_1 / X_2) / X_3) \rightarrow X_1$   
 $Y_3 \equiv ((\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2) \vee \bar{X}_3) \sim X_2$ .

2. Доказать, построив таблицы булевых функций  $Y_1 \equiv (X_1 \rightarrow \rightarrow X_2) \wedge \bar{X}_3$ ;  $Y_2 \equiv ((\bar{X}_1 \wedge 1) \vee (X_1 \wedge X_2)) \wedge \bar{X}_3$ , что  $Y_1 \equiv Y_2$ .

3. Формула исчисления высказываний (именуемая также *пропозициональной формулой* [84]) называется *тавтологией*, если она истинна независимо от значений истинности своих аргументов (т. е. входящих в нее пропозициональных букв). Показать, что булевы функции  $(\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2) \vee (X_1 \wedge X_2)$ ;  $(X_1 \wedge \bar{X}_2) \rightarrow X_1$  как функции исчисления высказываний являются тавтологиями.

4. Пусть  $Y_1$  и  $Y_2$  — некоторые булевы функции. Используя табл. 3, показать, что если  $Y_1$  и  $Y_1 \rightarrow Y_2$  — тавтологии, то  $Y_2$  — также тавтология.

5. Доказать, что конъюнкция  $X_1 \wedge X_2$ , дизъюнкция  $X_1 \vee X_2$ , равнозначность  $X_1 \sim X_2$  и отрицание равнозначности  $X_1 \approx X_2$  являются коммутативными и ассоциативными операциями. (См. упражнение 2 § 1).

6. Подсчитать количество различных булевых функций шести аргументов.

## § 8. Свойства булевых функций двух аргументов. Конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы

В § 1 отмечалось, что свойства  $1^\circ$ — $19^\circ$ , установленные для логических операций пересечения  $A \cap B$ , соединения  $A \cup B$  и дополнения  $\bar{A}$  над множествами, тождественны, т. е. верны для всяких множеств. В частности, предположим, что унитарное множество  $I$  состоит всего лишь из одного элемента, который обозначим символом «1», а пустое множество — символом «0». Тогда каждое из множеств  $A, B, \dots \subset I$  может быть либо 1, либо 0. Поэтому для операций  $\cap, \cup$  получаем таблицы

$A$	$\bar{A}$	$A$	$B$	$A \cap B$	$A \cup B$
0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
		1	0	0	1
		1	1	1	1

Нетрудно заметить, что таблица для  $\bar{A}$  совпадает с таблицей для булевой операции отрицания, а таблицы для  $A \cap B$  и  $A \cup B$  — с таблицами для конъюнкции и дизъюнкции соответственно. Таким образом, свойства  $1^\circ$ — $19^\circ$  (см. § 1) справедливы и для булевых функций  $X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2, \bar{X}$ . Эти свойства в символах булевых функций приведены ниже с сохранением прежних наименований, которые в терминах исчисления высказываний приобретают новое «логическое» содержание.

1. Коммутативность:

$$1^\circ) X_1 \wedge X_2 \equiv X_2 \wedge X_1;$$

$$2^\circ) X_1 \vee X_2 \equiv X_2 \vee X_1.$$



II. Ассоциативность:

$$3^\circ) X_1 \wedge (X_2 \wedge X_3) \equiv (X_1 \wedge X_2) \wedge X_3;$$

$$4^\circ) X_1 \vee (X_2 \vee X_3) \equiv (X_1 \vee X_2) \vee X_3.$$

III. Дистрибутивность:

$$5^\circ) X_1 \wedge (X_2 \vee X_3) \equiv (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3);$$

$$6^\circ) X_1 \vee (X_2 \wedge X_3) \equiv (X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_3).$$

IV. Идемпотентность:

$$7^\circ) X \wedge X \equiv X;$$

$$8^\circ) X \vee X \equiv X.$$

V. Закон двойного отрицания:

$$9^\circ) \overline{\overline{X}} = X.$$

VI. Правила де Моргана:

$$10^\circ) \overline{X_1 \wedge X_2} = \overline{X_1} \vee \overline{X_2};$$

$$11^\circ) \overline{X_1 \vee X_2} = \overline{X_1} \wedge \overline{X_2}.$$

VII. Закон логического противоречия:

$$12^\circ) X \wedge \overline{X} \equiv 0.$$

VIII. Закон исключенного третьего:

$$13^\circ) X \vee \overline{X} \equiv 1.$$

IX. Операции с константами:

$$14^\circ) 1 \wedge X \equiv X; \quad 17^\circ) 0 \vee X \equiv X;$$

$$15^\circ) 1 \vee X \equiv 1; \quad 18^\circ) \overline{1} \equiv 0;$$

$$16^\circ) 0 \wedge X \equiv 0; \quad 19^\circ) \overline{0} \equiv 1.$$

В § 3 показано, что инвариантность свойств  $1^\circ$ — $19^\circ$  операций  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $\overline{A}$  относительно замены  $\cap$  на  $\cup$ ,  $\cup$  на  $\cap$ ,  $\emptyset$  на  $1$  и  $1$  на  $\emptyset$  приводит к справедливости принципа двойственности. Совпадение свойств  $1^\circ$ — $19^\circ$  настоящего параграфа со свойствами  $1^\circ$ — $19^\circ$  § 1 означает, что принцип двойственности верен и для булевых функций. А именно из всякого тождества

$$F(X_1, \dots, X_n) \equiv \Phi(X_1, \dots, X_n),$$

где  $F$  и  $\Phi$  — некоторые булевы функции, построенные с помощью операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, следует двойственное тождество

$$F_1(X_1, \dots, X_n) \equiv \Phi_1(X_1, \dots, X_n), \quad (1.27)$$

полученное путем замены в (1.26) символов  $\wedge$  на  $\vee$ ,  $\vee$  на  $\wedge$ ,  $0$  на  $1$  и  $1$  на  $0$ . Примерами двойственных тождеств являются

тождества 10° и 11° (правила де Моргана), 3° и 4° (законы ассоциативности) и др.

Благодаря тому что конъюнкция и дизъюнкция являются ассоциативными операциями, при многократном применении каждой из них можно опускать промежуточные скобки, например  $(X_1 \wedge \bar{X}_2) \wedge (X_3 \wedge X_4) \equiv X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge X_3 \wedge X_4$ .

Применяется также сокращенная запись

$$X_1 \wedge \dots \wedge X_n \equiv \bigwedge_{i=1}^{i=n} X_i; \quad (1.28)$$

$$X_1 \vee \dots \vee X_n \equiv \bigvee_{i=1}^{i=n} X_i.$$

Отметим свойства некоторых других функций.

Для операций равнозначности  $X_1 \sim X_2$  (и отрицания равнозначности  $X_1 \approx X_2$ ) справедливы коммутативный и ассоциативный законы:

$$20^\circ) X_1 \sim X_2 \equiv X_2 \sim X_1;$$

$$21^\circ) X_1 \approx X_2 \equiv X_2 \approx X_1;$$

$$22^\circ) (X_1 \sim X_2) \sim X_3 \equiv X_1 \sim (X_2 \sim X_3);$$

$$23^\circ) (X_1 \approx X_2) \approx X_3 \equiv X_1 \approx (X_2 \approx X_3).$$

Очевидны также формулы

$$24^\circ) \bar{X}_1 \sim \bar{X}_2 \equiv X_1 \sim X_2;$$

$$25^\circ) \bar{X}_1 \approx \bar{X}_2 \equiv X_1 \approx X_2.$$

Справедливы дистрибутивные законы для конъюнкции относительно отрицания равнозначности и для дизъюнкции относительно равнозначности:

$$26^\circ) X_1 \wedge (X_2 \approx X_3) \equiv (X_1 \wedge X_2) \approx (X_1 \wedge X_3);$$

$$27^\circ) X_1 \vee (X_2 \sim X_3) \equiv (X_1 \vee X_2) \sim (X_1 \vee X_3).$$

Для обозначений  $X_1 \wedge X_2 \equiv X_1 X_2$  и  $X_1 \approx X_2 \equiv X_1 + X_2$ , свойство 26° принимает вид распределительного закона обычной алгебры:

$$X_1 (X_2 + X_3) \equiv (X_1 X_2) + (X_1 X_3). \quad (1.29)$$

Если условиться, что конъюнкция  $X_1 X_2$  должна выполняться раньше отрицания равнозначности (т. е. сложения по mod 2)  $X_1 + X_2$ , то формулу (1.29) можно переписать в виде

$$X_1 (X_2 + X_3) \equiv X_1 X_2 + X_1 X_3. \quad (1.30)$$

Учитывая, что свойства ассоциативности 23° и 3° можно переписать соответственно в виде

$$\begin{aligned} (X_1 + X_2) + X_3 &\equiv X_1 + X_2 + X_3; \\ (X_1 X_2) X_3 &\equiv X_1 X_2 X_3, \end{aligned} \quad (1.31)$$

получаем возможность писать в булевой алгебре формулы вида

$$F \equiv A_{00\dots 0} + A_{10\dots 0}X_1^{\alpha_1} + \dots + A_{00\dots 01}X_n^{\alpha_n} + A_{10\dots 0}X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2} + \dots + A_{11\dots 1}X_1^{\gamma_1}X_2^{\gamma_2} \dots X_n^{\gamma_n} \quad (\sigma_i, \alpha_i, \dots, \gamma_k \in B_2), \quad (1.32)$$

которые принято называть полиномами Жегалкина. Здесь  $A_{i_1\dots i_n}$  — булевы постоянные,  $X^0 \equiv \bar{X}$ ;  $X^1 \equiv X$ . В частности, функции вида

$$A_0 + A_1X_1^{\sigma_1} + \dots + A_nX_n^{\sigma_n} \quad (1.33)$$

называются *линейными булевыми функциями*.

*Замечание 1.* Очевидно, что суперпозиция функций вида (1.33) есть функция вида (1.33). Поэтому множество  $L$  всех линейных булевых функций суперпозиционно замкнуто.

Конъюнкции вида  $X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge X_3$ ;  $X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4$ ;  $\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge X_3$ , т. е. конъюнкции, составленные из аргументов или их отрицаний, принято называть *элементарными конъюнкциями*, а формулы вида  $X_1 \vee X_2 \vee X_3$ ,  $\bar{X}_1 \vee X_2$  и т. п. — *элементарными дизъюнкциями*. Аргументы и их отрицания (т. е.  $X_1, \bar{X}_2, \dots$ ) будем относить к числу как элементарных конъюнкций, так и элементарных дизъюнкций.

**Определение 1.** *Всякая дизъюнкция конечного числа элементарных конъюнкций называется дизъюнктивной нормальной формой д. н. ф.), а всякая конъюнкция элементарных дизъюнкций — конъюнктивной нормальной формой к. н. ф.).*

Нетрудно заметить, что преобразование двойственности переводит всякую д. н. ф. в к. н. ф., и наоборот. Поэтому в силу принципа двойственности достаточно ограничиться изучением д. н. ф. Полученные при этом результаты вследствие принципа двойственности автоматически могут быть перенесены на к. н. ф. Примерами д. н. ф. являются формулы

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\bar{X}_2 \wedge X_3) \vee X_1; \quad (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge X_3); \quad X_1 \vee \bar{X}_1.$$

Рассмотрим вначале вопрос о представлении булевых функций в виде д. н. ф.: всегда ли это возможно и если возможно, то как его осуществить?

Введем обозначение

$$X^\sigma = \begin{cases} X & \text{при } \sigma = 1, \\ \bar{X} & \text{при } \sigma = 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Нетрудно видеть, что  $X^\sigma$  есть булева функция вида  $\Phi(X, \sigma)$ , совпадающая с  $X$  при  $\sigma = 1$  и с  $\bar{X}$  при  $\sigma = 0$ . Таблица этой булевой функции имеет вид

$X$	0	0	1	1
$\sigma$	0	1	0	1
$X^\sigma$	1	0	0	1

Нетрудно заметить, что функция  $X^\sigma$  совпадает с равнозначностью:  $X^\sigma \equiv X \sim \sigma$  и, кроме того,

$$0^\sigma \equiv \bar{\sigma}; \quad 1^\sigma \equiv \sigma. \quad (1.35)$$

Таким образом,  $X^Y$  можно рассматривать просто как другой символ равнозначности  $X \sim Y$ , оказавшийся удобным при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 1** (о разложении булевой функции). Каждую булеву функцию  $Y = F(X_1, \dots, X_n)$ ,  $n \geq 1$ , можно представить в виде

$$F \equiv \bigvee_{i=1}^{i=q} \left[ \bigwedge_{j=1}^{j=k} X_j^{\sigma_j^{(i)}} \wedge F(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_k^{(i)}, X_{k+1}, \dots, X_n) \right], \quad (1.36)$$

где  $q = 2^k$ , причем разным индексам  $i$  соответствуют различные наборы  $\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_k^{(i)}$ .

Такое разложение функции  $F(X_1, \dots, X_n)$  называется разложением ее по аргументам  $X_1, \dots, X_k$ .

**Доказательство.** Нетрудно заметить, что конъюнкция  $X_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge X_k^{\sigma_k}$  равна единице тогда и только тогда, когда  $X_1 = \sigma_1, \dots, X_k = \sigma_k$ . Из приведенной выше таблицы для  $X^\sigma$  следует, что  $X^\sigma = 0$ , если  $X \neq \sigma$ , и  $X^\sigma = 1$ , если  $X = \sigma$ . Следовательно, выражение, стоящее в квадратных скобках формулы 1.36), равняется нулю при любых наборах  $\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_k^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2^k$ , за исключением того, для которого  $\sigma_1^{(i)} = X_1, \dots, \sigma_k^{(i)} = X_k$ . Для этого набора имеем

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{j=1}^{j=k} X_j^{\sigma_j^{(i)}} \wedge F(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_k^{(i)}, X_{k+1}, \dots, X_n) \equiv \\ & \equiv \bigwedge_{j=1}^{j=k} X_j^{X_j} \wedge F(X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n) \equiv \\ & \equiv 1 \wedge F(X_1, \dots, X_n) \equiv F(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Следовательно, формула (1.36) принимает вид

$$F(X_1, \dots, X_n) \equiv 0 \vee 0 \vee \dots \vee 0 \vee F(X_1, \dots, X_n) \vee \\ \vee 0 \vee 0 \vee \dots \vee 0$$

и согласно свойству 17° является тождеством.

**Пример.** Разложим функцию  $Y = (\bar{X}_1 \sim X_2) \rightarrow (X_2 \wedge \bar{X}_3)$  по переменным  $X_1, X_2$ . Согласно формуле (1.36) получаем

$$\begin{aligned} Y \equiv & \{X_1^0 \wedge X_2^0 \wedge \{(\bar{0} \sim 0) \rightarrow (0 \wedge \bar{X}_3)\}\} \vee \{X_1^0 \wedge X_2^1 \wedge \{(\bar{0} \sim 1) \rightarrow (1 \wedge \\ & \wedge \bar{X}_3)\}\} \vee \{X_1^1 \wedge X_2^0 \wedge \{(\bar{1} \sim 0) \rightarrow (0 \wedge \bar{X}_3)\}\} \vee \\ & \vee \{X_1^1 \wedge X_2^1 \wedge \{(\bar{1} \sim 1) \rightarrow (1 \wedge \bar{X}_3)\}\}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Так как

$$\bar{0} \sim 0 \equiv 1 \sim 0 \equiv 0; \quad 0 \wedge \bar{X}_3 \equiv 0; \quad \bar{0} \sim 1 \equiv 1 \sim 1 \equiv 1; \quad 1 \wedge \bar{X}_3 \equiv \bar{X}_3;$$

$$\bar{1} \sim 0 \equiv 0 \sim 0 \equiv 1; \quad \bar{1} \sim 1 \equiv 0 \sim 1 \equiv 0; \quad X_i^0 \equiv \bar{X}_i; \quad X_i^1 \equiv X_i \quad (i=1, 2),$$

формулу (1.37) можно преобразовать к виду

$$Y \equiv \{\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge (0 \rightarrow 0)\} \vee \{\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge (1 \rightarrow \bar{X}_2)\} \vee \\ \vee \{X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge (1 \rightarrow 0)\} \vee \{X_1 \wedge X_2 \wedge (0 \rightarrow \bar{X}_3)\}.$$

Учитывая, что  $0 \rightarrow 0 \equiv 1$ ;  $1 \rightarrow 0 \equiv 0$ ;  $1 \rightarrow \bar{X}_3 \equiv \bar{X}_3$ ;  $0 \rightarrow \bar{X}_3 \equiv 1$ , получаем

$$Y \equiv (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge 1) \vee (\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge 0) \vee \\ \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge 1) \equiv (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (X_1 \wedge X_2).$$

*Следствие.* Всякая булева функция может быть представлена в дизъюнктивной нормальной форме.

Для осуществления этого представления достаточно в формуле (1.36) положить  $k = n$ , т. е. разложить функцию  $F(X_1, \dots, X_n)$  по всем аргументам. В результате получим

$$F(X_1, \dots, X_n) \equiv \bigvee_{i=1}^{i=2^n} \{(X_1^{\sigma_1^{(i)}} \wedge \dots \wedge X_n^{\sigma_n^{(i)}}) \wedge \\ \wedge F(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_n^{(i)})\}. \quad (1.38)$$

Поскольку  $F(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_n^{(i)})$  есть значение функции  $F$  на фиксированном наборе  $\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_n^{(i)}$  значений аргументов, оно равно либо нулю, либо единице. Согласно свойствам 14°—17° те из выражений в квадратных скобках формулы (1.38), которые содержат  $F(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_n^{(i)}) \equiv 0$ , будут тождественно равны нулю и могут быть опущены, а те, которые содержат  $F(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_n^{(i)}) \equiv 1$ , будут равны  $X_1^{\sigma_1^{(i)}} \wedge \dots \wedge X_n^{\sigma_n^{(i)}}$ . Поэтому формулу (1.38) можно переписать в виде

$$F(X_1, \dots, X_n) \equiv \bigvee_{F(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_n^{(i)})=1} (X_1^{\sigma_1^{(i)}} \wedge \dots \wedge X_n^{\sigma_n^{(i)}}), \quad (1.39)$$

где операция  $\bigvee$  производится над всеми элементарными конъюнкциями, для которых  $F(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_n^{(i)}) = 1$ .

Согласно принципу двойственности легко получаем представление булевой функции в конъюнктивной нормальной форме:

$$F(X_1, \dots, X_n) \equiv \bigwedge_{F(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_n^{(i)})=0} (X_1^{\bar{\sigma}_1^{(i)}} \vee \dots \vee X_n^{\bar{\sigma}_n^{(i)}}). \quad (1.40)$$

(При переходе от формулы (1.39) к формуле (1.40) была выполнена замена символов  $\bigwedge$  на  $\bigvee$ ,  $\bigvee$  на  $\bigwedge$ , констант  $\sigma_k^{(i)}$  и  $F(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_n^{(i)})$  — на их отрицания.)

Формулы (1.39), (1.40) указывают на простые правила перехода от табличного задания булевых функций к представлению их соот-

ответственно д. н. ф. и к. н. ф. Так, чтобы получить д. н. ф., надо отметить те наборы значений аргументов, которым соответствует значение функции, равное единице, и взять дизъюнкцию соответствующих этим наборам элементарных конъюнкций, в которых единицы заменяются соответствующими аргументами, а нули — их отрицаниями. (Наборы, на которых булева функция равна нулю, вообще можно исключить из рассмотрения.) Для получения к. н. ф. принимаются во внимание лишь те наборы значений аргументов, на которых булева функция равна нулю, и строится конъюнкция элементарных дизъюнкций. В последних нулям соответствуют аргументы без отрицаний, а единицам — с отрицаниями.

Вопрос о том, какой из нормальных форм — дизъюнктивной или конъюнктивной — отдать предпочтение при переходе от табличного задания булевой функции к аналитическому, обычно решается так: если в таблице значений булевой функции преобладают единицы, то строят д. н. ф., если нули — то к. н. ф. Такой подход обеспечивает получение более простых аналитических формул.

**Пример.** Представим в аналитическом виде функцию, заданную таблицей

$X_1$	0	0	0	0	1	1	1	1
$X_2$	0	0	1	1	0	0	1	1
$X_3$	0	1	0	1	0	1	0	1
$F$	1	0	0	0	1	1	0	0

Используя первый, пятый и шестой столбцы, получаем

$$F \equiv (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge X_3). \quad (1.41)$$

Для этой функции к. н. ф. имеет вид

$$F \equiv (X_1 \vee X_2 \vee \bar{X}_3) \wedge (X_1 \vee \bar{X}_2 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \bar{X}_2 \vee \bar{X}_3) \wedge (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee X_3) \wedge (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee \bar{X}_3). \quad (1.42)$$

Заметим, что поскольку формулы (1.41) и (1.42) представляют одну и ту же функцию, то они тождественно равны между собой: от одной формы можно перейти к другой с помощью тождественных преобразований, основанных на использовании свойств  $1^\circ$ — $19^\circ$ .

Нетрудно заметить, что если к булевой функции

$$F(X_1, \dots, X_n) \equiv \bigvee_{i=1}^{i=m} (X_1^{a_i} \wedge \dots \wedge X_n^{a_{ni}}), \quad (1.43)$$

представленной в д. н. ф., применим операцию отрицания, одновременно заменив также  $X_i$  на  $\bar{X}_i$ , то получим функцию

$$\overline{F(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)} \equiv \bar{F}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^{i=m} (X_1^{a_i} \vee \dots \vee X_n^{a_{ni}}), \quad (1.44)$$

двойственную функции  $F(X_1, \dots, X_n)$  (это следует из правил де Моргана  $10^\circ$ ,  $11^\circ$  и закона двойного отрицания  $9^\circ$ ). Аналогичная операция выполнима и для к. н. ф.

Поскольку согласно следствию теоремы 1 всякую булеву функцию можно представить в виде д. н. ф. (и к. н. ф.), сказанное выше позволяет дать общую формулировку понятия двойственности для булевых функций.

**Определение 2.** Функция  $F^*(X_1, \dots, X_n)$ , полученная путем применения к булевой функции  $F(X_1, \dots, X_n)$  операции отрицания и замены аргументов  $X_i$  их отрицаниями  $\bar{X}_i$ , называется двойственной к  $F(X_1, \dots, X_n)$ . (Очевидно, что в силу закона двойного отрицания  $F(X_1, \dots, X_n)$  двойственна к  $F^*(X_1, \dots, X_n)$ .)

**Определение 3.** Если  $F(X_1, \dots, X_n) \equiv F^*(X_1, \dots, X_n)$ , то булева функция  $F(X_1, \dots, X_n)$  называется самодвойственной.

**Теорема 2** (принцип двойственности для булевых функций). Если выполнено тождество

$$F(X_1, \dots, X_n) \equiv \Phi(X_1, \dots, X_n), \quad (1.45)$$

то справедливо также тождество

$$F^*(X_1, \dots, X_n) \equiv \Phi^*(X_1, \dots, X_n). \quad (1.46)$$

Доказательство очевидно.

**Следствие.** Если  $F(X_1, \dots, X_n)$  представлена в виде формулы  $F = X[\Phi_1, \dots, \Phi_m]$ , то двойственная функция  $F^*(X_1, \dots, X_n)$  может быть представлена в виде формулы  $F^* = X^*[\Phi_1^*, \dots, \Phi_m^*]$ , где  $X^*$  — двойственная к  $X$ .

**Упражнения и задачи.** 1. Булева функция  $Y = F(X_1, X_2, X_3, X_4)$  равна единице на трех наборах аргументов:  $(0, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0, 0)$  и  $(1, 1, 1, 1)$ . Написать для нее д. н. ф.

2. Булева функция  $Y = F(X_1, X_2, X_3)$  равна нулю тогда и только тогда, когда четное число ее аргументов равно нулю. Построить для нее д. н. ф. и к. н. ф.

3. Построить самодвойственную функцию  $F(X_1, X_2, X_3)$ .

4. Есть ли самодвойственные функции среди булевых функций двух аргументов?

5. Для каких  $n$  существуют самодвойственные булевы функции  $F(X_1, \dots, X_n)$ , существенно зависящие от всех своих аргументов, и какое их количество? (см. упражнение 1 § 9.)

## § 9. Полные системы булевых функций

1. Возможность представления всякой булевой функции в виде дизъюнктивной (или конъюнктивной) нормальной формы свидетельствует о том, что система

$$H = \{X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2, \bar{X}\} \quad (1.47)$$

является полной в множестве булевых функций, т. е.

$$\mathfrak{M}(H) = \mathfrak{F}(B_2), \quad (1.48)$$

где  $\mathfrak{M}$  — множество всех  $H$ -реализуемых функций (§ 4), а  $\mathfrak{F}(B_2)$  — множество всех булевых функций (т. е. правильных функций с алфавитом  $B_2 = \{0, 1\}$ ).

В частности, через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание можно выразить все рассмотренные в § 7 булевы функции двух аргументов. А именно по описанной в § 8 методике переходим от таблиц импликации  $X_1 \rightarrow X_2$ , равнозначности  $X_1 \sim X_2$ , операции Шеффера  $X_1/X_2$  и отрицания равнозначности  $X_1 \approx X_2$  к д. н. ф. (или к. н. ф., если это удобнее):

$$X_1 \rightarrow X_2 \equiv \bar{X}_1 \vee X_2;$$

$$X_1 \sim X_2 \equiv (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (X_1 \wedge X_2) \equiv (\bar{X}_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \bar{X}_2); \quad (1.49)$$

$$X_1/X_2 \equiv \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2;$$

$$X_1 \approx X_2 \equiv (X_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_1 \wedge X_2) \equiv (X_1 \vee X_2) \wedge (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2).$$

Существуют и другие отличные от (1.47) полные системы булевых функций. Используем правила де Моргана 10° и 11°. Применяя к обеим частям этих тождеств операцию отрицания, получаем

$$X_1 \wedge X_2 \equiv \overline{\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2}; \quad (1.50)$$

$$X_1 \vee X_2 \equiv \overline{\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2}.$$

Таким образом, конъюнкция  $X_1 \wedge X_2$  есть суперпозиция дизъюнкции и отрицания, а дизъюнкция  $X_1 \vee X_2$  — конъюнкции и отрицания. Поэтому можно исключить из системы  $H$  (1.47) конъюнкцию или дизъюнкцию, не нарушив при этом ее полноты. Получаем две новые полные системы:

$$H_1 = \{X_1 \wedge X_2; \bar{X}\}; \quad (1.51)$$

$$H_2 = \{X_1 \vee X_2; \bar{X}\}.$$

Оказывается, полная система в множестве булевых функций может состоять всего лишь из одной функции. В частности, полной является система

$$H_3 = \{X_1/X_2\}. \quad (1.52)$$

Полнота системы (1.52) следует из того, что через операцию Шеффера можно выразить конъюнкцию (или дизъюнкцию) и отрицание:

$$\bar{X} \equiv X/X;$$

$$X_1 \wedge X_2 \equiv (X_1/X_2)/(X_1/X_2); \quad (1.53)$$

$$X_1 \vee X_2 \equiv (X_1/X_1)/(X_2/X_2).$$

Заметим, что каждая из систем  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$  является базисом в множестве  $\mathfrak{F}(B_2)$  всех булевых функций (см. определение базиса в § 4), так как исключение любой из функций в этих системах делает их неполными. Действительно, если, например, из системы  $H_1 = \{X_1 \wedge X_2; \bar{X}\}$  исключить конъюнкцию  $X_1 \wedge X_2$ , то с помощью оставшейся одноместной операции  $\bar{X}$  нельзя будет строить булевы функции двух и более аргументов; если исключить отрицание



$\bar{X}$ , то с помощью оставшейся конъюнкции можно будет строить лишь формулы вида  $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n$  и, следовательно, единственная одноместная операция, которая получается, если положить  $X_1 \equiv X_2 \equiv X_n \equiv X$ , есть  $X \wedge X \wedge \dots \wedge X \equiv X$ , т. е. в этом случае нельзя построить операцию  $\bar{X}$ .

Интересна система булевых функций (система Жегалкина [24])

$$H_4 = \{X_1 \wedge X_2; X_1 \approx X_2; 1\}, \quad (1.54)$$

или в других обозначениях

$$H_4 = \{X_1 X_2; X_1 + X_2; 1\}. \quad (1.55)$$

Полнота этой системы следует из того, что она содержит конъюнкцию  $X_1 \wedge X_2$ , а отрицание можно представить в виде суперпозиции через отрицание равнозначности  $X_1 \approx X_2$  и константы 1. А именно

$$\bar{X} \equiv X \approx 1. \quad (1.56)$$

Естественно, что полная также система

$$H_5 = \{X_1 \vee X_2; X_1 \sim X_2; 0\}, \quad (1.57)$$

так как  $\bar{X} \equiv X \sim 0$ . Полнота систем  $H_4$  и  $H_5$ , очевидно, не нарушается, если в них заменить конъюнкцию  $X_1 \wedge X_2$  на дизъюнкцию  $X_1 \vee X_2$ .

Приведенные примеры полных систем дают наглядное представление о том, как решаются вопросы полноты систем булевых функций, когда число их аргументов не больше двух. Если система  $H$  включает функции большего числа аргументов, то вопрос о ее полноте может оказаться достаточно сложным. Поэтому представляет интерес установление таких критериев, которые давали бы однозначный ответ на вопрос о полноте любых систем булевых функций. Для решения этого вопроса вначале рассмотрим некоторые замкнутые классы в множестве всех булевых функций  $\mathfrak{F}(B_2)$ .

2. В § 4 показано, что если  $a \in \mathfrak{X}$  — элемент некоторого алфавита  $\mathfrak{X}$ , а  $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}(\mathfrak{X})$  — множество всех правильных функций с алфавитом  $\mathfrak{X}$ , то замкнутым является множество  $\mathfrak{M}_a$  всех отображений вида  $f: \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^m$ , которые переводят точки с координатами  $(a, \dots, a)$  в точки  $(a, \dots, a)$  (такое множество было названо множеством функций, сохраняющих константу  $a$ ). Полагая, в частности,  $\mathfrak{X} = B_2 = \{0, 1\}$ ;  $a = 0$ ;  $a = 1$ , получаем два замкнутых множества булевых функций:

- множество  $T_0$  функций, сохраняющих нуль;
- множество  $T_1$  функций, сохраняющих единицу.

Если функция  $F \in T_0$ , то в первой строке таблицы функции  $F$  стоит ее значение, равное нулю, а если  $F \in T_1$ , то в последней строке таблицы стоит значение  $F = 1$ . В остальных  $2^n - 1$  строках таблицы такой функции могут стоять произвольно нуль или единица. Поскольку в таблице булевой функции с  $2^n - 1$  аргумен-

тами  $2^{2^n-1} = \frac{1}{2} 2^{2^n}$  строк, есть  $\frac{1}{2} 2^{2^n}$  различных булевых функций в каждом из множеств  $T_0, T_1$ .

Рассмотрим далее класс  $S$  всех самодвойственных булевых функций (см. определение 3 § 8), т. е. функций, для которых

$$F^*(X_1, \dots, X_n) \equiv \overline{F(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)} \equiv F(X_1, \dots, X_n). \quad (1.58)$$

Очевидно, что  $X$  и  $\overline{X}$  являются самодвойственными функциями. Пусть теперь  $F(X_1, \dots, X_n)$ ,  $\Phi_i(X_{1i}, \dots, X_{m_i i})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — функции из  $S$ . Рассмотрим суперпозицию  $\Psi \equiv F(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Psi^* &\equiv \overline{F(\Phi_1(\overline{X}_{11}, \dots, \overline{X}_{m_1 1}), \dots, \Phi_n(\overline{X}_{1n}, \dots, \overline{X}_{m_n n}))} \equiv \\ &\equiv \overline{F(\overline{\Phi}_1(\overline{X}_{11}, \dots, \overline{X}_{m_1 1}), \dots, \overline{\Phi}_n(\overline{X}_{1n}, \dots, \overline{X}_{m_n n}))} \equiv \\ &\equiv \overline{F(\overline{\Phi}_1^*, \dots, \overline{\Phi}_n^*)} \equiv F^*(\Phi_1^*, \dots, \Phi_n^*). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Таким образом, суперпозиция самодвойственных функций самодвойственна и множество  $S$  замкнуто.

Из определения самодвойственности следует, что если самодвойственная функция  $F$  в некоторой точке  $(X'_1, \dots, X'_n)$  принимает значение  $A$ , то в точке  $X_1^{2^n-i}, \dots, X_n^{2^n-i}$ , симметричной относительно середины таблицы функции  $F$ , ее значение равно  $\overline{A}$ . Таким образом, значения  $F$  произвольные только в половине ее таблицы, т. е. существует  $2^{2^n-1}$  различных функций в множестве  $S$ .

Рассмотрим множество  $M$  монотонных булевых функций. Введение этого множества опирается на определенный способ осуществления частичной упорядоченности точек  $X = (X_1, \dots, X_n)$  [43]. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ .

Будем предполагать, что  $X \leq Y$ , если  $X_i \leq Y_i$  ( $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ). Например, если  $X = (0, 1, 0, 1)$ ,  $Y = (1, 1, 0, 1)$ , то  $X \leq Y$ . Очевидно, что не всякие точки  $X$  и  $Y$  сравнимы в указанном выше смысле (например, точки  $(0, 1, 0, 1)$  и  $(1, 0, 0, 1)$ ).

**Определение 1.** Функция  $F(X) \in \mathfrak{F}(B_2)$  называется монотонной, если для всяких точек  $X, Y$ ,  $X \leq Y$ , выполняется неравенство

$$F(X) \leq F(Y). \quad (1.60)$$

Примерами монотонных функций являются

$$0; 1; X; X_1 \wedge X_2; X_1 \vee X_2. \quad (1.61)$$

Функции  $X_1 \rightarrow X_2$ ,  $X_1 \sim X_2$ ,  $X_1 \approx X_2$  не монотонны.

Покажем, что множество  $M$  замкнуто. Пусть

$$F(X_1, \dots, X_n), \Phi_i(X_{1i}, \dots, X_{m_i i}) \in M \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.62)$$

Составим суперпозицию

$$\Psi = F[\Phi_1(X_{11}, \dots, X_{m_1 1}), \dots, \Phi_n(X_{1n}, \dots, X_{m_n n})]. \quad (1.63)$$

Тогда, если  $(X'_{1i}, \dots, X'_{m_i i}) \leq (X''_{1i}, \dots, X''_{m_i i})$ , то, так как  $\Phi_i \in M$ , выполняются неравенства

$$\Phi_{1i}(X'_{1i}, \dots, X'_{m_i i}) \leq \Phi_{1i}(X''_{1i}, \dots, X''_{m_i i}).$$

Учитывая, что  $F \in M$ , получаем

$$\begin{aligned} F[\Phi_1(X'_{11}, \dots, X'_{m_1 1}), \dots, \Phi_n(X'_{1n}, \dots, X'_{m_n n})] &\leq \\ &\leq F[\Phi_1(X''_{11}, \dots, X''_{m_1 1}), \dots, \Phi_n(X''_{1n}, \dots, X''_{m_n n})], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Последнее множество, которое понадобится для установления общего критерия полноты, — множество  $L$  линейных функций. Это множество полиномов Жегалкина первой степени (1.33). Замкнутость его доказана в замечании 1 § 8.

В табл. 4 показано, каким из множеств  $T_0, T_1, S, M$  и  $L$  принадлежат функции 0, 1 и  $X$  (звездочка указывает на признак принадлежности).

Таблица 4

Функция	$T_0$	$T_1$	$S$	$M$	$L$
0	*	—	—	*	*
1	—	*	—	*	*
$X$	—	—	*	—	*

Таким образом, множества  $T_0, T_1, S, M$  и  $L$  попарно различны и ни одним из них не исчерпывается множество  $\mathfrak{F}(B_n)$  всех булевых функций.

**Лемма 1.** Если  $F(X_1, \dots, X_n)$  — несамодвойственная функция, то путем подстановки вместо ее аргументов функций  $X$  и  $\bar{X}$  можно получить несамодвойственную функцию одного аргумента (т. е. константу).

**Доказательство.** Так как  $F \notin S$ , найдется такая точка  $A = (A_1, \dots, A_n)$ , что  $F(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n) = F(A_1, \dots, A_n)$ .

Рассмотрим функцию  $\Phi(X) \equiv F(X^{A_1}, \dots, X^{A_n})$ , где функции  $X^{A_i}$  определяются согласно (1.34). Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= F(0^{A_1}, \dots, 0^{A_n}) = F(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n) = \\ &= F(A_1, \dots, A_n) = F(1^{A_1}, \dots, 1^{A_n}) = \Phi(1), \end{aligned} \quad (1.64)$$

что и требовалось доказать.

**Лемма 2.** Если  $F(X_1, \dots, X_n)$  — немонотонная функция, то путем подстановки вместо ее аргументов констант 0, 1 и функции  $X$  можно получить функцию  $\bar{X}$ .

**Доказательство.** Назовем точки  $A = (A_1, \dots, A_n)$  и  $B = (B_1, \dots, B_n)$  соседними (по  $i$ -й координате), если

$$\begin{aligned} A &= (A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n); \\ B &= (A_1, \dots, A_{i-1}, \bar{A}_i, A_{i+1}, \dots, A_n). \end{aligned}$$

Покажем, что для всякой функции  $F \notin M$  найдется такая пара соседних наборов, для которой  $A \leq B$ , а  $F(A) \geq F(B)$ .

Из  $F \notin M$  следует, что существуют точки  $A^{(1)}$  и  $B^{(1)}$ ,  $A^{(1)} \leq B^{(1)}$ , для которых  $F(A^{(1)}) > F(B^{(1)})$ . Если  $A^{(1)}$  и  $B^{(1)}$  — соседние, то лемма доказана. Пусть  $A^{(1)}$  и  $B^{(1)}$ ,  $A^{(1)} \leq B^{(1)}$ , — не соседние и точка  $B^{(1)}$  отличается от точки  $A^{(1)}$   $m$  координатами ( $m > 1$ ). При этом в силу  $A^{(1)} \leq B^{(1)}$  различающиеся координаты у точки  $A^{(1)}$  равны нулю, а у точки  $B^{(1)}$  равны единице. Поэтому между точками  $A^{(1)}$  и  $B^{(1)}$  имеется  $m - 1$  точек  $A^{(1)} \leq A^{(2)} \leq \dots \leq A^{(m)} \leq B^{(1)}$ , таких, что всякие рядом стоящие являются соседними. Так как  $F(A) > F(B)$ , по крайней мере на одной из пар  $A^{(k)}$ ,  $A^{(k+1)}$  соседних точек  $F(A^{(k)}) > F(A^{(k+1)})$ . Пусть  $A^{(k)}$  и  $A^{(k+1)}$  имеют соседство по  $i$ -й координате, т. е.

$$\begin{aligned} A^{(k)} &= (A_1, \dots, A_{i-1}, 0, A_{i+1}, \dots, A_n); \\ A^{(k+1)} &= (A_1, \dots, A_{i-1}, 1, A_{i+1}, \dots, A_n). \end{aligned}$$

Тогда для функции

$$\Phi(X) = F(A_1, \dots, A_{i-1}, X, A_{i+1}, \dots, A_n)$$

имеем

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= F(A_1, \dots, A_{i-1}, 0, A_{i+1}, \dots, A_n) = F(A^{(k)}) > \\ &> F(A^{(k+1)}) = F(A_1, \dots, A_{i-1}, 1, A_{i+1}, \dots, A_n) = \Phi(1). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\Phi(0) = 1$ , а  $\Phi(1) = 0$ , т. е.  $\Phi(X) = \bar{X}$ . Лемма доказана.

**Лемма 3.** Если  $F(X_1, \dots, X_n)$  — нелинейная функция, то путем подстановки вместо ее аргументов констант 0, 1 и функций  $X$ ,  $\bar{X}$ , а также, возможно, применения к ней операции отрицания, можно получить функцию  $X_1 \wedge X_2$ .

**Доказательство.** Ввиду полноты системы (1.54) всякую булеву функцию можно представить посредством полинома Жегалкина (1.32). Так как по предположению  $F \notin L$ , то в этом полиноме имеются нелинейные члены. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что в формуле (1.32) содержится конъюнкция  $X_1 X_2$ . Тогда функцию  $F$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} F(X_1, \dots, X_n) &\equiv X_1 X_2 F_1(X_3, \dots, X_n) + X_1 F_2(X_3, \dots, X_n) + \\ &+ X_2 F_3(X_3, \dots, X_n) + F_4(X_3, \dots, X_n), \end{aligned} \quad (1.65)$$

причем  $F_1 \neq 0$ . Пусть для определенности  $F(A_1, \dots, A_n) = 1$ . (В противном случае можно взять  $\bar{F}$ .) Тогда

$$\Phi(X_1, X_2) \equiv F(X_1, X_2, A_3, \dots, A_n) \equiv X_1 X_2 + P X_1 + Q X_2 + R, \quad (1.66)$$

где  $P, Q, R \in B_2 = \{0, 1\}$ . Рассмотрим функцию

$$\Psi(X_1, X_2) \equiv \Phi(X_1 + Q, X_2 + P) + PQ + R. \quad (1.67)$$

Видно, что

$$\begin{aligned} \Psi(X_1, X_2) &\equiv (X_1 + Q)(X_2 + P) + P(X_1 + Q) + Q(X_2 + P) + \\ &+ R + PQ + R \equiv X_1X_2 + X_1P + X_2Q + PQ + PX_1 + PQ + \\ &+ QX_2 + QP + R + PQ + R. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Здесь использованы свойства 1°, 22° и 26°.

Учитывая, что  $PX_1 + PX_1 \equiv 0$ ;  $QX_2 + QX_2 \equiv 0$ ;  $R + R \equiv 0$ ;  $PQ + PQ \equiv 0$ , получаем

$$\Psi(X_1, X_2) \equiv X_1X_2 \equiv X_1 \wedge X_2.$$

Лемма доказана.

**Теорема 1** (критерий функциональной полноты). Для того чтобы система  $H \subset \mathfrak{F}(B_2)$  была полной в  $\mathfrak{F}(B_2)$  (т. е. чтобы  $\mathfrak{M}(H) = \mathfrak{F}(B_2)$ ), необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась целиком ни в одном из множеств  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $M$ ,  $S$  и  $L$ .

Другими словами, среди функций, составляющих  $H$ , должны быть функции (по крайней мере по одной) не сохраняющие нуль, не сохраняющие единицу, немонокотонные, несамосопряженные и нелинейные. (Всеми этими качествами может обладать одна и та же функция. Примером такой функции является операция Шеффера.)

**Доказательство.** Докажем вначале необходимость. Предположим противное. Пусть  $H$  принадлежит одному из перечисленных в условии теоремы множеств и  $\mathfrak{M}(H) = \mathfrak{F}(B_2)$ . Ввиду замкнутости каждого из них множество  $\mathfrak{M}(H)$  окажется частью этого множества и, следовательно, не будет исчерпывать множество  $\mathfrak{F}(B_2)$ . Приходим к противоречию.

Перейдем к доказательству достаточности. Выделим из  $H$  систему  $H_1 = \{\Phi_1, \dots, \Phi_3\}$  из пяти функций (не обязательно различных), таких что  $\Phi_1 \notin T_0$ ;  $\Phi_2 \notin T_1$ ;  $\Phi_3 \notin S$ ;  $\Phi_4 \notin M$  и  $\Phi_5 \notin L$ . Вначале построим с помощью функций  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  константы 0 и 1. Пусть  $\Phi_1(1, \dots, 1) = 1$ , тогда  $\Phi(X) = \Phi_1(X, \dots, X) \equiv 1$ , так как  $\Phi(0) \equiv \Phi_1(0, \dots, 0) \neq 0$  (т. е.  $\Phi(0) = 1$ ) и  $\Phi(1) \equiv \Phi_1(1, \dots, 1) = 1$ . Константа 0 в этом случае получается из  $\Phi_2$ , а именно  $\Phi_2(1, \dots, 1) = 0$ . Если же  $\Phi_1(1, \dots, 1) = 0$ , то  $\Phi(\bar{X}) \equiv \Phi_1(X, \dots, X) \equiv \bar{X}$ , так как  $\Phi(0) = \Phi_1(0, \dots, 0) \neq 0$ , т. е.  $\Phi(0) = 1$  и  $\Phi(1) = \Phi_1(1, \dots, 1) = 0$ . Располагая функцией  $\bar{X}$ , по лемме 1 с помощью функции  $\Phi_3$  (путем подстановки вместо ее аргументов  $X$  и  $\bar{X}$ ) можем получить одну из констант. Другую получим, применив операцию  $\bar{X}$ .

Имея константы 0 и 1, по лемме 2 можем построить с помощью функции  $\Phi_4$  отрицание  $\bar{X}$ , а затем по лемме 3 — конъюнкцию  $X_1 \wedge X_2$ . В результате получим полную систему  $\{\bar{X}, X_1 \wedge X_2\}$ , с помощью которой можем построить любую булеву функцию. Теорема доказана.

**Следствие 1.** Если  $\mathfrak{M}$  — замкнутое множество булевых функций и  $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{F}(B_2)$ , то  $\mathfrak{M}$  содержится по крайней мере в одном из множеств  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $S$ ,  $M$ ,  $L$ .

**Определение 2.** Множество  $H \subset \mathfrak{F}(B_2)$  называется предполным или максимальным в  $\mathfrak{F}(B_2)$ , если оно не полное, но полное множество  $H \cup F$  какова бы ни была функция  $F \in \mathfrak{F}(B_2) \setminus H$ .

Из определения 2 видно, что всякое предполное множество является замкнутым. Действительно, если бы оно было не замкнутым, то из его элементов можно было бы образовать суперпозицию, ему не принадлежащую. Очевидно, добавление этой суперпозиции не обязательно приводило бы к полной системе в  $\mathfrak{F}(B_2)$ .

**Следствие 2.** В множестве  $\mathfrak{F}(B_2)$  существует только пять предполных множеств:  $T_0, T_1, S, M$  и  $L$ .

Действительно, если  $\mathfrak{M}$  — предполное множество, не совпадающее ни с одним из множеств  $T_0, T_1, S, M$  и  $L$ , то по теореме 1 оно полное.

**Пример.** Рассмотрим систему

$$H = \{\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee \bar{X}_3; 0; 1; X_1 \sim X_2 \sim X_3\}. \quad (1.69)$$

Очевидно, что  $1 \notin T_0; 0 \notin T_1; 1 \notin S; X_1 \sim X_2 \sim X_3 \notin M$  (например,  $(0, 0, 1) \leq (0, 1, 1)$ , а  $0 \sim 0 \sim 1 > 0 \sim 1 \sim 1$ ). Кроме того,  $\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee \bar{X}_3 \equiv \bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3 \equiv X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 + 0 \notin L$ . Поэтому система  $H$  полная.

**Теорема 2.** Из всякой полной в множестве  $\mathfrak{F}(B_2)$  системы  $H$  можно извлечь полную подсистему  $H_1$ , содержащую не более четырех функций.

**Доказательство.** Из теоремы 1 следует, что можно выбрать такую полную систему  $H_1 = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5\}$ ;  $\Phi_1 \notin T_0$ ;  $\Phi_2 \notin T_1$ ;  $\Phi_3 \notin S$ ;  $\Phi_4 \notin M, \Phi_5 \notin L$ , которая содержит пять функций. Однако если  $\Phi_1(1, \dots, 1) = 1$ , то  $\Phi_1 \notin S$ , так как  $\Phi_1(0, \dots, 0) = 1$ . Если  $\Phi_1(1, \dots, 1) = 0$ , то  $\Phi_1 \notin M$ , так как  $(0, \dots, 0) \leq (1, \dots, 1)$ , а  $\Phi_1(0, \dots, 0) > \Phi_1(1, \dots, 1)$ . Это позволяет из системы  $H_1$  исключить либо функцию  $\Phi_3$ , либо функцию  $\Phi_4$ . Теорема доказана.

**Упражнения и задачи.** 1. Построить полную систему булевых функций, состоящую из одной трехместной функции  $F(X_1, X_2, X_3)$ , существенно зависящей от всех аргументов. (Функция существенно зависит от аргумента  $X_i$ , если существуют такие точки  $X^1$  и  $X^2$ , различающиеся только  $i$ -й координатой, что  $F(X^1) \neq F(X^2)$ .)

2. Показать, что для всякого  $n \geq 2$  функция  $\bar{X}_1 \vee \dots \vee \bar{X}_n$  образует полную систему в множестве  $\mathfrak{F}(B_2)$ .

3. Полная ли в множестве  $\mathfrak{F}(B_2)$  система  $\{X_1 \rightarrow X_2; X_1 \sim X_2\}$ ?

## § 10. Понятие о минимизации булевых функций

В § 8 показано, что всякую булеву функцию  $F(X_1, \dots, X_n)$  можно привести к дизъюнктивной нормальной форме:

$$F(X_1, \dots, X_n) \equiv F_1 \vee \dots \vee F_m, \quad (1.70)$$

где  $F_i$  — элементарные конъюнкции, составленные из аргументов  $X_1, \dots, X_n$ , взятых с отрицанием или без него.

Элементарная конъюнкция, в которую входят все аргументы функции  $F(X_1, \dots, X_n)$ , называется *конституентой*; д. н. ф., составленная из конституент, называется *совершенной*. (Аналогичные названия сохраняются и для к. н. ф.) Согласно (1.39) всякую булеву функцию можно представить в совершенной д. н. ф. Данную булеву функцию можно представить в д. н. ф., вообще, не единственным образом, например

$$F(X_1, X_2, X_3) \equiv (\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_3) \equiv \\ \equiv (X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_3).$$

В связи с этим может быть поставлен вопрос о приведении булевой функции к такой д. н. ф., которая была бы в некотором смысле наиболее простой («минимальной») по сравнению с другими д. н. ф. Можно, например, исходить из следующего понятия минимальности: дизъюнктивная нормальная форма называется *минимальной*, если она содержит по сравнению с другими тождественными ей д. н. ф. минимальное количество букв (при подсчете учитывается каждое вхождение букв в формулу). Например, формула

$$(\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_3)$$

имеет восемь вхождений букв  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ , а тождественная ей формула

$$(X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_3) —$$

только четыре.

Сформулированный принцип минимальности касается количества букв — аргументов, входящих в формулу булевой функции. С точки зрения приложений важнее было бы стремиться к минимизации количества операций над этими буквами, так как именно они определяют количество блоков (электронных, программных и т. д.), входящих в общую функциональную схему, реализующую данную булеву функцию, т. е. следовало бы рассматривать проблему минимизации суперпозиций, сформулированную в § 5. Однако к настоящему времени нет достаточно эффективных методов решения проблемы и приходится довольствоваться сформулированной выше постановкой вопроса о минимизации д. н. ф.

Считают, что функция  $F_1$  своим значением  $C_1$  покрывает значение  $C_2$  функции  $F_2$  в некоторой точке  $X^0 = (X_1^0, \dots, X_n^0)$ , если  $F_1(X^0) = C_1$ , а  $F_2(X^0) = C_2$ . Функцию  $F_1$  назовем *импликантой* функции  $F_2$ , если она своими значениями, равными нулю, покрывает все значения, равные нулю, функции  $F_2$  (т. е. возможно, что некоторые нули функции  $F_1$  покрывают единицы функции  $F_2$ ). Название «импликанта» для  $F_1$  объясняется тем, что импликация  $F_1 \rightarrow F_2$  в этом случае является истинным высказыванием, т. е.  $F_1 \rightarrow F_2 \equiv 1$ . Справедливы следующие теоремы [24].

**Теорема 1.** Если  $F_1, \dots, F_k$  — импликанты булевой функции  $F$ , то  $\Phi \equiv F_1 \wedge \dots \wedge F_k$ ;  $\Psi \equiv F_1 \vee \dots \vee F_k$  также являются импликантами функции  $F$ .

**Теорема 2.** Если  $F \equiv F_1 \vee \dots \vee F_k$  есть импликанта функции  $F$ , то функции  $F_1, \dots, F_k$  также импликанты  $F$ .

Элементарная конъюнкция, входящая в д. н. ф. функции  $F$ , называется ее *простой импликантой*, если никакая часть последней не является импликантой функции  $F$ . Например, простыми импликантами функции  $F \equiv (X_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_1 \wedge X_2)$  являются конъюнкция  $X_1 \wedge \bar{X}_2$  и  $\bar{X}_1 \wedge X_2$ . Это видно из табл. 5.

Действительно, нули конъюнкций  $X_1 \wedge \bar{X}_2$  и  $\bar{X}_1 \wedge X_2$  накрывают нули функции  $F$ , а нули их частей  $X_1, \bar{X}_2, \bar{X}_1, X_2$  — не накрывают.

**Теорема 3.** Дизъюнкция всех простых импликант булевой функции совпадает с этой булевой функцией.

Доказательство теорем 1—3 приведено в работе [24].

Дизъюнктивная нормальная форма, составленная из простых импликант, называется *сокращенной д. н. ф.* Возможно, что некото-

рые из простых импликант, входящих в сокращенную д. н. ф., могут быть удалены и при этом значения функции не изменятся ни в одной точке. Такие простые импликанты называются *лишними*. Сокращенная д. н. ф., из которой удалены все лишние импликанты, называется *тупиковой*. Можно показать [24, 194], что минимальная д. н. ф. тупиковая.

Приведенные выше вспомогательные результаты дают возможность рассмотреть один из наиболее простых методов минимизации — метод Квайна [24]. В методе Квайна используются две операции: склеивание и поглощение.

Операция склеивания определяется тождеством

$$(X \wedge F) \vee (\bar{X} \wedge F) \equiv F. \quad (1.71)$$

Справедливость этого тождества легко проверить, используя свойства  $1^\circ$ — $19^\circ$  § 8:

$$(X \wedge F) \vee (\bar{X} \wedge F) \equiv (X \vee \bar{X}) \wedge F \equiv 1 \wedge F \equiv F.$$

Учитывая также, что  $F \vee F \equiv F$ , получаем формулу

$$(X \wedge F) \vee (\bar{X} \wedge F) \equiv (X \wedge F) \vee (\bar{X} \wedge F) \vee F. \quad (1.72)$$

Операция поглощения определяется тождеством

$$(F \wedge \Phi) \vee F \equiv F. \quad (1.73)$$

Докажем тождество (1.73)

$$(F \wedge \Phi) \vee F \equiv (F \wedge \Phi) \vee (F \wedge 1) \equiv F \wedge (\Phi \vee 1) \equiv F \wedge 1 \equiv F.$$

Заметим, что вследствие принципа двойственности справедливы также тождества

$$(X \vee F) \wedge (\bar{X} \vee F) \equiv F;$$



$$(X \vee F) \wedge (\bar{X} \vee F) \equiv (X \vee F) \wedge (\bar{X} \vee F) \wedge F; \quad (1.74)$$

$$(F \vee \Phi) \wedge F \equiv F.$$

Метод Квайна основывается на следующей теореме.

**Теорема 1 (Квайна) [24].** Если в совершенной дизъюнктивной нормальной форме произведем все возможные неполные склеивания, а затем все возможные поглощения, получим сокращенную д. н. ф.

Рассмотрим применение метода Квайна на следующем примере.

**Пример 1.** Пусть функция  $F$  задана в совершенной д. н. ф.

$$F \equiv (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge X_3) \vee (\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge \bar{X}_3).$$

Склеивая первую элементарную конъюнкцию последовательно со второй, третьей и четвертой, получаем

$$F \equiv (\bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_3) \vee (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge X_3) \vee (\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge \bar{X}_3).$$

После применения операции поглощения получим сокращенную д. н. ф.

$$F \equiv (\bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_3). \quad (1.75)$$

Чтобы от сокращенной д. н. ф. перейти к минимальной, можно использовать метод импликантной матрицы. Применение этого метода покажем на примере, а затем вернемся к формуле (1.75).

**Пример 2.** Пусть функция  $F$  задана совершенной д. н. ф.

$$F \equiv (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3). \quad (1.76)$$

Применяя теорему Квайна, получаем сокращенную д. н. ф.

$$F \equiv (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_3) \vee (\bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3). \quad (1.77)$$

Импликантная матрица (табл. 6) строится так. Каждой простой импликанте (т. е. элементарной конъюнкции из сокращенной д. н. ф.) соответствует строка таблицы. Под конъюнктами, в которые входит данная простая импликанта, поставим звездочки. Каждая из конъюнктов равна единице лишь для одного набора аргументов (аргументу без отрицания соответствует единица, с отрицанием — нуль). Для этого набора аргументов будут равны единице те простые импликанты, которые расположены в строках, отмеченных звездочками. Поэтому, чтобы накрыть единицами все единицы функции  $F$ , достаточно оставить в (1.77) такие простые импликанты, чтобы в каждом столбце была хотя бы одна звездочка.

Из таблицы видно, что если вычеркнуть простую импликанту  $X_1 \wedge \bar{X}_3$ , в каждом столбце будет по одной звездочке. Поэтому

$$F \equiv (X_1 \wedge X_2) \vee (\bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3). \quad (1.78)$$

Таблица 6

Импликанты	$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$	$X_1 \wedge X_2 \wedge \bar{X}_3$	$\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3$	$X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3$
$X_1 \wedge X_2$	*	*	—	—
$X_1 \wedge \bar{X}_3$	—	*	—	*
$\bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3$	—	—	*	*

Импликаты	$\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3$	$X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3$	$\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge \bar{X}_3$	$\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge X_3$
$\bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3$	*	*	—	—
$\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2$	*	—	*	—
$\bar{X}_1 \wedge X_3$	*	—	—	*

Для сокращенной д. н. ф. (1.75) импликантная матрица соответствует табл. 7. Очевидно, что если вычеркнуть любую из строк табл. 7, в одном из столбцов будут отсутствовать звездочки. Например, если вычеркнуть первую строку, то звездочек не будет во втором столбце, а оставшиеся простые импликаты составят д. н. ф.

$$F_1 \equiv (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_3),$$

которая на наборе (1, 0, 0), соответствующем конstituенте  $X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3$ , будет равна нулю, в то время как на этом наборе  $F = 1$ .

Полученные сокращенные д. н. ф. (1.75) и (1.78) являются минимальными, так как других возможностей сокращения д. н. ф. нет.

Заметим, что приведенные примеры носят лишь иллюстративный характер. При малом числе аргументов ( $\leq 4$ ) получать минимальные формы можно, используя диаграммы Эйлера (см. § 11). Другие методы минимизации формул булевой алгебры (Мак-Класки, Блейка и др.) рассмотрены в работах [24, 194].

*Упражнение.* Найти минимальные формы булевых функций

$$\begin{aligned} & (\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3); \\ & (X_1 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \bar{X}_3); \\ & (X_1 \vee X_2) \wedge (\bar{X}_1 \vee X_2 \vee X_3) \wedge (\bar{X}_1 \vee X_2 \vee X_3). \end{aligned}$$

## § 11. Геометрическая интерпретация булевых функций

Пусть  $\Omega$  есть область в множестве  $\mathbb{R}^n$ . Введем функцию  $\Omega : \mathbb{R}^n \rightarrow B_2$

$$\Omega = \Omega(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \notin \Omega; \\ 1 & \forall x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.79)$$

которую назовем *характеристической функцией* или *двузначным предикатом* области  $\Omega$ . (Для простоты характеристическую функцию обозначаем той же буквой, что и соответствующую ей область.) И пусть  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — характеристические функции областей  $\Omega_i$ , а  $Y = F(X_1, \dots, X_m)$  — булева функция. Так как  $\Omega_i \in B_2$ , имеет смысл выражение  $F(\Omega_1, \dots, \Omega_m) \in B_2$ , которое в одних точках  $\mathbb{R}^n$  может равняться нулю, а в других — единице. Множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  с характеристической функцией

$$\Omega = F(\Omega_1, \dots, \Omega_m) \quad (1.80)$$

вполне определяется булевой функцией  $F$  и областями  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ . Области  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  будем называть *опорными* для области  $\Omega$ . Формула  $F(\Omega_1, \dots, \Omega_m)$  определяет *логику формирования* области  $\Omega$  из областей  $\Omega_i$ . (Заметим, что  $\Omega$  может быть и пустым множеством).

Предположим, что области  $\Omega_i$  расположены на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Тогда булевым операциям (одноместным и двухместным) можно поставить в соответствие диаграммы, показанные на рис. 14.

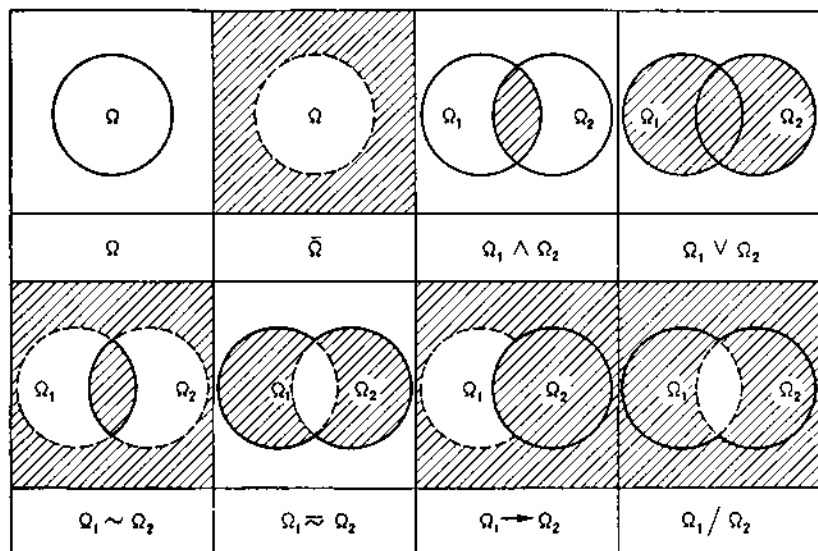


Рис. 14.

На рис. 14 участки границы, содержащиеся в заштрихованной области, обозначены сплошной кривой, а не содержащиеся — штриховой. (Предполагается, что опорные области  $\Omega_i$  включают свои граничные точки.) Нетрудно заметить, что приведенные диаграммы аналогичны соответствующим диаграммам Эйлера (§ 2). Аналогичные диаграммы можно строить для булевых функций нескольких аргументов.

**Пример 1.** Построить диаграмму Эйлера для булевой функции  $F$ , заданной следующей таблицей, взяв в качестве опорных круги  $\Omega_1, \Omega_2$  и  $\Omega_3$  (рис. 15. а):

$X_1$	0	0	0	0	1	1	1	1
$X_2$	0	0	1	1	0	0	1	1
$X_3$	0	1	0	1	0	1	0	1
$Y$	0	0	0	1	0	0	1	1

Эти круги разбивают плоскость на восемь частей (по состоянию принадлежности их точек к областям  $\Omega_1, \Omega_2$  и  $\Omega_3$ ), в каждой из которых будет свой набор значений характеристических функций  $\Omega_1, \Omega_2$  и  $\Omega_3$  (рис. 15. а). Для того чтобы получить соответствующую булевой функции  $F$  диаграмму Эйлера, достаточно заштриховать те части, на которых предикат  $\Omega = F(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  принимает значение 1. Таким образом, приходим к диаграмме, приведенной на рис. 15. б. Естественно, что при

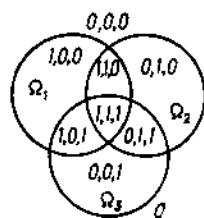


Рис. 15.

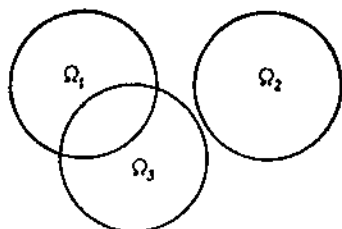
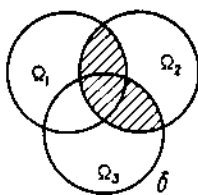


Рис. 16.

другом выборе опорных областей  $\Omega_i$  вид этой диаграммы может измениться. Так, например, для опорных областей, изображенных на рис. 16, предикату  $\Omega = F(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  соответствует пустое множество. Такое явление возникает потому, что в этом случае некоторые наборы значений аргументов (а именно наборы  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$  и  $(0, 1, 1)$ ) не реализуются. Как раз на этих наборах функция  $F$  равна единице.

В дальнейшем будет широко использоваться задание точечных множеств (геометрических объектов) в  $\mathbb{R}^n$  средствами аналитической геометрии, т. е. с помощью уравнений, неравенств и т. д. Условимся предикаты, соответствующие таким точечным множествам, задавать в виде условий, заключенных в скобки. Например,

$$\Omega_1 = (1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0) \quad (1.81)$$

будет рассматриваться как характеристическая функция круга (рис. 17, а) на плоскости  $x_1 O x_2$ , а

$$\Omega_2 = (x_1 - x_2 = 0) \quad (1.82)$$

как характеристическая функция

биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 17, б). Другие примеры задания предикатов  $\Omega_1 = (\omega(x) < 0)$ ;  $\Omega_2 = (\omega(x) \leq 0)$ ;  $\Omega_3 = (\omega(x) \neq 0)$  и т. п. будут использованы реже. *Каноническими* (основными) будем считать предикаты вида (1.81) и (1.82), т. е.  $\Omega = (\omega(x) \geq 0)$ ;  $\Omega = (\omega(x) = 0)$ .

С помощью функций алгебры логики можно, располагая некоторой системой опорных предикатов вида  $\Omega_i = (\omega_i(x) \geq 0)$  или  $\Omega_i = (\omega_i(x) = 0)$  (или теми и другими), строить предикаты для новых геометрических объектов (условно называемых «сложными»).

**Определение.** Пусть  $\Omega = F(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ , где  $\Omega_i = \Omega_i(x)$  — двузначные предикаты областей  $\Omega_i$ . Уравнение

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_n) = A, \quad (1.83)$$

где  $A \in B_2$  — булева константа, называется предикатным уравнением. (При  $A = 1$  уравнение (1.83) называется предикатным уравнением области  $\Omega$ .)

**Пример 2.** Рассмотрим область  $\Omega$  (рис. 18). Эту область можно задать двузначным предикатом

$$\Omega = \Omega_1 \wedge (\Omega_2 \vee \Omega_3) = (4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0) \wedge \wedge [(x_1^2 - 1) \geq 0] \vee (1 - x_2 \geq 0)]. \quad (1.84)$$

Здесь в качестве опорных выбраны области:

$\Omega_1 = (4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0)$  — круг радиуса 2 с центром в точке 0;

$\Omega_2 = (x_1^2 - 1 \geq 0)$  — внешность полосы, заключенной между прямыми  $x_1 = \pm 1$  (эти прямые в полосу не включены);

$\Omega_3 = (1 - x_2 \geq 0)$  — полуплоскость ниже прямой  $x_2 = 1$  (включая эту прямую).

Предположим, что в рассматриваемом примере в качестве опорных областей  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  взяты:

$\Omega_2 = (1 - x_1^2 \geq 0)$  — полоса между прямыми  $x_1 = \pm 1$ , включающая эти прямые;

$\Omega_3 = (x_2 - 1 \geq 0)$  — полуплоскость, состоящая из точек, лежащих выше прямой  $x_2 = 1$  или на ней.

Тогда для области  $\Omega$  можно написать характеристическую функцию

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \overline{(\Omega_2 \wedge \Omega_3)}. \quad (1.85)$$

Однако для предикатов (1.84) и (1.85) общими точками истинности (где  $\Omega = 1$ ) будут внутренние точки области  $\Omega$  и точки ее границы  $\partial\Omega$ , принадлежащие окружности  $\partial\Omega_1 = (4 - x_1^2 - x_2^2 = 0)$ . В точках отрезков  $ABCD$  предикат (1.85) равен нулю, а предикат (1.84) — единице.

Задача построения характеристических функций заданных областей (или соответствующих предикатных уравнений) будет играть в дальнейшем важную роль. Характеристические функции будут представлять собой некоторый промежуточный этап на пути построения уравнений границ (или участков границ). При этом, во избежание недоразумений, которые могут возникнуть при учете информации о граничных точках, необходимо будет, вообще, использовать трехзначную логику (см. § 17).

*Упражнения и задачи.* 1. Осуществить минимизацию булевых функций из упражнения § 10 на основе их геометрической интерпретации.

2. Показать, что при любом расположении на плоскости  $\mathbb{R}^2$   $n$  кругов ( $n \geq 4$ ), внутри которых булевы переменные  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) равны единице, а вне — нулю, найдется такая булева функция  $F(X_1, \dots, X_n)$ , которой на плоскости соответствует пустое множество.

3. Показать, что при  $n \rightarrow \infty$  в предыдущем примере доля булевых функций, которым на плоскости соответствуют не пустые множества, в общем числе булевых функций стремится к нулю.

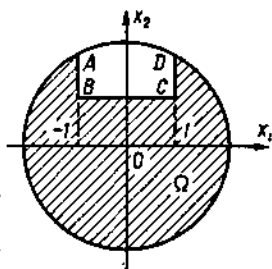


Рис. 18.

## § 12. Применение булевых функций при построении переключательных схем

Булевы функции широко используются в автоматике и вычислительной технике при разработке так называемых переключательных схем. Формализация описания синтезируемых устройств, осуществляемая с помощью методов дискретного анализа (в том числе теории булевых функций), в большинстве случаев позволяет уже на уровне математических преобразований достичь существенных упрощений конструктивного характера. С математической точки зрения вообще не имеет значения, с помощью каких конкретных технических средств (элект-

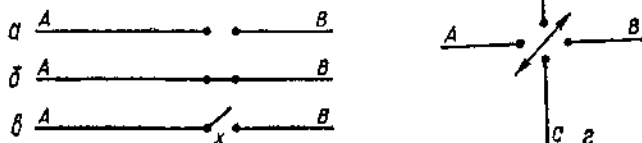


Рис. 19.

рических реле, электронных или микроэлектронных схем и т. д.) будет осуществляться физическая реализация булевых функций. Поэтому, для того чтобы достичь максимальной простоты и наглядности, будем изображать булевы функции с помощью электрических цепей, содержащих только двухпозиционные переключатели. (При одном состоянии ток через переключатель проходит, а при другом — нет.)

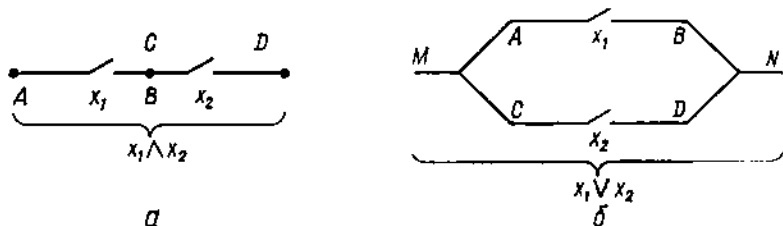


Рис. 20.

Будем предполагать, что проводник  $AB$  находится в состоянии 0, если он разорван (рис. 19, а) и, следовательно, ток по нему не может проходить, а проводник, не имеющий разрыва (рис. 19, б) — находится в состоянии 1. Проводник  $AB$ , снабженный переключателем (рис. 19, в), может находиться в одном из двух состояний — 0 или 1, поэтому обозначим его состояние так же, как булеву переменную (например,  $X$ ). Наконец, переключатель, изображенный на рис. 19, г, включает либо проводник  $AB$  (тогда  $CD$  — разомкнут) либо  $CD$  (тогда  $AB$  — разомкнут). Следовательно, если состояние проводника  $AB$  есть  $X$ , то  $CD$  —  $\bar{X}$ .

Таким образом, схема, изображенная на рис. 19, г, представляет собой простейшую реализацию операции отрицания  $\bar{X}$ .

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 20, а. Пусть состояние проводника  $AB$  есть  $X_1$ , а  $CD$  —  $X_2$ . Легко видеть, что последовательное соединение проводников  $AB$  и  $CD$  приводит к образованию проводника  $AD$ , состояние которого есть  $X_1 \wedge X_2$ . Аналогично параллельное соединение этих проводников (рис. 20, б) приводит к образованию проводника  $MN$ , имеющего состояние  $X_1 \vee X_2$ .

Таким образом, приходим к реализации полной системы  $H = \{\bar{X}; X_1 \wedge X_2; X_1 \vee X_2\}$ , используя которую можно схемно реализовать любую булеву функцию.

**Пример 1.** Чтобы руки оператора не попали под пресс, последний включается одновременным нажатием двух кнопок  $X_1$  и  $X_2$ , расположенных слева и справа от стола, на котором укладываются заготовки. Схема включения пресса — последовательная (рис. 21).

**Пример 2.** В центре комнаты висит люстра, которая должна включаться и выключаться двумя независимыми переключателями  $X_1$  и  $X_2$ , расположенными в различных концах комнаты. Пусть  $Y$  — состояние люстры (при  $Y = 0$  люстра не включена, при  $Y = 1$  — включена). Предположим, что при обоих включенных переключателях  $X_1 = X_2 = 1$  люстра должна гореть ( $Y = 1$ ). Тогда таблица булевой функции  $Y = F(X_1, X_2)$  имеет вид

$X_1$	0	0	1	1
$X_2$	0	1	0	1
$Y$	1	0	0	1

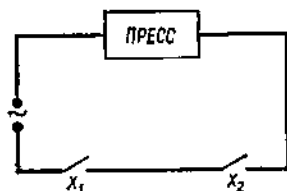


Рис. 21.

Перейдем к дизъюнктивной нормальной форме:

$$Y = (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (X_1 \wedge X_2).$$

(Очевидно, упростить данную формулу уже нельзя.) Соответствующую схему (рис. 22) получаем, соединяя последовательно  $X_1$  с  $X_2$ , ( $AB$  и  $BC$ ),  $\bar{X}_1$  с  $\bar{X}_2$  ( $DE$  и  $FG$ ), а затем осуществляя их параллельное соединение.

**Пример 3.** Поскольку  $X_1/X_2 \equiv \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2$ , операцию Шеффера можно реализовать с помощью переключательной схемы, показанной на рис. 23. (В состоянии  $X_1/X_2$  находится проводник  $MN$ ). Так как система  $H = \{X_1/X_2\}$  полная, в принципе эту стандартную схему можно использовать как своего рода модуль для реализации любой булевой функции. (Однако такие схемы обычно весьма громоздки.)

**Пример 4.** Пусть  $Z_{n+1}Z_n \dots Z_2Z_1$  —  $(n+1)$ -разрядное двоичное число, представляющее сумму  $n$ -разрядных двоичных чисел  $X_n \dots X_2X_1$  и  $Y_n \dots Y_2Y_1$ . Очевидно, что  $Z_1$  есть булева функция аргументов  $X_1$  и  $Y_1$ , т. е.  $Z_1 = F_1(X_1, Y_1)$ ;  $Z_2$  зависит от четырех аргументов:  $Z_2 = F_2(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$  и т. д., а  $Z_{n+1}$  — зависит от всех  $2n$  аргументов:  $Z_{n+1} = F_{n+1}(X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n)$ . Для каждой из этих функций можно составить таблицу, написать соответствующую формулу, упростить ее, а затем осуществить их техническую реализацию. Например, легко убедиться в том, что

$$Z_1 = (\bar{X}_1 \wedge Y_1) \vee (X_1 \wedge \bar{Y}_1) = X_1 \approx Y_1.$$

Однако построение формул  $F_k$  при больших  $k$  громоздко, поэтому удобнее написать (а затем и реализовать в виде устройств) рекуррентные соотношения.

Пусть  $U_i$  есть булева переменная, представляющая собой результат переноса из  $i$ -го в  $(i+1)$ -й разряд при сложении чисел  $X_n \dots X_2X_1$  и  $Y_n \dots Y_2Y_1$ . Тогда  $Z_i$  есть функция аргументов  $X_i, Y_i$  и  $U_{i-1}$ :  $Z_i = \Phi_i(X_i, Y_i, U_{i-1})$  ( $U_0$  считается

равным нулю). Нетрудно составить таблицы функций  $\Phi_i$  и  $U_i$ :

$X_i$	0	0	0	0	1	1	1	1
$Y_i$	0	0	1	1	0	0	1	1
$U_{i-1}$	0	1	0	1	0	1	0	1
$Z_i$	0	1	1	0	1	0	0	1
$U_i$	0	0	0	1	0	1	1	1

Соответствующая функции  $Z_i$  д. н. ф. имеет вид

$$Z_i = (\bar{X}_i \wedge \bar{Y}_i \wedge U_{i-1}) \vee (\bar{X}_i \wedge Y_i \wedge \bar{U}_{i-1}) \vee (X_i \wedge \bar{Y}_i \wedge \bar{U}_{i-1}) \vee (X_i \wedge Y_i \wedge U_{i-1}). \quad (1.86)$$

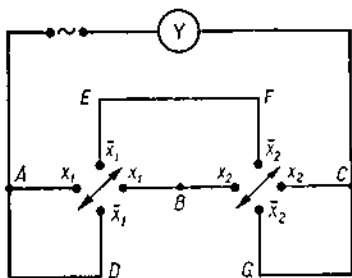


Рис. 22.

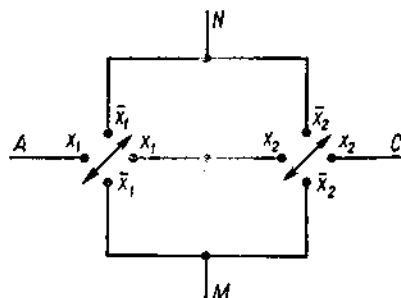


Рис. 23.

Эту же формулу можно привести к виду

$$Z_i = X_i \approx Y_i \approx U_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n-1). \quad (1.87)$$

При этом  $U_0 = 0$ ;  $X_{n+1} = Y_{n+1} = 0$ . Для  $U_i$  получаем формулу

$$U_i = (\bar{X}_i \wedge Y_i \wedge U_{i-1}) \vee (X_i \wedge \bar{Y}_i \wedge U_{i-1}) \vee (X_i \wedge Y_i \wedge \bar{U}_{i-1}) \vee (X_i \wedge Y_i \wedge U_{i-1}). \quad (1.88)$$

Ее можно упростить. Склеим первую и вторую конъюнкты с четвертой:

$$U_i = (Y_i \wedge U_{i-1}) \vee (X_i \wedge U_{i-1}) \vee (\bar{X}_i \wedge Y_i \wedge U_{i-1}) \vee (X_i \wedge \bar{Y}_i \wedge U_{i-1}) \vee (X_i \wedge Y_i \wedge \bar{U}_{i-1}) \vee (X_i \wedge Y_i \wedge U_{i-1}).$$

Применяя операцию поглощения, получаем

$$U_i = (Y_i \wedge U_{i-1}) \vee (X_i \wedge U_{i-1}) \vee (X_i \wedge Y_i \wedge \bar{U}_{i-1}) = [(X_i \vee Y_i) \wedge U_{i-1}] \vee (X_i \wedge Y_i \wedge \bar{U}_{i-1}). \quad (1.89)$$

Формулы (1.87) и (1.89) представляют собой рекуррентные соотношения для последовательного нахождения разрядов суммы чисел в двоичной системе счисления.

### § 13. Полные системы в $k$ -значной логике. Аналитическое представление функций трехзначной логики

При переходе к алфавиту  $B_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ , состоящему из  $k$  элементов, получаем множество  $\mathfrak{F}(B_k)$  функций  $k$ -значной логики. На первый взгляд может показаться, что в  $k$ -значной логике не



возникает принципиально новых вопросов математического характера. Однако, как показали глубокие исследования Е. Поста [203, 204], С. В. Яблонского [193—195], Ю. И. Янова, А. А. Мучника и др. появляется ряд новых явлений и свойств, во многом еще не исследованных. Отличительны, например, теоремы о существовании при  $k \geq 3$  замкнутых множеств, не имеющих конечного базиса; о невозможности представления некоторых функций в виде полиномов типа Жегалкина, если  $k$  не простое число; о существовании континуума различных замкнутых множеств.

Существование континуума различных замкнутых классов в  $k$ -значной логике свидетельствует о том, что бессмысленно идти по пути изучения этих множеств путем последовательного выбора их наугад. Либо нужен тот или иной обобщающий подход, который приводил бы к их классификации по общим признакам, либо замкнутые множества должны изучаться по мере необходимости в зависимости от того, насколько они полезны в других областях. Именно последнее — полезность с точки зрения теории  $R$ -функций (чему посвящены последующие главы) — привело к рассмотрению ряда замкнутых множеств  $k$ -значной логики.

Благодаря  $R$ -функциям методы дискретного анализа, играющие важную роль в развитии вычислительной техники и теории сложных управляющих систем, получили новые неожиданные приложения в непрерывном анализе, и в первую очередь в математической физике (точнее, в той ее части, которая связана с вопросами исследования и расчета различных типов физико-механических полей: температурных, электромагнитных, деформационных, силовых и др.).

Будем рассматривать множество  $\mathfrak{F}(B_k)$  правильных функций с алфавитом  $B_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ , которые в § 6 названы функциями  $k$ -значной логики. Рассмотрим вначале одно- и двухместные функции, которые играют роль основных элементарных операций в  $k$ -значной логике.

Функции  $F_1 \equiv 0$ ;  $F_2 \equiv 1$ ; ...;  $F_k \equiv k-1$ , сохраняющие постоянное значение независимо от выбора аргументов, называются *константами*  $k$ -значной логики.

Из функций одного аргумента наиболее важные — *характеристические функции*  $\Phi_i(X)$ ,  $i \in B_k$ ,

$$\Phi_i(X) = \begin{cases} k-1, & X = i; \\ 0, & X \neq i, \end{cases} \quad (1.90)$$

функция отрицание (инверсия или операция Лукашевича)

$$\bar{X} = k-1 - X = \begin{cases} k-1 & X=0; \\ k-2 & X=1; \\ \dots & \dots \\ 0 & X=k-1 \end{cases} \quad (1.91)$$

и функция *циклического отрицания* («цикл»)

$$\tilde{X} = \begin{cases} 1 & X = 0; \\ 2 & X = 1; \\ \dots & \dots \\ k-1 & X = k-2; \\ 0 & X = k-1. \end{cases} \quad (1.92)$$

Последняя операция представляет собой прибавление (по модулю  $k$ ) единицы, т. е.  $\tilde{X} = X + 1 \pmod{k}$ .

Нетрудно убедиться в том, что при  $k = 2$ , т. е. при переходе к булевой алгебре, характеристическая функция  $\Phi_0(X)$ , отрицание  $\bar{X}$  и цикл  $\tilde{X}$  превращаются в обычную функцию отрицания  $\bar{X}$  двузначной логики. Характеристическая функция  $\Phi_1(X)$  при  $k = 2$  есть  $X$ .

Из функций двух переменных в первую очередь следует отметить  $k$ -значную дизъюнкцию  $X_1 \vee X_2$  и  $k$ -значную конъюнкцию  $X_1 \wedge X_2$ , которые определяются следующим образом

$$X_1 \vee X_2 \equiv \max(X_1, X_2); \quad X_1 \wedge X_2 \equiv \min(X_1, X_2), \\ (X_1, X_2 \in B_k). \quad (1.93)$$

Весьма интересна также функция Вебба [110]

$$W(X_1, X_2) \equiv \widehat{X}_1 \widetilde{\vee} \widetilde{X}_2. \quad (1.94)$$

Назовем некоторые наиболее употребительные системы функций  $k$ -значной логики [111]:

система Россера и Тьюкетта

$$H = \{0; 1; \dots, k-1; \Phi_i(X), i \in B_k; X_1 \vee X_2; X_1 \wedge X_2\}; \quad (1.95)$$

система Поста

$$H = \{X_1 \vee X_2; \tilde{X}\}; \quad (1.96)$$

система Вебба

$$H = \{W(X_1, X_2)\}. \quad (1.97)$$

Рассмотрим более подробно случай трехзначной логики  $B_3 = \{0, 1, 2\}$ . При  $k = 3$  функция  $n$  переменных  $Y = F(X_1, \dots, X_n)$  может быть задана таблицей с числом строк  $3^n$ . Существует  $3^{3^n}$  различных функций трехзначной логики, зависящих от  $n$  аргументов. Приведем значения введенных выше основных элементарных функций при  $k = 3$ :

$x$	$\Phi_0(x)$	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x)$	$\bar{x}$	$\tilde{x}$
0	2	0	0	2	1
1	0	2	0	1	2
2	0	0	2	0	0;

$x_1$	$x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$\Psi$	$x_1$	$x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$\Psi$
0	0	0	0	1	1	2	1	2	0
0	1	0	1	2	2	0	0	2	0
0	2	0	2	0	2	1	1	2	0
1	0	0	1	2	2	2	2	2	0
1	1	1	1	2					

Используя эти данные, нетрудно проверить справедливость следующих свойств конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и цикла трехзначной логики:

- 1°)  $\bar{\bar{X}} \equiv X$  — закон двойной инверсии.
- 2°)  $X \wedge 0 \equiv 0$ ;  
 3°)  $X \wedge 2 \equiv X$ ;  
 4°)  $X \vee 0 \equiv X$ ;  
 5°)  $X \vee 2 \equiv 2$ ;
- 6°)  $X \wedge X \equiv X$ ;  
 7°)  $X \vee X \equiv X$ ;
- 8°)  $\tilde{X} \equiv X$ ;
- 9°)  $\overline{X_1 \wedge X_2} \equiv \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2$ ;  
 10°)  $\overline{X_1 \vee X_2} \equiv \bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2$ ;
- 11°)  $X_1 \wedge (X_2 \wedge X_3) \equiv (X_1 \wedge X_2) \wedge X_3$ ;  
 12°)  $X_1 \vee (X_2 \vee X_3) \equiv (X_1 \vee X_2) \vee X_3$ ;
- 13°)  $(X_1 \wedge X_2) \vee X_3 \equiv (X_1 \vee X_3) \wedge (X_2 \vee X_3)$ ;  
 14°)  $(X_1 \vee X_2) \wedge X_3 \equiv (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$ ;
- 15°)  $1 \wedge X \wedge \bar{X} \equiv X \wedge \bar{X}$ ;  
 16°)  $(1 \vee F) \wedge X \wedge \bar{X} \equiv X \wedge \bar{X}$ ;  
 17°)  $(F \wedge \Phi) \vee F \equiv F$ ;  
 18°)  $(F \vee \Phi) \wedge F \equiv F$ ;

Располагая полными системами функций, можно решить задачу об аналитическом задании функций трехзначной логики. Можно, в частности, построить аналоги дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных форм (см. § 8).

Пусть  $N_1^{(j)}, \dots, N_n^{(j)}$  — некоторый набор чисел из  $B_3$ . Существует  $3^n$  различных таких наборов, поэтому будем считать, что  $j = 0, 1, \dots, 3^n - 1$ , причем различным  $j$  соответствуют различные наборы. (Нумерацию будем производить по возрастанию чисел  $N_1^{(j)}, N_2^{(j)}, \dots, N_n^{(j)}$  в троичной системе счисления.) Набору  $N_1^{(j)}, \dots, N_n^{(j)}$  можно поставить в соответствие функцию

$$F_j \equiv \Phi_{N_1^{(j)}}(X_1) \wedge \dots \wedge \Phi_{N_n^{(j)}}(X_n), \quad (1.98)$$

где  $\Phi_{S_i}(X_i)$  — характеристические функции. Функции вида (1.98) называются *характеристическими конъюнкциями*. Аналогично может быть построена *характеристическая дизъюнкция*

$$\Psi_I \equiv \Phi_{N_1^{(I)}}(X_1) \vee \dots \vee \Phi_{N_n^{(I)}}(X_n). \quad (1.99)$$

Нетрудно убедиться в том, что условие

$$\Phi_{N_1^{(I)}}(X_1) \wedge \dots \wedge \Phi_{N_n^{(I)}}(X_n) = 2 \quad (1.100)$$

выполняется тогда и только тогда, когда  $X_i = N_i^{(I)}$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Аналогично для характеристических дизъюнкций равенство

$$\Phi_{N_1^{(I)}}(X_1) \vee \dots \vee \Phi_{N_n^{(I)}}(X_n) = 2 \quad (1.101)$$

выполняется тогда и только тогда, когда удовлетворяется хотя бы одно из условий  $X_i = N_i^{(I)}$ .

**Теорема 1.** Любая функция трехзначной логики может быть представлена в следующей форме:

$$F \equiv \bigvee_{i=0}^{3^n-1} [\Psi_I(X_i) \wedge F(N_1^{(I)}, \dots, N_n^{(I)})]. \quad (1.102)$$

Справедливость этой теоремы вытекает непосредственно из свойств характеристических функций. В силу свойств  $2^\circ$  и  $4^\circ$  на тех наборах, на которых  $F = 0$ , соответствующая квадратная скобка в формуле (1.102) может быть опущена.

Формула (1.102) носит название *совершенной дизъюнктивной нормальной формы* функции  $\mathfrak{F}(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{F}(B_3)$ .

**Пример 1.** Рассмотрим функцию  $F(X_1, X_2)$ , заданную таблицей:

$X_1$	$X_2$	$F(X_1, X_2)$	$X_1$	$X_2$	$F(X_1, X_2)$
0	0	1	1	1	0
0	1	2	1	2	0
0	2	0	2	0	2
1	0	0	2	1	1
			2	2	0

Опуская те наборы, на которых  $F(X_1, X_2) = 0$ , согласно (1.102) получаем

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2) &\equiv [\Phi_0(X_1) \wedge \Phi_0(X_2) \wedge 1] \vee [\Phi_0(X_1) \wedge \Phi_1(X_2) \wedge 2] \vee \\ &\vee [\Phi_2(X_1) \wedge \Phi_0(X_2) \wedge 2] \vee [\Phi_2(X_1) \wedge \Phi_1(X_2) \wedge 1] \equiv \\ &\equiv [\Phi_0(X_1) \wedge \Phi_0(X_2) \wedge 1] \vee [\Phi_0(X_1) \wedge \Phi_1(X_2)] \vee [\Phi_2(X_1) \wedge \Phi_0(X_2)] \vee \\ &\vee [\Phi_2(X_1) \wedge \Phi_1(X_2) \wedge 1]. \end{aligned} \quad (1.103)$$

Аналогично строится совершенная конъюнктивная нормальная форма функций трехзначной логики:

$$F \equiv \bigwedge_{j=0}^{3^n-1} [\Psi_j \vee F(N_1^{(j)}, \dots, N_n^{(j)})]. \quad (1.104)$$

**Пример 2.** Функция  $F(X_1, X_2)$ , заданная таблицей (см. пример 1), согласно (1.104) может быть представлена в следующей к. н. ф.:

$$F(X_1, X_2) \equiv [\Psi_0(X_1) \vee \Psi_0(X_2) \vee 1] \wedge [\Psi_0(X_1) \vee \Psi_1(X_2) \vee 2] \wedge$$

$$\begin{aligned} & \wedge [\Psi_0(X_1) \vee \Psi_2(X_2) \vee 0] \wedge [\Psi_1(X_1) \vee \Psi_0(X_2) \vee 0] \wedge \\ & \wedge [\Psi_1(X_1) \vee \Psi_1(X_2) \vee 0] \wedge [\Psi_1(X_1) \vee \Psi_2(X_2) \vee 0] \wedge \\ & \wedge [\Psi_2(X_1) \vee \Psi_0(X_2) \vee 2] \wedge [\Psi_2(X_1) \vee \Psi_1(X_2) \vee 1] \wedge \\ & \wedge [\Psi_2(X_1) \vee \Psi_2(X_2) \vee 0]. \end{aligned}$$

Учитывая свойства 4°, 5° и 7°, последнюю формулу можем преобразовать к виду

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2) \equiv & [\Psi_0(X_1) \vee \Psi_0(X_2) \vee 1] \wedge [\Psi_0(X_1) \vee \Psi_2(X_2)] \wedge \\ & \wedge [\Psi_1(X_1) \vee \Psi_0(X_2)] \wedge [\Psi_1(X_1) \vee \Psi_1(X_2)] \wedge [\Psi_1(X_1) \vee \Psi_2(X_2)] \wedge \\ & \wedge [\Psi_2(X_1) \vee \Psi_1(X_2) \vee 1] \wedge [\Psi_2(X_1) \vee \Psi_2(X_2)]. \quad (1.105) \end{aligned}$$

#### § 14. Некоторые замкнутые функциональные множества

1. Вначале рассмотрим некоторые функциональные множества из  $C(\mathbb{R}^n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Пусть  $f_0: \mathbb{X}^n \rightarrow \mathbb{X}$ ,  $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$  — правильная функция с алфавитом  $\mathbb{X}$  (т. е.  $f_0 \in \mathfrak{F}(\mathbb{X})$ ).

**Определение 1.** Множество  $P\{f_0\}$  всех функций вида  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , которые совпадают с функцией  $f_0$  на множестве  $\mathbb{X}^n$ ,  $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$  (т. е.  $f|_{\mathbb{X}^n} = f_0$ ), назовем пучком функций, порожденным функцией  $f_0$  над множеством  $\mathbb{X}$ .

Рассмотренные в настоящем параграфе пучки функций являются элементарным прообразом пучков функций, которые будут удовлетворять крайевым условиям различного типа в граничных точках областей для уравнений с частными производными (гл. 2, 3).

**Лемма 1.** Пусть а)  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_l: \mathbb{R}^{n_l} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $l = 1, \dots, m$ );

$$\text{б) } f, \varphi_l \in \mathfrak{F}(\mathbb{X});$$

$$\text{в) } f^* \in P\{f\}; \quad \varphi_l^* \in P\{\varphi_l\}.$$

Тогда функция

$$\begin{aligned} \Psi(x_{11}, \dots, x_{1n_1}, x_{21}, \dots, x_{2n_2}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn_m}) & \equiv \\ & \equiv f^*[\varphi_1^*(x_{11}, \dots, x_{1n_1}), \dots, \varphi_m^*(x_{m1}, \dots, x_{mn_m})], \quad (1.106) \end{aligned}$$

аргументы которой не все обязательно различные, принадлежит пучку

$$P\{f[\varphi_1(x_{11}, \dots, x_{1n_1}), \dots, \varphi_m(x_{m1}, \dots, x_{mn_m})]\}.$$

**Доказательство.** Из условия «в» следует, что  $f^*|_{\mathbb{X}^m} \equiv f; \varphi_l^*|_{\mathbb{X}^{n_l}} \equiv \varphi_l$ . Пусть  $x'_1, \dots, x'_2$  — аргументы функции (1.106), различающиеся между собой. Тогда  $\Psi(x'_1, \dots, x'_2) |_{\mathbb{X}^m} \equiv f[\varphi_1^*|_{\mathbb{X}^{n_1}}, \dots, \varphi_m^*|_{\mathbb{X}^{n_m}}] \equiv f(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ . Следовательно,  $\Psi \in P\{f(\varphi_1, \dots, \varphi_m)\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{M}_0 \subset F(\mathbb{X})$  — замкнутое подмножество множества правильных функций с алфавитом  $\mathbb{X}$ , а система функций  $H = \{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathfrak{M}_0$  полна в  $\mathfrak{M}_0$ . Тогда, какова бы ни была система  $H^* = \{f_1^*, \dots, f_n^*\}$  функций, принадлежащих пучкам  $P\{f_l\}$  ( $l = 1, \dots, n$ ) соответственно, для всякой функции  $\Psi \in \mathfrak{M}_0$  выполняется условие

$$P\{\Psi\} \cap \mathfrak{M}(H^*) \neq \emptyset, \quad (1.107)$$

где  $\mathfrak{M}(H^*)$  — множество  $H^*$ -реализуемых функций (§ 4). (Другими словами: в пучке  $P\{\Psi\}$  имеется по крайней мере одна суперпозиция функций  $f_l^*$ .)

**Доказательство.** Так как по условию теоремы система  $H$  является полной по отношению к множеству  $\mathfrak{M}_0$ , для всякой функции  $\Psi \in \mathfrak{M}_0$  найдется

такая суперпозиция  $X$  функций  $f_i$ , что  $\Psi = X(f_1, \dots, f_n)$ . Произведем в этой суперпозиции замену

$$\left( \begin{matrix} f_1, \dots, f_n \\ f_1^*, \dots, f_n^* \end{matrix} \right).$$

В результате получим функцию  $\Psi^* = X(f_1^*, \dots, f_n^*)$ . Так как  $f_i^* \mid \mathbb{X}^n i = f_i$  ( $n_i$  — число аргументов функции  $f_i^*$ ), имеем  $X(f_1^*, \dots, f_n^*) \mid \mathbb{X}^s = \Psi^* \mid \mathbb{X}^s \equiv \Psi$ , где  $s$  — число различающихся между собой аргументов функции  $\Psi^*$ . Таким образом,  $\Psi^* \in P(\Psi)$ , что и требовалось доказать.

Рассмотрим множество пучков, порождаемых среди функций вида  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  функциями  $k$ -значной логики.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$\omega(x_1, x_2) = \frac{1}{4} [2k^2 - 4k + 4 - (k-2)(x_1 + x_2 + |x_2 - x_1|) - \\ - |k(x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|) + 4k - 2k^2|] \quad (1.108)$$

принадлежит  $C(\mathbb{R}^2)$  и  $\omega(x_1, x_2) \mid B_k^2 = W(X_1, X_2)$ , где  $W(X_1, X_2)$  — функция Вебба. Из теоремы 1 и полноты системы (1.52) следует, что какова бы ни была функция  $F(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{F}(B_k)$ , путем образования суперпозиций функции  $\omega(x_1, x_2)$  может быть построена такая функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in C(\mathbb{R}^n)$ , которая принадлежит пучку  $P\{F\}$ .

Функции, аналогичные (1.108), легко построить для других полных систем в  $k$ -значной логике. Например, система непрерывных функций, совпадающая на наборе значений аргументов из  $B_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$  с полной системой Россера и Тьюккетта, может быть выбрана в виде

$$\left\{ \begin{aligned} &0; 1; \dots; k-1; \varphi_i(x) \equiv \frac{k-1}{2} (1 - |x-i| + |1 - |x-i||); \\ &x_1 \wedge_1 x_2 \equiv \frac{1}{2} (x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|); \quad x_1 \vee_1 x_2 \equiv \frac{1}{2} (x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|) \end{aligned} \right\}. \quad (1.109)$$

При этом  $\varphi_i(x) \mid B_k = \Phi_i(X)$ ;  $x_1 \wedge_1 x_2 \mid B_k^2 = X_1 \wedge X_2$ ;  $(x_1 \vee_1 x_2) \mid B_k^2 = X_1 \vee X_2$ . Функции (1.108) — (1.109) построены в рамках базисной системы  $H_1 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, |x|, a \forall a \in \mathbb{R}\}$ . Нетрудно построить аналогичные формулы с помощью базисных систем более высокой гладкости и даже в виде полиномов (т. е. суперпозиций системы  $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, \text{const}\}$ ). Важно не само доказательство существования достаточно гладких продолжений функций  $k$ -значной логики с алфавита  $B_k$  на всю числовую ось  $\mathbb{R}$ , а то обстоятельство, что указывается конкретный эффективный подход к фактическому построению таких функций. Например, представив произвольную функцию трехзначной логики ( $k=3$ ) в виде дизъюнктивной нормальной формы (1.102), а затем, заменив в ней функции  $\Phi_i(X)$  на  $\varphi_i(x)$ , операции  $X_1 \wedge X_2$ ,  $X_1 \vee X_2$  на операции  $x_1 \wedge_1 x_2$ ,  $x_1 \vee_1 x_2$ , определяемые формулами (1.109), получим непрерывную функцию  $f$ , принадлежащую пучку, порождаемому данной функцией  $F$  трехзначной логики:  $f \in P(F)$ . Естественно, что если формулы (1.109) будут выбраны в виде полиномов, то и полученная функция  $f$  также окажется полиномом. Система же (1.109), составленная из непрерывных сплайнов [101], приведет, естественно, к представлению  $f$  в виде непрерывного сплайна (т. е. кусочно-полиномиальной непрерывной везде функции).

2. Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x^0 = \{x_1^0, \dots, x_n^0\} \in \mathbb{R}^n$ .

**Определение 2.** Функция  $f$  называется  $h$ -непрерывной в точке  $x^0$ , если  $|f(x) - f(x^0)| < h$  для всех  $x$ , таких что  $|x_i - x_i^0| < h$ . Функцию,  $h$ -непрерывную в каждой точке некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , будем называть  $h$ -непрерывной в  $\Omega$ .

**Пример 1.** Функция  $y = x + \frac{\pi}{\pi} \left| \sin \frac{\pi x}{h} \right|$  —  $h$ -непрерывна везде в  $\mathbb{R}$  при любом  $h$ . Действительно, так как

$$\left| \sin \frac{\pi(x+\Delta x)}{h} \right| - \left| \sin \frac{\pi x}{h} \right| \leq \left| \sin \frac{\pi(x+\Delta x)}{h} + \sin \frac{\pi x}{h} \right| \leq \\ \leq 2 \left| \sin \frac{2\pi x}{2h} \cos \frac{\pi \Delta x}{2h} \right| = 2 \left| \sin \frac{2\pi x}{2h} \sin \frac{\pi h - \pi \Delta x}{2h} \right| \leq \frac{\pi(h - \Delta x)}{h},$$

имеем

$$|\Delta y| = \left| x + \Delta x + \frac{h}{\pi} \left| \sin \frac{\pi(x+\Delta x)}{h} \right| - x - \frac{h}{\pi} \left| \sin \frac{\pi x}{h} \right| \right| = \\ = \left| \Delta x + \frac{h}{\pi} \left( \left| \sin \frac{\pi(x+\Delta x)}{h} \right| - \left| \sin \frac{\pi x}{h} \right| \right) \right| \leq h.$$

**Пример 2.** Функция  $y = \sin x_1 \sin x_2$  является  $h$ -непрерывной везде в  $\mathbb{R}^2$  при любом  $h$ . Действительно,

$$|\Delta y| = |\sin(x_1 + \Delta x_1) \sin(x_2 + \Delta x_2) - \sin x_1 \sin x_2| \leq \\ \leq |\sin(x_1 + x_2 + \theta_1 \Delta x_1 + \theta_2 \Delta x_2)| \max(|\Delta x_1|, |\Delta x_2|) \leq h,$$

где  $0 \leq \theta_i \leq 1$ .

**Теорема 2.** Множество  $C[h]$  функций, везде определенных и  $h$ -непрерывных в  $\mathbb{R}^n$  ( $h > 0$  — фиксированное число), замкнуто.

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$\Psi(x_{11}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_m, \dots, x_{mn_m}) = \\ = f[\Phi_1(x_{11}, \dots, x_{1n_1}), \dots, \Phi_m(x_m, \dots, x_{mn_m})], \quad (1.110)$$

представляющую собой суперпозицию  $h$ -непрерывных функций

$$f(x_1, \dots, x_m), \quad \Phi_l(x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \quad (l = 1, \dots, m).$$

В окрестности произвольной точки  $x^0 = (x_{11}^0, \dots, x_{1n_1}^0, \dots, x_m^0, \dots, x_{mn_m}^0)$  вследствие того, что  $\Phi_l \in C[h]$ , выполняются неравенства

$$|\Phi_l(x_{l1}^0, \dots, x_{ln_l}^0) - \Phi_l(x_{l1}, \dots, x_{ln_l})| < h.$$

Тогда, так как  $f \in C[h]$ , имеем  $|f(x_1^0, \dots, x_m^0) - f(x_1, \dots, x_m)| \leq h$ , где  $x_i^0 = (x_{i1}^0, \dots, x_{in_i}^0)$ ,  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in_i})$ . Теорема доказана.

Заметим, что если  $h < h_i$ , то из  $h$ -непрерывности функции  $f$ , вообще, не следует ее  $h_i$ -непрерывность. Например, функция  $y = x + \frac{h}{\pi} \left| \sin \frac{\pi x}{h} \right|$ , рассмотренная в примере 1, не является  $h_i$ -непрерывной при любом  $h_i \neq kh$  ( $k > 0$  — целое). В то же время, если  $h_i = kh$ , то эта функция  $h_i$  непрерывна. Оказывается, справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** Если функция  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $h_i$ -непрерывна (для  $i=1, \dots, m$ ) везде в  $\mathbb{R}^n$ , то она также  $(k_1 h_1 + \dots + k_m h_m)$ -непрерывна везде в  $\mathbb{R}^n$ ,  $(k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m$ .

**Доказательство.** Достаточно показать, что если  $f \in C[h']$  и  $f \in C[h'']$ , где  $h'$  и  $h''$  не обязательно различные, то  $f \in C[h' + h'']$ . В  $(h' + h'')$ -окрестности  $\{|x_i^0 - x_i| < h' + h''\}$  произвольной точки  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  возьмем любую точку  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Отрезок  $x^0 x$  разобьем на две части точкой  $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ , выбрав ее так, чтобы выполнялось отношение  $\|x^0 - x^{(1)}\| \leq h'$

$\|h' = \|x^0 - x\| : (h' + h^0)$ . Очевидны неравенства

$$|x_i^{(1)} - x_i^0| \leq h', \quad |x_i - x_i^{(1)}| \leq h^0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.111)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |f(x^0) - f(x)| &= |f(x^0) - f(x^{(1)}) + f(x^{(1)}) - f(x)| \leq \\ &\leq |f(x^0) - f(x^{(1)})| + |f(x^{(1)}) - f(x)| \leq h' + h^0. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Полагая, в частности,  $h' = h^0 = h$ , получаем, что функция  $2h$ -непрерывна. Полагая затем  $h^0 = 2h$ , получаем, что  $f$   $3h$ -непрерывна, и т. д. В итоге убеждаемся в справедливости теоремы.

**Следствие 1.** Если функция  $y = f(x)$   $h$ -непрерывна при любом  $h$  из интервала  $0 < h < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — сколь угодно малое число, то она непрерывна при любом  $h$ .

**Следствие 2.** Если функция  $f$   $h$ -непрерывна для всех  $h$ , заключенных в интервале  $0 \leq a < h < b$ , то она  $h$ -непрерывна для всякого  $h \geq Na$ , где  $N$  — целая часть числа  $\frac{b-a}{a}$ .

3. Пусть  $\mathfrak{A}$  есть множество, представляющее собой объединение пучков функций вида  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , порождаемых функциями  $F: B_k^h \rightarrow B_k$   $k$ -значной логики для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Так как множество  $\mathfrak{F}(B_k)$  функций  $k$ -значной логики замкнуто, согласно лемме 1 замкнутым является множество  $\mathfrak{A}$ . В то же время замкнутым является множество  $C[h]$   $h$ -непрерывных функций. Тогда согласно теореме 1 § 4 множество  $\mathfrak{A}_h^* = \mathfrak{A} \cap C[h]$  также замкнуто.

Вообще, не каждый из пучков, порождаемых функциями  $k$ -значной логики, пересекается с множеством  $C[h]$ . Например, пучок функций, порождаемых функцией Вебба (1.52)  $W(X_1, X_2)$  при  $k \geq 3$ , не содержит 1-непрерывных функций. Действительно, в точке  $(k-2, k-2)$  эта функция принимает значение  $k-1$ , а в точке  $(k-1, k-1)$ , находящейся в 1-окрестности точки  $(k-2, k-2)$ , принимает значение нуль. Таким образом,

$$|W(k-2, k-2) - W(k-1, k-1)| > 1$$

■ условие 1-непрерывности нарушается.

Рассмотрим множество  $\mathfrak{A}_k^h$  тех функций  $k$ -значной логики, которые в соответствующих им пучках содержат функции из множества  $\mathfrak{A}_h^*$ .

**Теорема 4.** Множество  $\mathfrak{A}_k^h$  замкнуто.

**Доказательство.** Пусть  $H = \{\Phi_1, \dots, \Phi_m\}$  — некоторая система функций  $k$ -значной логики из  $\mathfrak{A}_k^h$ , а  $F$  — какая-либо их суперпозиция,  $F = \chi[\Phi_1, \dots, \Phi_m]$ . Тогда в множестве  $\mathfrak{A}_h^*$  содержится такая система  $H^*$   $h$ -непрерывных функций,  $H^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ , что  $\varphi_l \in P[\Phi_l]$  ( $l = 1, \dots, m$ ). Составим суперпозицию  $f = \chi[\varphi_1, \dots, \varphi_m]$ , заменяя в суперпозиции  $F = \chi[\Phi_1, \dots, \Phi_m]$  функции системы  $H$  соответствующими функциями системы  $H^*$ . Согласно лемме 1  $f \in P[H^*]$ , а так как множество  $\mathfrak{A}_h^*$  функционально замкнуто, имеем  $f \in \mathfrak{A}_h^*$ . Тогда по определению множества  $\mathfrak{A}_k^h$   $F \in \mathfrak{A}_k^h$ , что и является доказательством теоремы.

Введем множества  $J_k^s$  и  $Q_k^s$ .

**Определение 3.** Функция  $F(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{F}(B_k)$  принадлежит множеству  $J_k^s$ , если  $F(X_1, \dots, X_n) \neq s$ , когда все  $X_i \neq s$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $s \in B_k$ .

**Теорема 5.** Множество  $J_k^s$  замкнуто.

**Доказательство.** Пусть  $\Phi(X_1, \dots, X_m) \in J_k^s$ ,  $F_i(X_{1i}, \dots, X_{ni}) \in J_k^s$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Покажем, что множеству  $J_k^s$  принадлежит также суперпозиция

$$\Phi^* = \Phi[F_1(X_{11}, \dots, X_{1n_1}), \dots, F_m(X_{m1}, \dots, X_{mn_m})]. \quad (1.113)$$



Пусть  $X_{11}^0, \dots, X_{1n_1}^0, \dots, X_{m1}^0, \dots, X_{mn_m}^0 \in B_k$ , но  $X_{ij} \neq s$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n_i$ ). Тогда, так как  $F_i \in J_k^s$ , имеем  $F(X_{11}^0, \dots, X_{1n_1}^0) \neq s$  для всех  $i$ . Учтывая, что  $\Phi \in J_k^s$ , получаем

$$\Phi [F_1(X_{11}^0, \dots, X_{1n_1}^0), \dots, F_m(X_{m1}^0, \dots, X_{mn_m}^0)] \neq s,$$

т. е. функция  $\Phi^* \in J_k^s$ . Теорема доказана.

**Определение 4.** Функция  $F(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{F}(B_k)$  принадлежит множеству  $Q_k^s$ , если она обладает свойством: когда  $F(X_1^0, \dots, X_n^0) \neq s \in B_k$ , а набор  $X_1^0, \dots, X_n^0$  в некоторых разрядах содержит  $s$ , функция  $F$  сохраняет значение  $F(X_1^0, \dots, X_n^0)$  на всех наборах, полученных из набора  $X_1^0, \dots, X_n^0$  заменой в каких-либо разрядах значений  $s$  другими значениями из  $B_k$ .

**Теорема 6.** Множество  $Q_k^s$  замкнуто.

**Доказательство.** Пусть  $\Phi(X_1, \dots, X_m) \in Q_k^s$ ,  $F_i(X_{i1}, \dots, X_{in_i}) \in Q_k^s$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Построим суперпозицию (1.113). Рассмотрим набор  $X_{11}^0, \dots, X_{1n_1}^0, \dots, X_{m1}^0, \dots, X_{mn_m}^0 \in B_k$ , в котором некоторые  $X_{ij}^0 = s$ , и набор  $X'_{11}, \dots, X'_{1n_1}, \dots, X'_{m1}, \dots, X'_{mn_m} \in B_k$ , полученный из предыдущего набора заменой всех или части значений  $s$  другими значениями. Тогда в силу условия  $F_i \in Q_k^s$   $F_i(X'_{i1}, \dots, X'_{in_i}) = F_i(X_{i1}^0, \dots, X_{in_i}^0)$ , если  $F_i(X_{i1}^0, \dots, X_{in_i}^0) \neq s$  и, возможно,  $F_i(X'_{i1}, \dots, X'_{in_i}) \neq F_i(X_{i1}^0, \dots, X_{in_i}^0)$ , когда  $F_i(X_{i1}^0, \dots, X_{in_i}^0) = s$ . Так как  $\Phi(X_1, \dots, X_m) \in Q_k^s$ , суперпозиция (1.113) также принадлежит  $Q_k^s$ . Теорема доказана.

Рассмотрим более детально множества  $Q_3^1$ ,  $J_3^1$  и  $\mathfrak{N}_3^1$ . Множество  $J_3^1$  содержит функции трехзначной логики, которые на наборах значений аргументов, не содержащих единиц ни в одном разряде, не принимают значение единицы.

**Пример 3.** Инверсия  $\bar{X}$ , характеристические функции  $\Phi_i(X)$  (см. табл. 11), константы 0 и 2 принадлежат множеству  $J_3^1$ . Множество  $\mathfrak{N}_3^1$  состоит из 1-непрерывных функций трехзначной логики.

**Пример 4.** Функция  $F(X)$ , равная нулю, если  $X = 0$  или  $X = 1$ , и равная единице, если  $X = 2$ , принадлежит  $\mathfrak{N}_3^1$ . Этому множеству принадлежат также инверсия  $\bar{X}$ , конъюнкция  $X_1 \wedge X_2$  и дизъюнкция  $X_1 \vee X_2$  трехзначной логики.

Пусть среди чисел  $X_1^0, \dots, X_n^0 \in B_3$  имеются единицы, а набор  $X'_1, \dots, X'_n \in B_3$  взят из 1-окрестности точки  $(X_1^0, \dots, X_n^0)$  так, что  $X'_i = X_i^0$ , если  $X_i^0 \neq 1$ . Тогда функция  $F \in Q_3^1$ , если для всяких пар такого типа наборов  $F(X_1^0, \dots, X_n^0) = F(X'_1, \dots, X'_n)$ , когда  $F(X_1^0, \dots, X_n^0) \neq 1$ .

**Пример 5.** Инверсия  $\bar{X}$ , константы 0, 1, 2, дизъюнкция  $X_1 \vee X_2$ , конъюнкция  $X_1 \wedge X_2$  трехзначной логики принадлежат  $Q_3^1$ . Из примеров 3—5 видно, что множества  $J_3^1$  и  $Q_3^1$  пересекаются и множество  $J_3^1$  не содержится ни в одном из множеств  $Q_3^1$  и  $\mathfrak{N}_3^1$  (рис. 24).

**Теорема 7.** Множество  $Q_3^1$  содержится в  $\mathfrak{N}_3^1$ .

**Доказательство.** Предположим противное. Тогда найдется такая функция  $F(X_1, \dots, X_n) \in Q_3^1$ , что  $F \notin \mathfrak{N}_3^1$ . Следовательно, имеется такая пара точек  $(X_1^0, \dots, X_n^0)$  и  $(X'_1, \dots, X'_n)$ , что  $|X'_i - X_i^0| \leq 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ), но

$F(X_1^0, \dots, X_n^0) = 0$ , а  $F(X_1^1, \dots, X_n^1) = 2$ . Так как указанные точки находятся в 1-окрестности друг от друга, те координаты, которыми они различаются, у одной точки есть единицы, а у другой — нули или двойки (или наоборот). Построим точку  $(X_1^2, \dots, X_n^2)$  по следующему правилу:

а) если  $X_i^0 = X_i^1$ , то  $X_i^2 = X_i^0$ ; б) если  $X_i^0 \neq X_i^1$ , то  $X_i^2$  совпадает с тем из чисел  $X_i^0$  или  $X_i^1$ , которое отличается от единицы. Тогда точка  $(X_1^2, \dots, X_n^2)$  находится в 1-окрестности точек  $(X_1^0, \dots, X_n^0)$  и  $(X_1^1, \dots, X_n^1)$  и может быть получена из этих точек заменой координат этих точек, равных единице, на нуль и два. Поскольку  $F \in Q_3^1$ , то должны выполняться условия  $F(X_1^1, \dots, X_n^1) = F(X_1^0, \dots, X_n^0) = 0$  и  $F(X_1^2, \dots, X_n^2) = F(X_1^1, \dots, X_n^1) = 2$ , что невозможно. Теорема доказана.

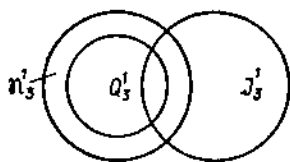


Рис. 24.

## § 15. Полные системы функций

в множествах  $\mathfrak{N}_3^1$  и  $Q_3^1$

### Аналитическое представление функций из $Q_3^1$

Результаты настоящего параграфа будут использованы при построении основных систем  $R$ -функций.

**Теорема 1.** Полную систему в множестве  $\mathfrak{N}_3^1$  составляют функции

$$(\bar{X}, X_1 \vee X_2, F(X)); \quad X \in B_3, \quad (1.114)$$

где

$$F(X) = \begin{cases} 1, & X = 0; \\ 0, & (X = 1) \cup (X = 2). \end{cases} \quad (1.115)$$

**Доказательство.** Согласно (1.102) всякая функция трехзначной логики может быть представлена в виде

$$F(X_1, \dots, X_n) = \left\{ \bigvee_i [2 \wedge \Psi_i(X_1, \dots, X_n)] \vee \bigvee_j [1 \wedge \Psi_j(X_1, \dots, X_n)] \right\}, \quad (1.116)$$

где  $\Psi_i$  и  $\Psi_j$  — характеристические конъюнкции (т. е. формулы вида (1.98)), причем  $\Psi_i$  соответствуют точкам, в которых  $F = 2$ , а  $\Psi_j$  — точкам, в которых  $F = 1$ . (Для точек, в которых  $F = 0$ , соответствующие выражения берутся в конъюнкции с нулем и могут быть опущены.)

Конъюнкцию  $1 \wedge \Psi_j$  можно представить в виде

$$1 \wedge \Psi_j = [1 \wedge \Phi_{\alpha_1^j}(X_1)] \wedge \dots \wedge [1 \wedge \Phi_{\alpha_n^j}(X_n)], \quad (1.117)$$

где  $\Phi_{\alpha_i^j}(X_i)$  — характеристические функции, а  $\alpha_1^j, \dots, \alpha_n^j$  — тот набор, на котором  $\Psi_j = 2$  (т. е.  $\alpha_i^j = X_i$ ). Но функции  $1 \wedge \Phi_{X_i}(X_i)$

исчерпываются функциями  $\xi_0(X)$ ,  $\xi_1(X)$  и  $\xi_2(X)$ , значения которых следующие:

$x$	$\xi_0$	$\xi_1$	$\xi_2$
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1

Предположим, что функция  $F$  является 1-непрерывной. Рассмотрим функцию  $2 \wedge \Psi'_j(X_1, \dots, X_n)$ . Она принимает значение два на некотором наборе  $X^j_1, \dots, X^j_n$ , на котором функция  $F(X_1, \dots, X_n)$  принимает значение два (индекс  $j$  здесь пробегает номера всех таких наборов). Построим функцию  $A_j(X_1, \dots, X_n)$ , которая в точке  $(X^j_1, \dots, X^j_n)$  принимает значение два, в точках ее 1-окрестности — значение единица, а в остальных точках — нуль.

(Из 1-непрерывности функции  $F(X_1, \dots, X_n)$  следует, что замена в формуле (1.116)  $2 \wedge \Psi'_j$  функциями  $A_j$  не нарушит равенства.)

Функцию  $A_j(X_1, \dots, X_n)$  можно представить в виде

$$A_j(X_1, \dots, X_n) \equiv B_{x^j_1}(X_1) \wedge \dots \wedge B_{x^j_n}(X_n), \quad (1.118)$$

где  $B_{x^j_i}(X_i)$  — функции, обладающие свойствами

а)  $B_{x^j_i}(X^j_i) = 2$ ;

б) в 1-окрестности  $X^j_i$   $B_{x^j_i}(X_i) = 1$ , а вне этой окрестности  $B_{x^j_i}(X_i) = 0$ .

Ясно, что все  $B_{x^j_i}(X)$  исчерпываются тремя видами функций:  $\eta_0(X)$ ,  $\eta_1(X)$  и  $\eta_2(X)$ , значения которых следующие:

$x$	$\eta_0$	$\eta_1$	$\eta_2$
0	2	1	0
1	1	2	1
2	0	1	2

Итак, всякая 1-непрерывная функция трехзначной логики может быть представлена в виде суперпозиции функций

$$X_1 \wedge X_2; \quad X_1 \vee X_2; \quad \xi_0(X); \quad \xi_1(X); \quad \xi_2(X); \quad \eta_0(X); \\ \eta_1(X); \quad \eta_2(X), \quad (1.119)$$

но

$$\xi_0(X) \equiv F(X); \quad \xi_1(X) \equiv X \wedge \bar{X}; \quad \xi_2(X) \equiv F[F(X) \vee (X \wedge \bar{X})]; \quad (1.120)$$

$$\eta_0(X) \equiv \bar{X}; \quad \eta_1(X) \equiv \overline{F(X) \vee \xi_2(X)}; \quad \eta_2(X) \equiv X,$$

что и доказывает теорему 1.

**Теорема 2.** Если  $F(X_1, \dots, X_n) \in Q_3^1$ , то справедливо разложение

$$\begin{aligned}
 F(X_1, \dots, X_n) \equiv & [F(X_1, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n) \wedge \\
 & \wedge X_i \wedge \bar{X}_i] \vee [F(X_1, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n) \wedge \bar{X}_i] \vee \\
 & \vee [F(X_1, \dots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \dots, X_n) \wedge X_i] \vee \\
 & \vee [F(X_1, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n) \wedge \\
 & \wedge F(X_1, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n) \wedge \\
 & \wedge F(X_1, \dots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \dots, X_n)]. \quad (1.121)
 \end{aligned}$$

**Доказательство.** Достаточно показать, что значения левой и правой частей равенства (1.121) совпадают в точках

$$\begin{aligned}
 X^0 &= (X_1, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n); \\
 X^1 &= (X_1, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n); \\
 X^2 &= (X_1, \dots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \dots, X_n).
 \end{aligned} \quad (1.122)$$

Для сокращения записи обозначим

$$F(X_1, \dots, X_{i-1}, s, X_{i+1}, \dots, X_n) = F_s, \quad (s = 0, 1, 2).$$

Подставим точку  $X^0$  в правую часть формулы (1.121):

$$\begin{aligned}
 (F_1 \wedge 0 \wedge \bar{0}) \vee (F_0 \wedge \bar{0}) \vee (F_2 \wedge 0) \vee (F_0 \wedge F_1 \wedge F_2) \equiv \\
 \equiv 0 \vee F_0 \vee 0 \vee (F_0 \wedge F_1 \wedge F_2) \equiv F_0 \vee [F_0 \wedge (F_1 \wedge F_2)] \equiv F_0.
 \end{aligned}$$

В точке  $X^2$  получаем

$$\begin{aligned}
 (F_1 \wedge 2 \wedge 0) \vee (F_0 \wedge 0) \vee (F_2 \wedge 2) \vee (F_0 \wedge F_1 \wedge F_2) \equiv \\
 \equiv 0 \vee 0 \vee F_2 \vee [F_2 \wedge (F_0 \wedge F_1)] \equiv F_2.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим значение функции (1.121) в точке  $X^1$ . Пусть  $F_1 = 0$ . Тогда, поскольку  $F \in Q_3^1$ , имеем

$$\begin{aligned}
 F_0 &\equiv F(X_1, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n) \equiv \\
 &\equiv F(X_1, \dots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \dots, X_n) = F_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Поэтому правая часть формулы (1.121) имеет вид

$$(0 \wedge 1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0 \wedge 0) = 0 = F_1.$$

Пусть  $F_1 = 1$ . Тогда аналогично

$$(1 \wedge 1 \wedge 1) \vee (F_0 \wedge 1) \vee (F_2 \wedge 1) \vee (F_0 \wedge 1 \wedge F_2) = 1 = F_1.$$

Если  $F_1 = 2$ , то получаем  $(2 \wedge 1 \wedge 1) \vee (2 \wedge 1) \vee (2 \wedge 1) \vee (2 \wedge 2 \wedge 2) = 2 = F_1$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** В множестве  $Q_3^1$  система

$$H = \{0; 1; \bar{X}; X_1 \wedge X_2\} \quad (1.123)$$

является полной.

**Доказательство.** Покажем вначале, что все одноместные функции множества  $Q_3^1$  представлены в виде суперпозиций системы

(1.123). Существует  $3^3 = 27$  различных одноместных функций трехзначной логики. Значения этих функций следующие:

$X$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$	$F_{13}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

$F_{14}$	$F_{15}$	$F_{16}$	$F_{17}$	$F_{18}$	$F_{19}$	$F_{20}$	$F_{21}$	$F_{22}$	$F_{23}$	$F_{24}$	$F_{25}$	$F_{26}$	$F_{27}$
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Нетрудно убедиться в том, что 17 функций ( $F_1, F_2, F_4, F_5, F_{10}, F_{11}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{17}, F_{18}, F_{22}, F_{23}, F_{24}, F_{26}, F_{27}$ ) являются 1-непрерывными. Из них 11 ( $F_1, F_4, F_5, F_6, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{22}, F_{23}, F_{24}, F_{25}$ ) принадлежат множеству  $Q_3^1$ .

Легко проверить справедливость формул

$$\begin{aligned}
 F_1 &\equiv 0; & F_4 &= X \wedge \bar{X}; & F_5 &\equiv X \wedge 1; & F_6 &\equiv X; & F_{13} &\equiv \bar{X} \wedge 1; \\
 F_{14} &\equiv 1; & F_{15} &\equiv \bar{X} \wedge 1; & F_{22} &\equiv \bar{X}; & F_{23} &\equiv \bar{X} \wedge 1; & F_{24} &\equiv \bar{X} \wedge X; \\
 & & & & F_{27} &\equiv 2.
 \end{aligned}
 \tag{1.124}$$

Таким образом, одноместные операции принадлежат множеству  $\mathfrak{M}(H)$  суперпозиций  $H$ .

Предположим, что  $(n-1)$ -местные функции из  $Q_3^1$  принадлежат  $\mathfrak{M}(H)$ . Покажем, что этому же множеству принадлежат все  $n$ -местные функции из  $Q_3^1$ .

Пусть  $F(X_1, \dots, X_n) \in Q_3^1$ . Разложим эту функцию по одной из переменных по формуле (1.121). Очевидно, что в этом разложении будут использованы только операции  $X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2, \bar{X}$ , а также  $(n-1)$ -местные функции из  $Q_3^1$ , которые согласно допущению могут быть представлены в виде суперпозиций функций из  $H$ . Кроме того,  $X_1 \vee X_2 \equiv \bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2$ . Таким образом,  $F \in \mathfrak{M}(H)$ .

*Следствие.* Система

$$\{0; 1; \bar{X}; X_1 \vee X_2\} \subset Q_3^1 \tag{1.125}$$

полная в замкнутом множестве  $Q_3^1$ .

**Теорема 4.** Если функцию  $F(X_1, \dots, X_n) \in Q_3^1$  разложить в соответствии с теоремой 2 по всем аргументам  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), а затем в разложении вычеркнуть члены, содержащие  $X_i \wedge \bar{X}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), то полученная в результате функция  $F'(X_1, \dots, X_n)$  будет обладать свойством

$$F'(X_1, \dots, X_n) = F(X_1, \dots, X_n) \tag{1.126}$$

во всех точках в которых  $F \neq 1$ .

**Доказательство.** В силу условия  $F \in Q_3^1$ , при  $F(X_1, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n)$  равно нулю (или двум), выполняется

равенство  $F(X_1, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n) = F(X_1, \dots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \dots, X_n)$  нулю или двум. Поэтому при отбрасывании в (1.121) членов вида  $F(X_1, \dots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \dots, X_n) \wedge X_i \wedge \bar{X}_i$  оставшееся выражение будет принимать значение нуль (или два), если  $F(X_1, \dots, X_n) = 0$  (или два). Подобные действия можно произвести последовательно по каждому из аргументов. Теорема доказана.

Рассмотрим также множество  $P_3^1 = Q_3^1 \cap J_3^1$ . Среди функций, входящих в систему (1.125), только  $1 \notin J_3^1$ . Из числа функций (1.124) множеству  $J_3^1$  не принадлежат функции  $F_6, F_{13}, F_{14}, F_{15}$  и  $F_{23}$ . Следовательно, одноместные операции из  $J_3^1$  могут быть представлены в виде суперпозиций системы  $\{0, \bar{X}, X_1 \wedge X_2\}$ . Применяя, как и при доказательстве теоремы 3, метод математической индукции, приходим к следующей теореме.

**Теорема 5.** Система

$$H = \{0; \bar{X}; X_1 \wedge X_2\} \quad (1.127)$$

в множестве  $P_3^1$  полная.

## § 16. Предикатные уравнения.

### Замыкающие функции алгебры логики

Пусть  $F: \Omega \rightarrow B_k$  — определенная в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  функция,  $B_k = \{0; 1; \dots, k-1\}$ , а  $F^{-1}(i)$  — прообраз  $i \in B_k$ . Таким образом, задание функции  $F: \Omega \rightarrow B_k$  приводит к разбиению  $\Omega$  на  $k$  непересекающихся множеств  $\Omega_i = F^{-1}(i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . (Некоторые из этих множеств могут, вообще, оказаться пустыми.)

**Определение 1.** Функция  $Y = F: \Omega \rightarrow B_k$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , называется  $k$ -значным предикатом, определенным в области  $\Omega$ .

**Определение 2.** Уравнение

$$F(x_1, \dots, x_n) = i, \quad (1.128)$$

$i \in B_k$ , называется предикатным уравнением.

Очевидно, что предикатному уравнению (1.128) удовлетворяют координаты тех и только тех точек области  $\Omega$ , которые принадлежат множеству  $\Omega_i$ .

В дальнейшем в основном будем предполагать, что  $\Omega = \mathbb{X}^n$ ,  $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ , т. е. будем считать предикаты  $F(x_1, \dots, x_n)$  и соответственно предикатные уравнения (1.128) определенными на некотором «гиперкубе»  $n$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ . В частности, если  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ , областью определения  $F$  будет все пространство  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть  $F_i(x_1, \dots, x_n)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) —  $k$ -значные предикаты, а  $\Phi(X_1, \dots, X_m)$  — функция  $k$ -значной логики. Так как  $F_i \in B_k$ , допустима подстановка вместо аргументов  $X_i$  предикатов  $F_i$ . Таким образом, функция

$$Y = \Phi[F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n)] \quad (1.129)$$

является функцией вида  $Y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  и, следовательно, —  $k$ -значным предикатом.

Особую роль в дальнейшем будут играть двузначные и трехзначные предикаты.

Зададим на числовой оси  $\mathbb{R}$  двузначный предикат

$$S_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

График предиката  $Y = S_2(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , приведен на рис. 25. С помощью предиката  $S_2(t)$  можно каждой функции  $\omega(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , поставить в соответствие двузначный предикат

$$Y = S_2[\omega(x)]. \quad (1.130)$$

При этом предикатное уравнение

$$S_2[\omega(x)] = 1 \quad (1.131)$$

будет уравнением множества  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , на котором функция  $\omega$  неотрицательна, а уравнение

$$S_2[\omega(x)] = 0 \quad (1.132)$$

уравнением множества  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ , в котором функция отрицательна. Другими словами,  $Y = S_2[\omega(x)]$  есть характеристическая функция (§ 11) множества  $\Omega$ , а  $\Omega$  и  $\bar{\Omega}$  есть дополнения друг друга до  $\mathbb{R}^n$ , т. е.  $\Omega \cup \bar{\Omega} = \mathbb{R}^n$ .

**Пример 1.** Функция  $y = R^2 - x_1^2 - x_2^2$  соответствует разбиению плоскости  $\mathbb{R}^2$  на две области:  $\Omega = (R^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0)$  — круг (вместе со своей границей) радиуса  $R$  с центром в начале координат и  $\bar{\Omega}$  — внешность круга  $\Omega$ . Этой же функции в  $\mathbb{R}^3$  соответствуют круговой цилиндр  $\Omega$  радиуса  $R$  с осью  $Ox_3$  и его внешность  $\bar{\Omega}$ .

**Пример 2.** Пусть

$$\text{Dir}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \text{ — рациональное число;} \\ 0, & \text{если } t \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Тогда предикатное уравнение

$$\text{Dir}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) = 1$$

определяет множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , точки которого находятся на рациональном расстоянии от начала координат. Соответственно  $\bar{\Omega}$  — множество точек  $\mathbb{R}^3$ , которые находятся на иррациональных расстояниях от точки  $O(0, 0, 0)$ .

Множество  $\Omega$ , приведенное в примере 2, с прикладной точки зрения малоинтересно. Чтобы исключить такого рода множества, необходимо наложить на функцию  $\omega(x)$  некоторые ограничения.

Естественным ограничением является требование непрерывности функции  $\omega(x)$ . Рассмотрим, достаточно ли оно.

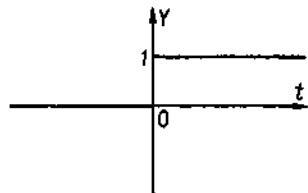


Рис. 25.

**Теорема 1.** Если  $\omega(x) \in C(\mathbb{R}^n)$  (т. е. функция  $\omega$  везде в  $\mathbb{R}^n$  определена и непрерывна), то  $\Omega = \{S_2[\omega(x)] = 1\}$  — замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$ . [Все пространство  $\mathbb{R}^n$  и пустое множество  $\emptyset$  считаются замкнутыми (а также, если это удобно, открытыми) по определению.]

**Доказательство.** Предположим обратное. Пусть множество  $\Omega$  — не замкнутое. Тогда существует предельная точка  $x^0$  множества  $\Omega$ , такая что  $x^0 \notin \Omega$ . Пусть  $\{x^{(i)}, x^{(i)} \in \Omega$ , — последовательность точек, сходящихся к  $x^0$ . В силу непрерывности функции  $\omega(x)$   $\lim_{i \rightarrow \infty} \omega(x^{(i)}) = \omega(x^0)$ . Но так как  $\omega(x^{(i)}) \geq 0$ , имеем  $\omega(x^0) \geq 0$ , т. е.  $x^0 \in \Omega$ . Приходим к противоречию. Следовательно, множество  $\Omega$  — замкнуто.

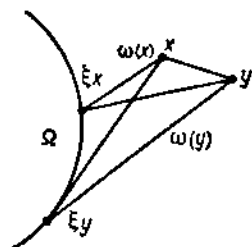


Рис. 26.

**Следствие.** Множество  $\bar{\Omega} = \{S_2[\omega(x)] = 0\}$  — открытое.

Итак, всякой функции  $\omega(x) \in C(\mathbb{R}^n)$  соответствует замкнутое множество  $\Omega = \{\omega(x) \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ . Покажем, что и наоборот, всякому замкнутому множеству  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  можно в указанном смысле поставить непрерывную функцию  $\omega(x)$ .

**Теорема 2.** Функция

$$\omega(x) = - \inf_{\xi \in \Omega} \|x - \xi\| = - \inf \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2} \quad (1.133)$$

непрерывна в  $\mathbb{R}^n$  и  $\Omega = \{\omega(x) \geq 0\}$ .

**Доказательство.** Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$  — произвольная точка, а  $\xi_x \in \Omega$  — ближайшая к  $x$  точка  $\Omega$ . Такую точку будем называть *точкой противостояния* точки  $x$  на  $\Omega$ ; очевидно, что  $\omega(x) = -\|x - \xi_x\|$ . Точка  $\xi_x$  (возможно, не единственная) существует в результате того, что множество  $\Omega$  замкнуто (рис. 26). Тогда

$$\begin{aligned} -\omega(y) = \inf \|y - \xi_y\| &\leq \|y - \xi_x\| \leq -\omega(x) + \|x - y\|; \\ -\omega(x) = \inf \|x - \xi_x\| &\leq \|x - \xi_y\| \leq -\omega(y) + \|x - y\|. \end{aligned} \quad (1.134)$$

Следовательно,  $|\omega(x) - \omega(y)| \leq \|x - y\|$  и  $\lim_{y \rightarrow x} \omega(y) = \omega(x)$ .

Таким образом,  $\omega(x)$  — непрерывная функция. То, что  $\Omega = \{\omega(x) \geq 0\}$ , очевидно.

Замкнутые множества — излишне широкий с точки зрения приложения класс геометрических объектов в  $\mathbb{R}^n$ . (К числу замкнутых множеств, например, относится всякое бесконечное множество изолированных точек, к которому присоединены все его точки сгущения.) На первый взгляд может показаться, что для сужения этого класса необходимо переходить от множества  $C(\mathbb{R}^n)$  непрерывных функций к множествам  $C^m(\mathbb{R}^n)$  ( $m$  раз непрерывно дифференцируемым функциям),  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  (бесконечно дифференцируемым функ-



диям) или еще более узким функциональным пространствам (аналитическим функциям, полиномам и др.). Однако, как будет показано в гл. 2, такое сужение (вплоть до  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ) ничего не дает, а если взять аналитические вездe функции (в частности, полиномы), то множество геометрических объектов оказывается слишком бедным. Выход из положения будет найден (после введения  $R$ -функций) с помощью множеств  $H$ -реализуемых функций со специальным выбором базисных систем. При этом окажется возможным строить не только предикатное уравнение практически произвольного геометрического объекта, но и писать его уравнение (или неравенство) вида  $\omega(x) = 0$  (или  $\omega \geq 0$ ), где  $\omega(x) \in \mathfrak{M}(H)$  — функция, имеющая вид единого аналитического выражения (и требуемое число раз дифференцируемая).

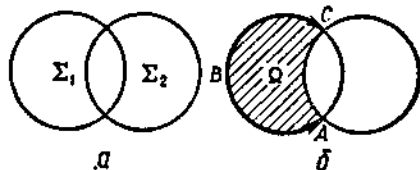


Рис. 27.

Для удобства будем предполагать, что неравенство  $\omega(x) \geq 0$ ,  $\omega(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ , определяет некоторую область  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

**Определение.** Если функция  $\omega(x)$  определена и непрерывна вездe в  $\mathbb{R}^n$  и является  $H$ -реализуемой (т. е.  $\omega(x) \in \mathfrak{M}(H)$ ), то предикат  $S_2[\omega(x)]$  называется  $H$ -реализуемым предикатом, а точечные множества  $\Omega = [\omega(x) \geq 0]$ ,  $\Omega_0 = [\omega(x) = 0]$ ,  $\bar{\Omega} = [\omega(x) < 0]$   $H$ -реализуемыми точечными множествами.

**Пример 3.** Область  $\Omega$ , рассмотренная в примере 1, есть  $H$ -реализуемая область, если взять, например,  $H = \{x_1 + x_2; x_1x_2; R; -1\}$ .

Пусть  $\Sigma_i = S_2[\sigma_i(x)]$  ( $i = 1, \dots, m$ ) —  $H$ -реализуемые предикаты, а  $F(X_1, \dots, X_m)$  — булева функция. Тогда двузначный предикат

$$\Omega = \Omega(x) = F\{S_2[\sigma_1(x)], \dots, S_2[\sigma_m(x)]\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.135)$$

определяет в  $\mathbb{R}^n$  некоторое точечное множество  $\Omega = [\Omega(x) = 1]$  (это множество для простоты обозначено той же буквой, что и предикат  $\Omega$ ).

Множества  $\Sigma_i$ , для которых предикаты  $\Sigma_i = [\sigma_i(x) \geq 0]$  являются характеристическими функциями, будем называть опорными областями. Булева функция  $Y = F(X_1, \dots, X_m)$  определяет логику формирования множества  $\Omega$  из опорных множеств  $\Sigma_i$ . Однако множество  $\Omega$  может оказаться таким, что для него не найдется  $H$ -реализуемой функции  $\omega(x)$ , для которой  $\Omega = [\omega(x) \geq 0]$ . Более того, если даже функции  $\sigma_i(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ , то для множества  $\Omega$  может не найтись и непрерывной функции  $\omega(x)$ .

Например, пусть  $\Sigma_1 = [\sigma_1(x) \geq 0]$ ,  $\Sigma_2 = [\sigma_2(x) \geq 0]$ ,  $\sigma_1, \sigma_2 \in C(\mathbb{R}^n)$ , а  $F(X_1, X_2) = X_1 \wedge \bar{X}_2$ . Тогда предикату  $\Omega = [S_2(\sigma_1) \wedge \bar{S}_2(\sigma_2)]$  соответствует область  $\Omega$  (рис. 27, заштрихованная область), причем участок  $ABC$  принадлежит границе области  $\Omega$ , а дуга  $AC$  — не принадлежит. Так как область  $\Omega$  в этом случае не является ни замкнутой, ни открытой, то по теореме 1 для нее не существует

такой функции  $\omega \in C(\mathbb{R}^n)$ , чтобы предикатное уравнение  $S_2[\omega(x)] = 1$  (или  $S_2[\omega(x)] = 0$ ) определяло ее. Тем более  $\omega(x)$  не может быть  $H$ -реализуемой областью, если система  $H \subset C(\mathbb{R}^n)$  (что обычно предполагается).

Вместе с тем легко привести примеры булевых функций, для которых подобное явление не имеет места. Например, двузначным конъюнкцией  $X_1 \wedge X_2$  и дизъюнкцией  $X_1 \vee X_2$  соответствуют пересечение  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$  и объединение  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , представляющие собой замкнутые (открытые) множества, если  $\Sigma_1, \Sigma_2$  — замкнутые (открытые) множества. Заметим, что для замкнутых  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  точечные множества  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$  и  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  замкнуты при любом расположении областей  $\Sigma_1, \Sigma_2$ . В частности, если  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  не пересекаются, то  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ . Пустое множество,

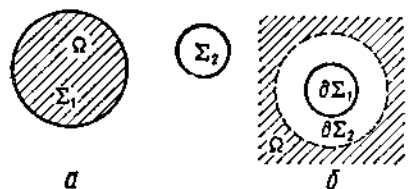


Рис. 28.

как отмечено выше, является замкнутым и открытым одновременно. В то же время замкнутость множества  $\Sigma_1 \cap \bar{\Sigma}_2$ , соответствующего рассмотренной выше булевой функции  $X_1 \wedge \bar{X}_2$ , зависит от взаимного расположения в  $\mathbb{R}^n$  множеств  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Если эти области не пересекаются, то  $\Omega = \Sigma_1$  и, следовательно,  $\Omega$  — замкнутое множество (рис. 28,а). Если, например, область  $\Sigma_1$  является внешностью контура  $\partial\Sigma_1$ , а  $\Sigma_2$  — внутренностью контура  $\partial\Sigma_2$  (рис. 28,б), то область, соответствующая булевой функции  $X_1 \wedge \bar{X}_2$ , будет открытой (заштрихованная область).

Приведенные выше примеры показывают, что среди булевых функций имеются такие, которые при любом выборе опорных замкнутых областей  $\Sigma_i$  приводят к замкнутому множеству  $\Omega$ .

**Определение 2.** Булева функция  $Y = F(X_1, \dots, X_m)$  называется замыкающей, если при любом выборе функций  $\sigma_i(x) \in C(\mathbb{R}^n)$  множество, определяемое предикатным уравнением

$$F\{S_2[\sigma_1(x)], \dots, S_2[\sigma_m(x)]\} = 1,$$

замкнуто.

Первые сведения о структуре множества замыкающих булевых функций дает следующая теорема.

**Теорема 3.** Множество замыкающих булевых функций замкнуто.

**Доказательство.** Пусть  $\Phi(X_1, \dots, X_m), F_i(X_{i1}, \dots, X_{in_i})$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — произвольные замыкающие булевы функции. Составим суперпозицию

$$Y = \Phi[F_1(X_{11}, \dots, X_{1n_1}), \dots, F_m(X_{m1}, \dots, X_{mn_m})]. \quad (1.136)$$

(Аргументы  $X_{ij}$  не все обязательно различны.) Пусть предикаты  $X_{ij} = \Sigma_{ij} = \{\sigma_{ij}(x) \geq 0\}$  таковы, что предикатные уравнения  $\Sigma_{ij} = 1$  определяют в  $\mathbb{R}^n$  замкнутые множества  $\Sigma_{ij}$ . Так как по

условию теоремы булевы функции  $F_i$  являются замыкающими, предикаты  $\Omega_i = F_i(X_{i1}, \dots, X_{in_i})$  определяют замкнутые множества  $\Omega_i$ . А тогда, поскольку  $\Phi$  — также замыкающая булева функция, приходим к выводу, что предикат (1.136) определяет замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Теорема доказана.

**Пример.** Булева функция

$$Y = [(X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3)] \vee X_3$$

является замыкающей (как суперпозиция замыкающих булевых функций  $X_1 \wedge X_2$  и  $X_1 \vee X_2$ ).

**Теорема 4.** Система булевых функций

$$H = \{0; 1; X_1 \wedge X_2; X_1 \vee X_2\} \quad (1.137)$$

является полной в множестве замыкающих булевых функций.

**Доказательство.** Пусть  $F(X_1, \dots, X_n)$  — произвольная замыкающая булева функция. Представим ее в дизъюнктивной нормальной форме

$$F = F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_m, \quad (1.138)$$

где  $F_i$  — элементарные конъюнкции. Предположим, что в формуле (1.138) произведены необходимые упрощения (склеивания), так что ни для одной из пар элементарных конъюнкций, входящих в (1.138), нельзя построить такой отличной от единицы конъюнкции  $\Phi$ , чтобы выполнялось тождество

$$F_i \equiv F_j \wedge \Phi \quad (i, j = 1, \dots, m; i \neq j). \quad (1.139)$$

Если бы была справедлива формула (1.139), то можно было бы применить формулу склеивания 17° § 13 к элементарным конъюнкциям  $F_i$  и  $F_j$ :

$$F_i \vee F_j \equiv (F_i \wedge \Phi) \vee F_j \equiv F_j. \quad (1.140)$$

Может оказаться, что функция  $F$ , определяемая формулой (1.138), является константой или же ни одна из элементарных конъюнкций не содержит аргументов, взятых с отрицанием. В этом случае, очевидно, теорема справедлива. Предположим, что некоторая элементарная конъюнкция (например,  $F_1$ ) содержит отрицание:

$$F_1 = \bar{X}_{n_1} \wedge X_{n_2}^{\tau} \wedge \dots \wedge X_{n_s}^{\tau}, \quad (1.141)$$

где  $X^{\tau} = X$  при  $\tau = 1$  и  $X^{\tau} = \bar{X}$  при  $\tau = 0$ . Зададим непрерывные функции

$$\sigma_{n_j}(x) = \begin{cases} 1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2; \\ -1, \quad \forall i \neq n_j \quad (j = 1, \dots, s); \\ \tau_j - \frac{1}{2}, \quad \forall i = n_j \quad (j = 2, \dots, s). \end{cases} \quad (1.142)$$

Тогда предикатным уравнениям

$$X_{n_j}^{\tau_j} = \{S_2[\sigma_{n_j}(x)]\}^{\tau_j} = 1 \quad (j = 2, \dots, s) \quad (1.143)$$

соответствует все пространство  $\mathbb{R}^n$ . (При  $\tau_i = 0$  получим, что  $\sigma_{n_i}(x) = -1/2$ ;  $S_2[\sigma_{n_i}(x)] = 0$ ;  $\{S_2[\sigma_{n_i}(x)]\}^0 = 1$ ; если  $\tau_i = 1$ , то  $\sigma_{n_i}(x) = 1/2$ ;  $S_2[\sigma_{n_i}(x)] = 1$ ;  $\{S_2[\sigma_{n_i}(x)]\}^1 = 1$ .) Предикатным уравнениям

$$F_i = 1 \quad (i = 2, \dots, m), \quad (1.144)$$

где  $F_i$  — элементарные конъюнкции из (1.138), соответствует пустое множество  $\emptyset$ . Это следует из того, что в каждую из функций  $F_i$  ( $i = 2, \dots, m$ ) входит по крайней мере один конъюнктивный член, равный нулю (в противном случае выполнялось бы равенство вида (1.139)).

Из сказанного следует, что предикатное уравнение  $F = 1$  эквивалентно уравнению  $F_1 \equiv \bar{X}_n = 1$ . Учитывая (1.142), последнее уравнение перепишем в виде

$$\bar{X}_n \equiv S_2(1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2) = 1. \quad (1.145)$$

Этому предикатному уравнению соответствует внешность шара единичного радиуса с центром в начале координат, не включающая его границу. Так как эта область не замкнутая, булева функция  $F$  не замыкающая, что противоречит исходному условию. Таким образом, предположение о том, что хотя бы одна из элементарных конъюнкций в формуле (1.138) содержит аргумент, взятый с отрицанием, неверно. Теорема доказана.

Рассмотренное выше множество замыкающих функций двузначной логики будет неоднократно использовано в дальнейшем при построении предикатных уравнений сложных геометрических объектов. В частности, к этому классу булевых функций могут быть отнесены булевы функции, используемые в § 18 при построении предикатных уравнений областей многоугольников и многогранников. В то же время, как будет показано в следующем параграфе, для описания сложных геометрических объектов многих типов предикатных уравнений, основанных на булевой алгебре, будет, вообще, недостаточно. В связи с этим будут рассмотрены трехзначные предикаты. Трехзначные предикаты — это основа для решения с помощью алгоритмически полных систем  $R$ -функций так называемой *обратной задачи* аналитической геометрии.

### § 17. Трехзначные предикатные уравнения. Замыкающие и простые замыкающие функции трехзначной логики

Предикат  $S_2(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , рассмотренный в предыдущем параграфе, является несимметричным относительно множества положительных и отрицательных чисел, так как к положительным числам он присоединяет еще и нуль. Произведем симметричное разбиение

числовой оси, используя трехзначный предикат:

$$S_3(t) \equiv 1 + \text{sign } t \equiv \begin{cases} 2, & t > 0; \\ 1, & t = 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.146)$$

Пусть  $\sigma(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ . Трехзначному предикату

$$\Sigma = S_3[\sigma(x)] \quad (1.147)$$

соответствует разбиение пространства  $\mathbb{R}^n$  на три множества

$$\Sigma^r = \{S_3[\sigma(x)] = r\} \quad (r = 1, 2, 3), \quad (1.148)$$

определяемые предикатными уравнениями, заключенными в соответствующие фигурные скобки. Вместо (1.148) будем применять иногда более короткую запись

$$\Sigma^2 = [\sigma(x) > 0]; \quad \Sigma^1 = [\sigma(x) = 0]; \quad \Sigma^0 = [\sigma(x) < 0]. \quad (1.149)$$

Нетрудно убедиться в том, что если  $\sigma(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ , то  $\Sigma^2$  и  $\Sigma^0$  — открытые множества, а  $\Sigma^1$  — замкнутое (см. теорему 1 § 16). В тех ситуациях, которые обычно приходится рассматривать в приложениях,  $\Sigma^1$  и  $\Sigma^0$  — открытые области (не обязательно односвязные), а  $\Sigma^2$  — гиперповерхность. (В  $\mathbb{R}^3$  — поверхность, а в  $\mathbb{R}^2$  — линия.) Однако может случиться, что некоторые из множеств пусты, а  $\Sigma^1$  может оказаться замкнутой областью, содержащей не только граничные, но и внутренние точки. Например, функции

$$z = 3\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 5 - \left| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 \right| + \left| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 3 + \left| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 \right| \right| \quad (1.150)$$

соответствует разбиение  $\mathbb{R}^2$  на области:  $\Sigma^2$  — внешность круга радиуса  $R = 2$  с центром в начале координат;  $\Sigma^0$  — внутренность круга радиуса  $r = 1$  с тем же центром;  $\Sigma^1$  — кольцо (вместе со своей границей).

Функции  $z \equiv x_1^2 + x_2^2$  соответствуют области:  $\Sigma^2 = \{S_3(x_1^2 + x_2^2) = 2\}$  — плоскость  $\mathbb{R}^2$  без начала координат;  $\Sigma^1 = \{S_3(x_1^2 + x_2^2) = 1\}$  — начало координат и  $\Sigma^0 = \{S_3(x_1^2 + x_2^2) = 0\} = \emptyset$  — пустое множество.

Пусть  $\sigma_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — непрерывные везде в  $\mathbb{R}^n$  функции. Этим функциям можно поставить в соответствие трехзначные предикаты  $\Sigma_i \equiv S_3[\sigma_i(x)]$ , которые, как и в предыдущем параграфе, будем называть  $H$ -реализуемыми, если  $\sigma_i(x) \in \mathfrak{M}(H)$ . Таким образом,  $\Sigma_i^r$  ( $r = 0, 1, 2$ ) — множества в  $\mathbb{R}^n$ , где  $\Sigma_i^r = r$  ( $r = 0, 1, 2$ ). Предикаты  $\Sigma_i$  можно использовать в качестве аргументов функции  $Y = F(X_1, \dots, X_m)$  трехзначной логики. Тогда получим предикат

$$\Omega \equiv F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m) \equiv F\{S_3[\sigma_1(x)], \dots, S_3[\sigma_m(x)]\}, \quad (1.151)$$

определенный везде в  $\mathbb{R}^n$ , которому соответствуют множества  $\Omega^2$ ,  $\Omega^1$  и  $\Omega^0$ . Нетрудно привести примеры, показывающие, что хотя для принятых предположений относительно функций  $\sigma_i(x)$  множества  $\Sigma_i^2$ ,  $\Sigma_i^0$  открыты, а множество  $\Sigma_i^1$  — замкнутое, нельзя утверждать, что такими же свойствами обладают множества  $\Omega^2$ ,  $\Omega^0$  и  $\Omega^1$ .

**Пример 1.** Пусть  $\sigma_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) — функции, которым соответствует разбиение плоскости  $R^2$  на множества  $\Sigma_i^2$ ,  $\Sigma_i^0$  и  $\Sigma_i^1$  ( $i = 1, 2$ ), изображенные на рис. 29, а  $Y = F(X_1, X_2)$  — функция трехзначной логики, заданная в виде

$X_1$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$X_2$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$F$	0	0	0	1	2	2	2	2	0

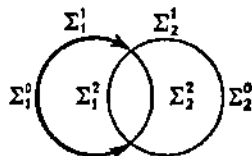


Рис. 29.

Область  $\Omega^1 = \{S_3[F(\Sigma_1, \Sigma_2)] = 1\}$  — дуга не включающая свои концы. Так как множество  $\Omega^1$  не замкнуто, не существует функции  $\omega(x) \in C(\mathbb{R}^2)$  такой, чтобы предикатное уравнение

$$S_3[\omega(x)] = 1 \quad (1.152)$$

определяло  $\Omega^1$ .

В то же время можно привести примеры функций трехзначной логики другого характера, когда при любом выборе функций  $\sigma_i(x)$  из  $C(\mathbb{R}^n)$  соответствующие им предикаты обеспечивают замкнутость множества  $\Omega^1$ , а множества  $\Omega^2$  и  $\Omega^0$  оказываются открытыми. Как и в предыдущем параграфе, такого рода функции будем называть *замыкающими* (в трехзначной логике).

**Пример 2.** Функция

$$F_1(X_1, X_2) \equiv X_1 \wedge \bar{X}_2, \quad (1.153)$$

где  $\bar{X}_1, X_1 \wedge X_2 \in \mathfrak{F}(B_3)$ , — замыкающая. Значения функции следующие:

$X_1$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$X_2$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$F$	0	0	0	1	1	0	2	1	0

Видно, что множество  $\Omega^0 = \{\Sigma_1 \wedge \bar{\Sigma}_2 = 0\}$  включает в себя множества  $\Sigma_1^0$  и  $\Sigma_2^2$ , т. е.

$$\Omega^0 = \Sigma_1^0 \cap \Sigma_2^2 \quad (1.154)$$

(это видно из того, что нули функции  $F$  накрываются либо нулями  $X_1$ , либо значениями  $X_2 = 2$ ). Аналогично

$$\Omega^2 = \Sigma_1^2 \cap \Sigma_2^0. \quad (1.155)$$

Так как по предположению  $\Sigma_1^2$  и  $\Sigma_2^0$  — открытые множества, открыты также множества  $\Omega^0$  и  $\Omega^2$ . А тогда множество  $\Omega^1 = \mathbb{R}^n \setminus (\Omega^2 \cup \Omega^0)$  замкнуто и, следовательно, функция  $X_1 \wedge \bar{X}_2$  — замыкающая.

Отметим, что в классе булевых функций функция (1.153), как показано ранее, не замыкающая. В то же время функция (1.153) как функция трехзначной логики замыкающая. Для замыкающих функций трехзначной логики справедлива теорема о замкнутости.

**Теорема 1.** Множество замыкающих функций трехзначной логики замкнуто.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3 § 16. Следующая теорема позволяет выделить множество замыкающих функций из  $\mathfrak{F}(B_2)$  и указать в нем полную систему функций.

**Теорема 2.** Множество замыкающих функций трехзначной логики совпадает с множеством  $Q_3^1$ , рассмотренным в § 14.

**Доказательство.** Докажем вначале, что всякая функция, принадлежащая множеству  $Q_3^1$ , замыкающая. В § 15 показано, что система функций

$$H = \{0, 1; \bar{X}; X_1 \wedge X_2\} \quad (1.156)$$

полная в  $Q_3^1$ . Нетрудно убедиться в том, что каждая из этих функций замыкающая. Действительно, для константы 0  $\Omega^0 = \{0 = 0\} = \mathbb{R}^n$ ;  $\Omega^2 = \{0 = 2\} = \emptyset$ ;  $\Omega^1 = \{0 = 1\} = \emptyset$ . Для константы 1  $\Omega^0 = \{1 = 0\} = \emptyset$ ;  $\Omega^2 = \{1 = 2\} = \emptyset$ ;  $\Omega^1 = \{1 = 1\} = \mathbb{R}^n$ . Для функции  $\bar{X}$   $\Omega^0 = \{\bar{S}_3[\sigma(x)] = 0\} = \Sigma^2$ ;  $\Omega^2 = \{\bar{S}_3[\sigma(x)] = 2\} = \Sigma^0$ ;  $\Omega^1 = \{\bar{S}_3[\sigma(x)] = 1\} = \Sigma^1$ , т. е. множество  $\Omega^1$  оказывается замкнутым, а  $\Omega^0$  и  $\Omega^2$  — открытыми. Что касается функции  $X_1 \wedge X_2$ , то соответствующее ей множество  $\Omega^2 = \{S_3[\sigma_1(x)] \wedge S_3[\sigma_2(x)] = 2\}$  совпадает с  $\Sigma_1^2 \cap \Sigma_2^2$  и является открытым как пересечение открытых множеств; множество  $\Omega^0 = \{S_3[\sigma_1(x)] \wedge S_3[\sigma_2(x)] = 0\}$  совпадает с объединением  $\Sigma_1^0 \cup \Sigma_2^0$  и, следовательно, также открыто. А тогда множество  $\Omega^1 = \mathbb{R}^n \setminus [(\Sigma_1^2 \cap \Sigma_2^2) \cup (\Sigma_1^0 \cup \Sigma_2^0)]$  является замкнутым.

Учитывая, что всякая функция из  $Q_3^1$  есть суперпозиция системы (1.156), на основании теоремы 1 приходим к выводу о том, что множество  $Q_3^1 \subset F(B_2)$  — часть множества замыкающих функций.

Покажем, что всякая замыкающая функция принадлежит множеству  $Q_3^1$ . Предположим противное. Пусть  $F(X_1, \dots, X_m)$  есть некоторая замыкающая функция, которая не принадлежит  $Q_3^1$ . Тогда из определения множества  $Q_3^1$  следует: найдется такая точка  $X^0 = (X_1^0, \dots, X_m^0) \in B_3^m$ , у которой некоторые из координат  $X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_s}$  ( $1 \leq s \leq m$ ,  $s$  — целое число) равны единице, а  $F(X^0) \neq 1$ , и существует такая точка  $X^1 = (X_1^1, \dots, X_m^1)$ , отличающаяся от  $X^0$  лишь некоторыми из  $X_{\alpha_i}$  ( $i = 1, \dots, s$ ), что  $F(X^0) \neq F(X^1)$ . Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что эти изменяющиеся координат являются первыми из координат точки  $X^0$ . Тогда

$$\begin{aligned} F(1, \dots, 1, X_{s+1}^0, \dots, X_m^0) &= A \neq 1; \\ F(X_1^1, \dots, X_s^1, X_{s+1}^0, \dots, X_m^0) &= B \neq A, \end{aligned} \quad (1.157)$$

где  $X_i^1$  равно нулю или двум ( $i = 1, \dots, s$ ).

Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}^1$  (числовую ось  $0t$ ) и примем

$$\sigma_i(t) = \begin{cases} t \operatorname{sign}(X_i^1 - 1), & \forall i = 1, \dots, s; \\ X_i^0 - 1, & \forall i = s + 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.158)$$

Тогда если  $i = 1, \dots, s$ , то

$$S_3[\sigma_i(t)] = \begin{cases} X_i^1, & \forall t > 0; \\ 1, & t = 0; \\ \bar{X}_i^1, & \forall t < 0 \end{cases}$$

и  $S_3[\sigma_i(x)] = X_i^0$  при  $i = s + 1, \dots, m$  для всех  $t \in \mathbb{R}^1$ . Тогда для предиката  $\Omega(t) = F\{S_3[\sigma_1(t)], \dots, S_3[\sigma_m(t)]\}$  находим, что  $\Omega(t) = B$  при  $t > 0$  и  $\Omega(0) = A \neq 1$ . Если  $\omega(t)$  — функция такая, что  $S_3[\omega(t)] = \Omega(t)$ , то  $\omega(0) \neq 0$ , а  $\omega(t)$  при  $t > 0$  либо тождественно равняется нулю, либо имеет противоположный знак знаку  $\omega(0)$ . В любом случае функция  $\omega(t)$  в точке 0 имеет разрыв. Следовательно, точка  $t = 0$ , являясь граничной для множества  $S_3[\omega(t)] = B$ , ему не принадлежит. Таким образом,  $\omega(t)$  не является замыкающей, что противоречит принятому предположению. Теорема доказана.

Она позволяет перенести результаты, полученные в § 14, 15 для функций из множества  $Q_3^1$ , на замыкающие функции трехзначной логики. В частности, всякая замыкающая функция может быть разложена по формуле (1.121).

Класс замыкающих функций трехзначной логики строился в предположении, что предикатные уравнения

$$F\{S_3[\sigma_1(x)], \dots, S_3[\sigma_m(x)]\} = i \quad (1.159)$$

при  $i = 0$  и  $i = 2$  определяют открытые множества, а при  $i = 1$  — замкнутое множество. При этом допускалось, что некоторые из опорных функций  $\sigma_i(x) \in C(\mathbb{R}^n)$  таковы, что замкнутое множество  $\Sigma_i^1 \equiv \{\sigma_i(x) = 0\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , состоит не только из граничных точек (в пространстве  $\mathbb{R}$ ). Предположим, что такое явление для опорных областей  $\Sigma_i^0$  исключается, и выясним, при каких условиях не будет содержать внутренних точек область, описываемая предикатным уравнением (1.159) при  $i = 1$ .

**Определение 1.** Функция  $\sigma(x) \in C(\mathbb{R}^n)$  называется простой непрерывной функцией, если область, определяемая предикатным уравнением, не имеет внутренних точек.

**Определение 2.** Функция  $Y = F(X) \in \mathfrak{F}(B_3)$ ,  $X \in B_3^m$ , называется простой замыкающей, если при любом выборе простых непрерывных функций  $\sigma_i(x) \in C(\mathbb{R}^n)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) предикатные уравнения

$$F(S_3[\sigma_1(x)], \dots, S_3[\sigma_m(x)]) = i$$

определяют при  $i = 0$  и  $i = 2$  открытые области, а при  $i = 1$  — замкнутую область без внутренних точек.



**Теорема 3.** Множество простых замыкающих функций трехзначной логики замкнуто.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 § 16.

**Теорема 4.** Простые замыкающие функции трехзначной логики принадлежат множеству  $I_3^1$ , рассмотренному в § 14, 15.

Доказательство. Пусть  $Y = F(X_1, \dots, X_m) \in \mathfrak{F}(B_3)$  — простая замыкающая функция, не принадлежащая  $I_3^1$ . Тогда согласно определению 3 § 14 найдется такой набор аргументов  $X_1^0, \dots, X_m^0$ ,  $X_i^0 \neq 1$  ( $i = 1, \dots, m$ ), что  $F(X_1^0, \dots, X_m^0) = 1$ . Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}^1$  и зададим в нем следующую систему простых непрерывных функций:

$$\sigma_i(t) = t(X_i^0 - 1) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (1.160)$$

Тогда  $S_3[\sigma_i(t)] = X_i^0$  при  $t > 0$  и предикатное уравнение

$$F\{S_3[\sigma_1(t)], \dots, S_3[\sigma_m(t)]\} = 1 \quad (1.161)$$

будет определять множество, в которое войдет положительная полуось  $Ot$ .

Таким образом, предикатное уравнение определяет множество, содержащее внутренние точки, т. е.  $F$  — не простая замыкающая функция. Приходим к противоречию. Теорема доказана.

**Теорема 5.** Если замыкающая функция трехзначной логики  $F(X) : B_3^m \rightarrow B_3$  принадлежит множеству  $I_3^1$ , то она является простой замыкающей.

Доказательство. Пусть  $\sigma_i(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) — простые непрерывные функции. Предположим, что одна из координат (например,  $j$ -я) точки  $X^0 = (X_1^0, \dots, X_m^0)$  равна единице. Тогда точке  $X^0$  в  $\mathbb{R}^n$  будет соответствовать множество, в котором одновременно выполняются условия  $S_3[\sigma_i(x)] = X_i^0$  ( $i = 1, \dots, m$ ). (Это множество может быть и пустым.) Но  $\Sigma_j^1 = S_3[\sigma_j(x)] = 1$  — множество точек, в которых  $\sigma_j(x) = 0$ . Так как  $F \in I_3^1$  по предположению простая непрерывная функция, следовательно, множество  $\Sigma_j^1$  не имеет внутренних точек. Тем более не имеет внутренних точек его пересечение с другими множествами  $S_3[\sigma_i(x)] = X_i^0$ . Так как  $F \in I_3^1$ , в точках, не имеющих среди своих координат единиц,  $F \neq 1$ . Поэтому множество

$$\{F\{S_3[\sigma_1(x)], \dots, S_3[\sigma_m(x)]\} = i\} \quad (1.162)$$

при  $i = 1$  есть объединение некоторых из множеств

$$\bigcap_{i=1}^{i=m} \{S_3[\sigma_i(x)] = X_i^0\}, \quad (1.163)$$

соответствующих точкам  $X = (X_1, \dots, X_m)$ , среди координат которых есть единицы. Поскольку доказано, что множества (1.163) не имеют внутренних точек, не имеет таких точек и их объединение.

В то же время  $F$  по условию теоремы — замыкающая функция, поэтому соответствующие ей множества (1.162) при  $i = 0$  и  $i = 2$  открытые, а при  $i = 1$  множество (1.162) замкнуто. Это означает, что  $F$  — простая замыкающая функция. Теорема доказана.

Из теорем 4 и 5 следует, что множество простых замыкающих функций представляет собой пересечение множеств  $Q_3^1$  и  $I_3^1$ . Согласно § 15 множество простых замыкающих функций трехзначной логики совпадает с множеством  $P_3^1$ , так как

$$P_3^1 = I_3^1 \cap Q_3^1. \quad (1.164)$$

Отметим, что в множестве  $P_3^1$  полной является система (1.127).

### § 18. Построение предикатных уравнений заданных геометрических объектов

Построение предикатного уравнения (в двузначной или трехзначной логике), определяющего заданный геометрический объект, связано с анализом формирования этого объекта из других, более простых («опорных») объектов. Иными словами, функция алгебры

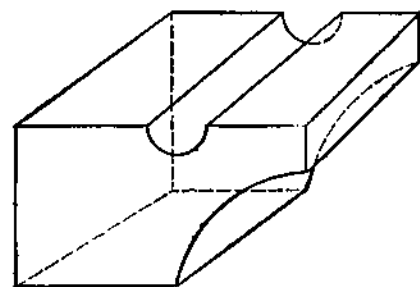


Рис. 30.

логики  $F(X_1, \dots, X_n)$ , которая в предыдущих параграфах предполагалась данной вместе с опорными областями  $\Sigma_i = \{\sigma_i(x) \geq 0\}$ , чаще всего бывает не заданной и должна быть построена по виду данного геометрического объекта. При этом обычно не возникает сколько-нибудь существенных затруднений. Прежде всего сам вид объекта подсказывает, какие объекты следует выбрать в качестве опорных.

Например, для описания области, ограниченной дугами окружностей и отрезками прямых, естественно выбрать в качестве опорных областей круги и полуплоскости; для многоугольных областей (как увидим ниже) достаточно будет полуплоскостей. Для описания детали, изображенной на рис. 30, необходимо исходить из областей, ограниченных плоскостями и круговыми цилиндрами. (Естественно, что в тех случаях, когда рассматриваемый объект не может быть точно представлен через более простые объекты, для которых имеется готовое математическое описание в виде уравнений или неравенств, необходимо прибегнуть к аппроксимации.)

Ниже будет показано, что для некоторых классов геометрических объектов процесс построения предикатных уравнений (а в последующем и обычных) формализуется до такого уровня, что может быть автоматизирован с помощью ЭВМ. Однако, прежде чем рассмотреть вопросы автоматизации построения предикатных уравнений, рассмотрим некоторые примеры.

**Пример 1.** Область  $\Omega$ , изображенная на рис. 31, может быть построена с помощью следующих опорных областей:

$$\Sigma_1 \equiv (R^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0) \text{ (круг радиуса } R \text{ с центром в начале координат);}$$

$$\Sigma_2 \equiv (r^2 - x_1^2 - (x_2 - r)^2 \geq 0) \text{ (круг радиуса } r \text{ с центром } (0, r));$$

$$\Sigma_3 \equiv (x_2 - x_1 \geq 0) \text{ (полуплоскость выше прямой } x_2 = x_1);$$

$$\Sigma_4 \equiv (x_1 + x_2 \geq 0) \text{ (полуплоскость выше прямой } x_2 = -x_1).$$

Здесь  $\Sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) будем, как и ранее, рассматривать либо как двузначные характеристические функции (предикаты) областей ( $\Sigma_i = 1$  внутри области  $\Sigma_i$  и  $\Sigma_i = 0$  вне  $\Sigma_i$ ), либо как трехзначные предикаты ( $\Sigma_i = 2$  внутри  $\Sigma_i$ , т. е. в  $\Sigma_i^2$ ,  $\Sigma_i = 1$  на границе  $\partial\Sigma_i$ , т. е. на  $\Sigma_i^1$  и  $\Sigma_i = 0$  вне  $\Sigma_i \cup \partial\Sigma_i$ , т. е. в  $\Sigma_i^0$ ).

Для области  $\Omega$  легко написать логическую формулу

$$\Omega = (\Sigma_1 \cap \bar{\Sigma}_2) \cap (\Sigma_3 \cup \bar{\Sigma}_4). \quad (1.165)$$

Напишем аналогичный двузначный предикат, учитывая соответствие операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания операциям пересечения, соединения и дополнения:

$$\Omega = (\Sigma_1 \wedge \bar{\Sigma}_2) \wedge (\Sigma_3 \vee \bar{\Sigma}_4). \quad (1.166)$$

Нетрудно проверить, что предикат (1.166) определяет область  $\Omega$  без участков  $AO$  и  $OBC$  ее границы. Если рассматривать формулу (1.166) как формулу трехзначной логики, то предикатное уравнение  $\Omega = 2$  будет в точности определять  $\Omega^2 = \text{int } \Omega$  — внутренность области  $\Omega$ , уравнение  $\Omega = 1$  — границу  $\partial\Omega$ , а  $\Omega = 0$  — внешность  $\Omega^0 = \bar{\Omega}^2 \cap \bar{\partial}\Omega$ .

**Пример 2.** Рассмотрим замкнутую область  $\Omega$ , ограниченную линией  $ABCDEF$  (рис. 32, а). В качестве опорных выберем области:

$$\Sigma_1 \equiv (r_1^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0) \text{ (} i = 1, 2 \text{) (круги радиуса } r_i \text{ с центром в начале координат);}$$

$$\Sigma_3 \equiv (x_2 \geq 0) \text{ (верхняя полуплоскость).}$$

Для области  $\Omega$  легко написать формулу

$$\Omega = \Sigma_1 \cup (\Sigma_2 \cap \Sigma_3). \quad (1.167)$$

Соответствующее двузначное предикатное уравнение имеет вид

$$S_1 (r_1^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee [S_2 (r_2^2 - x_1^2 - x_2^2) \wedge S_3 (x_2)] = 1. \quad (1.168)$$

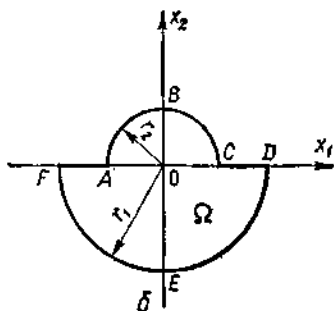
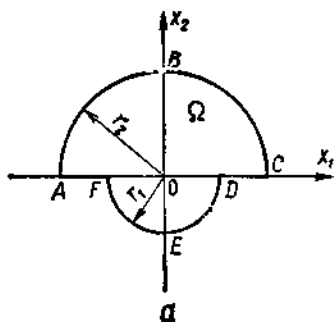


Рис. 32.

Пусть  $r_2 < r_1$  (рис. 32, б). Примем в качестве опорных те же области  $\Sigma_i$ . Область  $\Omega$  в этом случае может быть определена формулой

$$\Omega = \Sigma_2 \cup (\Sigma_1 \cap \bar{\Sigma}_3). \quad (1.169)$$

Однако участки границы  $FA$  и  $CD$  в эту область не будут входить.

Приведенный пример показывает, что при изменении параметров опорных областей может не только измениться логика интересующей нас области, но и нарушиться ее замкнутость.

Предикатное описание того или иного геометрического объекта в дальнейшем будет рассматриваться как некоторый промежуточный этап, предшествующий его аналитическому описанию с помощью одного уравнения (или неравенства)  $\omega(x) = 0$  (или  $\omega(x) \geq 0$ ), где  $\omega(x) \in C^s(\mathbb{R}^n)$  — функция, имеющая вид единого аналитического выражения (или, как сказано в § 4,  $H$ -реализуемая функция). При этом переход от предикатного описания к аналитическому будет осуществляться путем некоторой формальной процедуры, состоящей в замене символов операций и выражений, входящих в предикатные уравнения, некоторыми символами и выражениями  $H$ -реализуемых функций. При этом окажется не безразличным выбор формул для построения предикатных уравнений. Точнее, упомянутая процедура будет строго соответствовать предикатному описанию геометрических объектов в рамках трехзначной логики, но во многих случаях окажется допустимым использование и булевой алгебры. Выявление ситуаций, в которых можно ограничиться двузначными предикатами, представляет большой практический интерес, так как аппарат булевой алгебры существенно проще, чем трехзначная логика.

В следующем примере приводится типичная ситуация, в которой легко допустить ошибку, если использовать лишь двузначную логику.

**Пример 3.** Замкнутая область  $\Omega$  (рис. 32, а) может быть задана формулой

$$\Omega = (\Sigma_1 \cap \bar{\Sigma}_3) \cup (\Sigma_2 \cap \Sigma_3). \quad (1.170)$$

Действительно,  $\Sigma_1 \cap \bar{\Sigma}_3$  есть полукруг  $FDE$ , не включающий участка  $FD$  своей границы, а  $\Sigma_2 \cap \Sigma_3$  — полукруг  $ABC$ , включающий всю свою границу. Объединение этих областей есть  $\Omega$ . Следовательно, область  $\Omega$  может быть задана двузначным предикатным уравнением

$$\Omega = \{ [S_2(r_1^2 - x_1^2 - x_2^2) \wedge \bar{S}_3(x_2)] \vee [S_2(r_2^2 - x_1^2 - x_2^2) \wedge S_3(x_2)] = 1 \}. \quad (1.171)$$

Сравним формулы (1.167) и (1.170) с точки зрения трехзначной логики. Будем ставить в соответствие операциям пересечения, соединения и дополнения над множествами операции трехзначной конъюнкции, дизъюнкции и инверсии. Предположим, что необходимо задать открытые области  $\Omega^0$  и  $\Omega^2$ , составленные соответственно из внутренних и внешних точек области  $\Omega$ , и границу  $\partial\Omega^2 = \Omega^1$ . Тогда при использовании формулы (1.170) получим предикатные уравнения

$$\Omega^j = [S_2(r_1^2 - x_1^2 - x_2^2) \wedge \bar{S}_3(x_2)] \wedge [S_2(r_2^2 - x_1^2 - x_2^2) \wedge S_3(x_2)] = j \quad (j = 0, 1, 2), \quad (1.172)$$

а при использовании формулы (1.167) — уравнение

$$\Omega_j^2 = S_2(r_1^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee [S_2(r_2^2 - x_1^2 - x_2^2) \wedge S_3(x_2)] = j \quad (j = 0, 1, 2). \quad (1.173)$$

Нетрудно убедиться в том, что  $\Omega^2 \neq \Omega_1^2$ ,  $\Omega^1 \neq \Omega_1^1$ . Действительно, область  $\Omega_1^2$  есть объединение открытых полукругов  $ABC$  и  $FDE$  и ей не принадлежит отрезок  $FD$ . Зато отрезок  $FD$  включен в область  $\Omega_1^1$ . Это расхождение, на первый взгляд второстепенное, будет играть существенную роль при переходе от предикатных уравнений геометрических объектов к их обычным уравнениям (см. § 10 гл. 2).

В приведенных выше примерах использованы двузначные и трехзначные операции конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и инверсии. В дальнейшем будут использованы и другие операции алгебры логики, позволяющие в ряде случаев получать более простые формулы.

Остановимся на некоторых вопросах, связанных с автоматизацией построения предикатных уравнений для некоторых классов геометрических объектов. Рассмотрим вначале задачу об автоматическом построении предикатных уравнений многоугольных областей на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Входной информацией для предлагаемого ниже алгоритма является последовательность  $x_1^1, x_2^1, \dots, x_1^n, x_2^n$  координат вершин многоугольника, а выходной — предикатное уравнение  $F = 1$ . При этом предикат должен быть построен так, чтобы уравнение  $F = 2$  определяло внутренность многоугольника, а уравнение  $F = 0$  — его внешность  $\Omega^0$ .

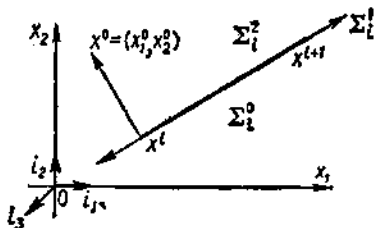


Рис. 33.

Нетрудно убедиться в том, что уравнение

$$\sigma_l(x) \equiv -x_1(x_2^{l+1} - x_2^l) + x_2(x_1^{l+1} - x_1^l) - x_2^l x_1^{l+1} + x_1^l x_2^{l+1} = 0 \quad (1.174)$$

есть уравнение прямой, проходящей через точки  $x^l = (x_1^l, x_2^l)$  и  $x^{l+1} = (x_1^{l+1}, x_2^{l+1})$  (рис. 33). Рассмотрим вектор

$$x^0 - x^l = i_3 \times (x^{l+1} - x^l) = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_1^{l+1} - x_1^l & x_2^{l+1} - x_2^l & 0 \end{vmatrix} = -(x_2^{l+1} - x_2^l) i_1 - (x_1^{l+1} - x_1^l) i_2. \quad (1.175)$$

Тогда

$$x^0 = (x_1^l - x_2^{l+1} + x_2^l; \quad x_2^l - x_1^{l+1} + x_1^l). \quad (1.176)$$

Подставляя координаты точки  $x^0$  в левую часть уравнения (1.174), находим

$$\sigma_l(x^0) \equiv (x_1^{l+1} - x_1^l)^2 + (x_2^{l+1} - x_2^l)^2 > 0. \quad (1.177)$$

Следовательно, функция  $\sigma_l(x) > 0$  — слева от прямой, на которой лежит вектор  $x^l x^{l+1}$ , и  $\sigma_l(x) < 0$  — справа от нее. Сказанное выше дает основание назвать уравнение (1.174) *ориентированным уравнением прямой*, проходящей через точки  $x^l, x^{l+1}$ .

Уравнение (1.174) можно сделать нормальным путем деления его на  $l_i = \|x^l - x^{l+1}\| = \sqrt{(x_1^{l+1} - x_1^l)^2 + (x_2^{l+1} - x_2^l)^2}$ :

$$\sigma_l^0(x) \equiv \frac{1}{l_i} [-x_1(x_2^{l+1} - x_2^l) + x_2(x_1^{l+1} - x_1^l) - x_2^l x_1^{l+1} + x_1^l x_2^{l+1}] = 0. \quad (1.178)$$

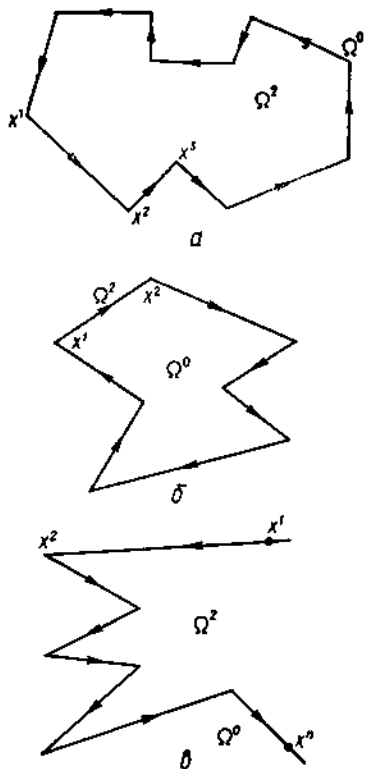


Рис. 34.

Уравнение (1.178) будем называть *нормальным ориентированным уравнением прямой*, проходящей через точки  $x^i$  и  $x^{i+1}$ .

Условимся задавать входную информацию о многоугольниках следующим образом. Если область  $\Omega^2$  есть внутренность ограниченного многоугольника (рис. 34, а) с вершинами в точках  $x^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), то будем выписывать координаты вершин с соблюдением левого обхода области  $\Omega^2$ , приписывая в конце этой строки координаты точки  $x^{n+1} = x^1$ :

$$x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_1^n, x_2^n, x_1^{n+1}, x_2^{n+1} \quad (x_1^{n+1} = x_1^1, x_2^{n+1} = x_2^1). \quad (1.179)$$

Совпадение первых двух чисел с последними двумя будет восприниматься описанным ниже алгоритмом как указание на то, что область ограничена. Если область  $\Omega^2$  неограничена (рис. 34, б), то информация о ней будет задаваться также строкой вида (1.179), однако в этом случае точки  $x^{n+1}$  и  $x^1$  не совпадают. Если область  $\Omega^2$  — внешность ограниченного многоугольника (рис. 34, в), то будет выписываться

строка (1.179) с соблюдением левого обхода области  $\Omega^2$ . Заметим, что при задании строки (1.179) взаимные пересечения сторон многоугольника должны быть исключены. Алгоритмы, позволяющие исключить взаимные пересечения, описаны в работе [109] при рассмотрении задач оптимального раскроя.

Условимся обозначать полуплоскость, ограниченную прямой, проходящей через точки  $x^i$  и  $x^{i+1}$ , через  $\Sigma_i^2$ . Эта область определяется предикатным уравнением  $S_3[\sigma_i(x) = 2]$ . В частном случае, когда область  $\Omega^2$  ограничена выпуклым  $n$ -угольником (рис. 35, а), она может быть задана логической формулой

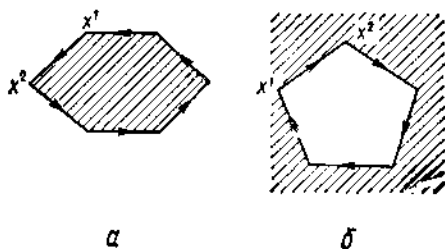


Рис. 35.

$$\Omega^2 = \Sigma_1^2 \cap \dots \cap \Sigma_n^2. \quad (1.180)$$

Для области вне  $n$ -угольника (рис. 35, б — заштрихованная область) соответствующая формула имеет вид

$$\Omega^2 = \Sigma_1^2 \cup \dots \cup \Sigma_n^2. \quad (1.181)$$

Очевидно, что формулы (1.180) и (1.181) верны и в том случае, когда многоугольники неограничены (рис. 36, а и б).

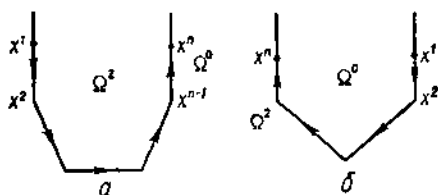


Рис. 36.

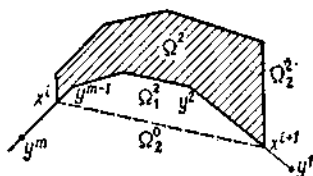


Рис. 37.

Пусть область  $\Omega^2$  есть пересечение областей  $\Omega_1^2$  и  $\Omega_2^2$ , первая из которых есть внутренность выпуклого  $n$ -угольника  $x^1x^2\dots x^nx^1$ , вторая внешность  $m$ -угольника  $y^1y^2\dots y^my^1$ . Пусть при этом область  $\Omega_2^2$  врезается в область  $\Omega_1^2$  через сторону  $x^ix^{i+1}$  (рис. 37). Нетрудно видеть, что если  $\sigma_i(x) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и  $\tau_j(x) = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ) — ориентированные уравнения сторон многоугольников  $\Omega_1^2$  и  $\Omega_2^2$ , которым соответствуют трехзначные предикаты

$$\Sigma_i = S_3[\sigma_i(x)],$$

$$T_j = S_3[\tau_j(x)], \quad (1.182)$$

то область  $\Omega^2$  можно задать формулой

$$\begin{aligned} \Omega^2 = & \Sigma_1^2 \cap \dots \cap \Sigma_{i-1}^2 \cap \\ & \cap (T_1^2 \cup \dots \cup T_m^2) \cap \Sigma_{i+1}^2 \cap \\ & \cap \dots \cap \Sigma_n^2. \end{aligned} \quad (1.183)$$

Формула (1.183) получается заменой в формуле (1.180)  $\Sigma_i^2$  выражением

$$T_1^2 \cup \dots \cup T_m^2. \quad (1.184)$$

Аналогично, если область  $\Omega^2$  есть объединение областей  $\Sigma^2$  и  $T^2$ , где  $\Sigma^2$  — внешность некоторого выпуклого  $n$ -угольника  $x^1x^2\dots x^nx^1$ ,  $T^2$  — внутренность выпуклого  $m$ -угольника  $y^1y^2\dots y^my^1$ , расположенного так, как показано на рис. 38, то

$$\Omega^2 = \Sigma_1^2 \cup \dots \cup \Sigma_{i-1}^2 \cup (T_1^2 \cap \dots \cap T_m^2) \cup \Sigma_{i+1}^2 \cup \dots \cup \Sigma_n^2; \quad (1.185)$$

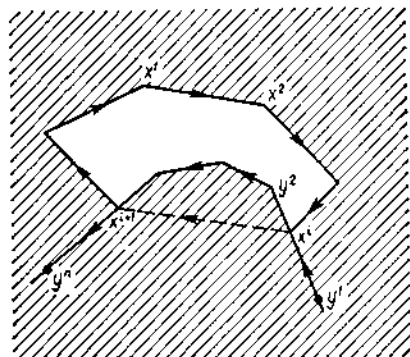


Рис. 38.

В этом случае  $\Sigma_i^2$  заменяется выражением  $T_1^2 \cap \dots \cap T_m^2$ . Оказывается, что более сложные случаи сводятся к последовательности подобного рода замен некоторых элементов конъюнкций дизъюнкциями вида (1.184), а в дизъюнкциях — аналогичными конъюнкциями. Проследим эту процедуру на примере 14-угольника (рис. 39), а затем опишем общий алгоритм.

Дополним многоугольник  $x^1x^2\dots x^{14}x^1$  до выпуклого многоугольника, проведя отрезки  $x^2x^{10}$  и  $x^{11}x^{14}$ . Пусть  $\Sigma_{210}^2$  и  $\Sigma_{114}^2$  — полуплоскости, лежащие слева от прямых  $x^2x^{10}$  и  $x^{11}x^{14}$  соответственно. Тогда выпуклый многоугольник  $x^1x^2x^{10}x^{11}x^{14}x^1$  определяется логической формулой

$$\Sigma_1^2 \cap \Sigma_{210}^2 \cap \Sigma_{10}^2 \cap \Sigma_{114}^2 \cap \Sigma_{14}^2. \quad (1.186)$$

Если в эту область врезаться выпуклой многоугольной областью  $x^{10}x^7x^6x^5x^2$ , то это приведет, в силу сказанного ранее, к замене в формуле (1.186) символа  $\Sigma_{210}^2$  дизъюнкцией

$$\Sigma_{25}^2 \cup \Sigma_5^2 \cap \Sigma_6^2 \cap \Sigma_{710}^2. \quad (1.187)$$

Таким образом, многоугольная область  $x^1x^2x^5x^6x^7x^{10}x^{11}x^{14}x^1$  будет определяться формулой

$$\Sigma_1^2 \cap (\Sigma_{25}^2 \cup \Sigma_5^2 \cup \Sigma_6^2 \cup \Sigma_{710}^2) \cap \Sigma_{10}^2 \cap \Sigma_{114}^2 \cap \Sigma_{14}^2. \quad (1.188)$$

Аналогично, если сделать выпуклый врез  $x^{11}x^{12}x^{14}$ , получим формулу

$$\Sigma_1^2 \cap (\Sigma_{25}^2 \cup \Sigma_5^2 \cup \Sigma_6^2 \cup \Sigma_{710}^2) \cap \Sigma_{10}^2 \cap (\Sigma_{11}^2 \cup \Sigma_{1214}^2) \cap \Sigma_{14}^2. \quad (1.189)$$

Замену символов  $\Sigma_{25}^2$ ,  $\Sigma_{710}^2$ ,  $\Sigma_{1214}^2$  произведем так же, но теперь будем добавлять выпуклые многоугольники  $x^2x^4x^5$ ,  $x^7x^8x^9x^{10}$  и  $x^{12}x^{13}x^{14}$ , что приведет к формуле

$$\Sigma_1^2 \cap ((\Sigma_{24}^2 \cap \Sigma_4^2) \cup \Sigma_5^2 \cup \Sigma_6^2 \cup (\Sigma_7^2 \cap \Sigma_8^2 \cap \Sigma_9^2)) \cap \Sigma_{10}^2 \cap (\Sigma_{11}^2 \cup \Sigma_{12}^2 \cap \Sigma_{13}^2) \cap \Sigma_{14}^2. \quad (1.190)$$

И, наконец, символ  $\Sigma_{24}^2$  должен быть заменен дизъюнкцией  $\Sigma_2^2 \cup \Sigma_3^2$ , что соответствует врезу выпуклой области  $x^2x^3x^4$ . Таким образом, окончательно получаем

$$\Omega = \Sigma_1^2 \cap (((\Sigma_2^2 \cup \Sigma_3^2) \cap \Sigma_4^2) \cup \Sigma_5^2 \cup \Sigma_6^2 \cup (\Sigma_7^2 \cap \Sigma_8^2 \cap \Sigma_9^2)) \cap \Sigma_{10}^2 \cap (\Sigma_{11}^2 \cup \Sigma_{12}^2 \cap \Sigma_{13}^2) \cap \Sigma_{14}^2. \quad (1.191)$$

Нетрудно видеть, что в этой формуле символы операций  $\cap$  и  $\cup$  чередуются — при переходе слева направо через каждую скобку символ операции изменяется на противоположный. Так, после буквы  $\Sigma_2^2$  стоит символ  $\cup$ , так как после предшествующего ему символа



$\cap$  стоят три открывающих скобки; перед буквой  $\Sigma_4^2$  стоит символ  $\cap$ , так как после предшествующего ему символа  $\cup$  стоит одна закрывающая скобка и т. д. Таким образом, задача сводится лишь к расстановке скобок. Последняя процедура в общем случае выполняется следующим образом. Исходный многоугольник дополняем до выпуклого многоугольника необходимым количеством отрезков. В рассмотренном примере (см. рис. 39) это были  $x^2x^{10}$  и  $x^{11}x^{14}$ . В соответствии с этим заключаем в скобки группы членов, соответствующие ломаным, опирающимся на добавленные отрезки (скобки перед  $\Sigma_2^2$  и после  $\Sigma_5^2$ ; перед  $\Sigma_{11}^2$  и после  $\Sigma_{13}^2$ ). Упомянутые ломаные также дополняем до выпуклых фигур, затем заключаем в скобки группы членов, соответствующие замыкаемым ломаным, и т. д. Продолжаем процесс до тех пор, пока не будут исчерпаны все невыпуклые ломаные. На рис. 39 штриховыми линиями показаны дополнительные отрезки, которым в формуле (1.191) соответствуют определенные пары открывающих и закрывающих скобок.

Окончательно предикатное уравнение многоугольника получаем, подставляя в формулу (1.191) вместо  $\Sigma_i^2$  ( $i = 1, \dots, n$ ) трехзначные предикаты  $S_3[\sigma_i(x)]$  и заменяя символы  $\cap$  и  $\cup$  символами  $\wedge$  и  $\vee$  соответственно. Так, для рассмотренного выше многоугольника получаем предикатное уравнение

$$\begin{aligned} \Omega(x_1, x_2) = & S_3(\sigma_1) \wedge (((S_3(\sigma_2) \vee S_3(\sigma_3)) \wedge S_3(\sigma_4)) \vee S_3(\sigma_5) \vee \\ & \vee S_3(\sigma_6) \vee (S_3(\sigma_7) \wedge S_3(\sigma_8) \wedge S_3(\sigma_9))) \wedge S_3(\sigma_{10}) \wedge (S_3(\sigma_{11}) \vee \\ & \vee (S_3(\sigma_{12}) \wedge S_3(\sigma_{13}))) \wedge S_3(\sigma_{14}) = \delta, \end{aligned} \quad (1.192)$$

которому при  $\delta = 2$  соответствует внутренняя, при  $\delta = 0$  — внешняя область, а при  $\delta = 1$  — граница многоугольника.

Обратим внимание на то, что в формуле (1.192) отсутствует операция отрицания. Но операции  $X_1 \wedge X_2$  и  $X_1 \vee X_2$  являются замыкающими как в двузначной, так и в трехзначной логике. Поэтому если в уравнении (1.192) заменить трехзначные предикаты  $S_3[\sigma_i(x)]$  двузначными  $S_2[\sigma_i(x)] = [\sigma_i(x) \geq 0]$ , то полученное предикатное уравнение (1.192) при  $\delta = 1$  будет определять внутренность многоугольника вместе с его границей, а при  $\delta = 0$  — внешнюю открытую область.

Автоматическое построение предикатных уравнений для областей более сложного вида, чем многоугольные, вообще, задача значительно сложнее. Определенный прогресс достигнут в решении этой проблемы для областей, ограниченных дугами окружностей и отрезками прямых в  $\mathbb{R}^2$ , многогранников в  $\mathbb{R}^3$  и некоторых других [33, 177, 188].

В рассматриваемой выше задаче о многоугольных областях требовалось построить такой предикат  $\Omega(x_1, x_2)$ , который позволял бы решить для произвольно взятой точки  $x = (x_1, x_2)$ , лежит ли она внутри, на границе или вне многоугольника. Если  $\Omega(x_1, x_2)$  — двузначный предикат, то граница и внутренность многоугольника (или

граница и внешность) составляют единую область и нельзя узнать, лежит ли точка на границе или внутри (вне) области.

Более простая ситуация возникает, если необходимо различать, лежит ли данная точка на границе области или вне границы (внутри или вне безразлично). Естественно, что для этой цели годится и трехзначный предикат описанного выше вида, однако он содержит в некотором роде «лишнюю» информацию — дополнительно различает внешнюю и внутреннюю область. Оказывается, если ослабить в указанном смысле требования к предикатным уравнениям, то можно предложить для их построения более простые алгоритмы.

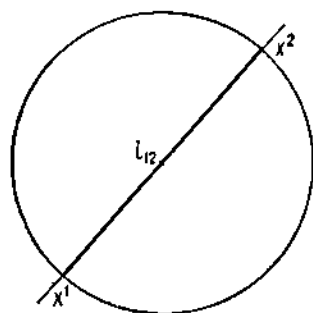


Рис. 40.

Рассмотрим такую «ослабленную» задачу для многоугольных областей. Пусть  $x^1 x^2$  — некоторый отрезок на  $\mathbb{R}^2$  с вершинами в точках  $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$  и  $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$ . Пусть  $\sigma_{12}(x) = 0$  и  $\sigma_{21}(x) = 0$  — ориентированные уравнения прямых, соответственно для отрезков  $x^1 x^2$  и  $x^2 x^1$ . Тогда двузначный предикат

$$F(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) \equiv S_2(\sigma_{12}) \wedge S_2(\sigma_{21}) \quad (1.193)$$

принимает значение, равное единице, в точках прямой, проходящей через точки  $x^1$  и  $x^2$ , и нулю — в остальных точках  $\mathbb{R}^2$ . Пусть  $l_{12} = \sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2} = \|x^2 - x^1\|$ . Предикат

$$\Phi(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = S_2 \left[ \frac{1}{4} l_{12}^2 - \left( x_1 - \frac{x_1^1 + x_1^2}{2} \right)^2 - \left( \frac{x_2^1 + x_2^2}{2} - x_2 \right)^2 \right] \quad (1.194)$$

принимает значение единица в точках круга, построенного на отрезке  $x^1 x^2$  как на диаметре (рис. 40) и значение нуль — вне этого круга. Тогда предикатное уравнение

$$\Psi(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = F \wedge \Phi = 1 \quad (1.195)$$

есть уравнение отрезка  $x^1 x^2$ .

Пусть некоторый чертеж  $L$  представляет собой соединение  $m$  отрезков  $x^{i1} x^{i2}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), где  $x^{ij} = (x_1^{ij}, x_2^{ij})$ . Тогда двузначное предикатное уравнение  $L$  можно записать в виде

$$\bigvee_{i=1}^{i=m} \Psi(x_1, x_2, x_1^{i1}, x_2^{i1}, x_1^{i2}, x_2^{i2}) = 1. \quad (1.196)$$

Описанный выше алгоритм построения предикатного уравнения является примером применения метода, который будем называть *методом стандартных элементов*. Суть этого метода состоит в следующем.

Пусть рассматриваемый чертеж принадлежит множеству чертежей, составленных из дуг кривых (или кусков поверхностей) некоторого  $n$ -параметрического семейства чертежей. Дуга  $L$  кривой семейства определяется, вообще, заданием  $n$  ее точек (включая концы дуги). Поэтому предикатное уравнение дуги  $L$  в общем случае имеет вид

$$F(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, \dots, x_1^n, x_2^n) = 1. \quad (1.197)$$

Если предикаты для некоторого набора дуг построены, то предикатное уравнение чертежа, представляющего их объединение, можно записать в виде

$$\bigvee_{i=1}^{i=m} F_i(x_1, x_2, x_1^i, x_2^i, \dots, x_1^n, x_2^n) = 1, \quad (1.198)$$

где  $(x_1^i, x_2^i)$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) — координаты точек, определяющие  $i$ -ю дугу. Таким образом, все сводится к построению стандартного предиката  $F(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, \dots, x_1^n, x_2^n)$  для типового элемента чертежа. Естественно, что сказанное справедливо и для чертежа, состоящего из нескольких типов стандартных элементов.

Как уже отмечалось, построение предикатных уравнений будет использовано в последующем как промежуточный этап при построении обычных уравнений сложных геометрических объектов. С этой точки зрения не безразлично, как строились предикатные уравнения, так как в зависимости от этого обычные уравнения геометрических объектов (см. гл. 2) будут проще или сложнее.

**R-ФУНКЦИИ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА  
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

**§ 1. Описательное и формальное определение  
R-отображений**

Среди функций обычных действительных аргументов имеются такие функции, знак которых вполне определяется заданием знаков аргументов и не зависит от их абсолютных величин. Например, для функций

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 x_2 x_3 \varphi(x_1, x_2, x_3) \quad (\varphi > 0); \\ u_2 &= x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2}; \\ u_3 &= (2e^{x_1 + x_2 + x_3} + 1)[x_1^2 + (x_2 - 1)^2]; \\ u_4 &= \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2 x_3 + 2(x_2 + x_3)\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} + \\ &\quad + x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

зависимость их знаков от знаков аргументов следующая:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$
-	-	-	-	-	+	-	+	-	-	+	+	+	+
-	-	+	+	-	+	+	+	-	+	-	+	+	+
-	+	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+
-	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

(Для функций  $u_1$  и  $u_3$  указанная таблица знаков очевидна; проверить ее справедливость для  $u_2$  и  $u_4$  предоставляем читателю.)

Можно привести примеры функций, знак которых зависит не только от знаков аргументов, но и от их модулей. Такими функциями, например, являются функции  $u_5 = x_1 + x_2 + x_3$ ;  $u_6 = \sin x_1 x_2$ ;  $u_7 = x_1 x_2 + 1$  и т. д.

Положительность и отрицательность можно рассматривать как некоторые качества, которыми может обладать действительная переменная величина. У функций (2.1) качественная сторона передается как бы «по наследству» от аргументов к функциям — задание качеств аргументов вполне определяет и качество функции.

Кроме деления действительных чисел на положительные и отрицательные, есть много других возможностей наделять их качествами. Можно, например, считать, что рациональные числа об-

ладают качеством  $A$ , а иррациональные — качеством  $B$  или, скажем, приписывать качество  $A$  тем числам, которые по модулю меньше единицы, а качество  $B$  — всем остальным. Можно, наконец, вводить несколько (или даже бесконечно много) качественных градаций, разбивая числовую ось  $\mathbb{R}$  на несколько частей. Однако, каково бы ни было разбиение  $\Gamma$  множества  $\mathbb{R}$  по качествам, задание этого разбиения означает и задание множества  $\mathfrak{N}(\Gamma)$  тех функций, названных в работе [108]  $R$ -функциями, которые передают эти качества «по наследству». При этом, конечно, передача качеств «по наследству» понимается не в том смысле, что если все аргументы обладают некоторым качеством, то этим же качеством обладает и соответствующая  $R$ -функция. Речь идет лишь о том, что задание качеств аргументов означает и задание некоторого (одного из возможных) качества  $R$ -функции. Изменение качеств аргументов может привести и к изменению качества  $R$ -функции.

Если рассматриваемые качества перенумеровать каким-либо образом, то всякому набору качеств будет соответствовать некоторый набор их номеров. Задание той или иной  $R$ -функции приведет к установлению правила, которое каждому такого рода набору поставит в соответствие некоторое качество  $R$ -функции, а следовательно, и номер этого качества. Таким образом, одновременно с  $R$ -функцией оказывается заданной и некоторая функция логики (того же числа аргументов, что и рассматриваемая  $R$ -функция). Это обстоятельство приводит к существованию глубокой связи между  $R$ -функциями и функциями логики, что позволит, как будет показано ниже, привести в классический непрерывный анализ методы, ранее считавшиеся присущими исключительно дискретной математике.

В описанной выше схеме введения  $R$ -функций, которая еще подлежит формализации, ничто не мешает использовать вместо множества  $\mathbb{R}$  любое другое множество (например, комплексную плоскость, векторное или функциональное пространство и т. п.). Это распространяется не только на  $R$ -функции, но и вообще на  $R$ -отображения. (К дальнейшим обобщениям приводят соображения, изложенные ниже в § 2.)

Перейдем к формализации приведенного выше описательного определения  $R$ -отображений. Пусть  $\mathfrak{X}$  — множество, содержащее не менее  $k$  элементов. Зададим сюръекцию вида  $S_k: \mathfrak{X} \rightarrow B_k$ ,  $B_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ . (Это означает, что каждый элемент  $X \in B_k$  имеет непустой прообраз  $S_k^{-1}(X)$ .) Задание  $S_k$  приводит к разбиению  $\mathfrak{X}$  на  $k$  подмножеств  $\mathfrak{X}(i) = S_k^{-1}(i)$ ,  $i \in B_k$ , которые назовем *качественными градациями* на  $\mathfrak{X}$ , соответствующими сюръекции  $S_k$ . Будем также считать, что  $x \in \mathfrak{X}$  обладает качеством  $i$ , если  $x \in \mathfrak{X}(i)$ . Введем также отображение  $S_k^n: \mathfrak{X}^n \rightarrow B_k^n$ , где  $S_k^n(x) = (S_k(x_1), \dots, S_k(x_n))$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

**Определение 1.** Отображение  $f: \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^m$  называется  $R$ -отображением, если существует такая функция  $k$ -значной логики  $F: B_k^n \rightarrow B_k^m$ , которая вместе с  $f$  образует коммутативную

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{X}^n & \xrightarrow{f} & \mathfrak{X}^m \\
 S_k^n \downarrow & & \downarrow S_k^m \\
 B_k^n & \xrightarrow{F} & B_k^m
 \end{array} \quad (2.2)$$

или, другими словами, если

$$S_k^n \circ f = F \circ S_k^n, \quad (2.3)$$

где  $u \circ v$  — композиция  $u$  и  $v$  (см. § 4 гл. 1).

Множество всех  $R$ -отображений обозначим  $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S_k)$  (это обозначение отражает тот факт, что множество всех  $R$ -отображений вполне определяется заданием основного множества  $\mathfrak{X}$  и сюръекции  $S_k$ ).

Функция  $k$ -значной логики  $F: B_k^n \rightarrow B_k^m$ , соответствующая  $R$ -отображению в смысле обеспечения коммутативности диаграммы (2.2), называется *сопровождающей для  $f$* . Если  $\mathfrak{X}$  — числовое множество, то  $R$ -отображения будем также называть  $R$ -функциями (соответствующими сюръекции  $S_k$ ).

*Замечание 1.* Если  $\varphi: \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^m$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  —  $R$ -отображение, а  $\Phi: B_k^n \rightarrow B_k^m$ ,  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$  — сопровождающая для  $\varphi$  функция («вектор-функция»)  $k$ -значной логики, то каждое  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) также является  $R$ -отображением и имеет сопровождающую  $\Phi_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

*Замечание 2.* Если  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ ;  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_p)$  —  $R$ -отображения, а  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ ;  $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_p)$  — их соответствующие сопровождающие функции  $k$ -значной логики, то  $(\varphi, \psi) = (\varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi_1, \dots, \psi_p): \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^{m+p}$  является  $R$ -отображением и имеет сопровождающую  $(\Phi, \Psi) = (\Phi_1, \dots, \Phi_m, \Psi_1, \dots, \Psi_p)$ .

**Пример 1.** Легко убедиться в том, что тождественное отображение  $f(x) \equiv x$ ,  $x \in \mathfrak{X}^n$ , является  $R$ -отображением при любом выборе сюръекции  $S_k$ . Сопровождающей для него является функция  $F(X) \equiv X$ ,  $X \in B_k^n$ .

**Пример 2.** Функции  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  (2.1) являются  $R$ -функциями, соответствующими разбиению  $\mathbb{R}$  с помощью сюръекции, определяемой предикатом  $S_3(t)$ :

$$S_3(t) = \begin{cases} 2, & \forall t \in (0, +\infty); \\ 1, & t = 0; \\ 0, & \forall t \in (-\infty, 0). \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь  $\mathfrak{X}(0) = (-\infty, 0)$ ;  $\mathfrak{X}(1) = 0$ ;  $\mathfrak{X}(2) = (0, +\infty)$ .

*Замечание 3.* При составлении таблицы зависимости знаков аргументов функций (2.1) учитывались лишь две качественные градации переменных величин  $x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, u_4$  — положительность и отрицательность. Нетрудно проверить, что при нулевых

значениях аргументов  $x_1, x_2, x_3$  (всех или части) функции  $u_1, u_2$  и  $u_4$  принимают значение из множеств  $\mathfrak{X}(0), \mathfrak{X}(1)$  или  $\mathfrak{X}(2)$ . Что касается функции  $u_3$ , то она в таких точках, как, например,  $x^1 = (0, 1, 0)$  и  $x^2 = (0, 2, 0)$ , принимает значения  $u_3(x^1) = 0 \in \mathfrak{X}(1)$  и  $u_3(x^2) = (2e^2 + 1) \in \mathfrak{X}(2)$  соответственно, в то время как этим точкам в  $B_3^3$  соответствуют одинаковые точки:  $X^1 = X^2 = (1, 2, 1)$ . Таким образом, в этом случае одинаковым наборам качественных градаций соответствуют различные по качеству значения функции  $u_3(x_1, x_2, x_3)$ . Следовательно, она не является  $R$ -функцией (в смысле разбиения  $\mathbb{R}$ , определяемого сюръекцией  $S_3(t)$  (2.4)).

Однако если взять, например,  $\mathfrak{X} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  и задать сюръекцию

$$S_2(t) = \begin{cases} 1, & \forall t \in (0, \infty); \\ 0, & \forall t \in (-\infty, 0), \end{cases} \quad (2.5)$$

разбивающую  $\mathfrak{X}$  на две качественные градации  $\mathfrak{X}(0) = (-\infty, 0)$  и  $\mathfrak{X}(1) = (0, \infty)$ , то  $u_3(x_1, x_2, x_3)$  также окажется  $R$ -функцией. Нетрудно убедиться в том, что функции  $u_1, u_2$  и  $u_4$  в этом случае также  $R$ -функции. Таким образом, используя обозначение  $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S_k)$ , в данном случае можем написать

$$u_1, u_2, u_4 \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}, S_3); \quad u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathfrak{R}((-\infty, 0) \cup (0, \infty), S_2). \quad (2.6)$$

Исключение нуля из множества  $\mathbb{R}$  приводит к тому, что  $R$ -функциям  $u_i$  соответствуют уже не трехзначные, а двухзначные сопровождающие функции алгебры логики. В то же время не  $R$ -функция (например,  $u_3$ ) с точки зрения трехзначной логики может стать  $R$ -функцией при переходе к двухзначной логике.

**Пример 3.** Функция трехзначной логики  $U_2 = F(X_1, X_2)$ , сопровождающая для  $R$ -функции  $u_2(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}, S_3)$ , рассмотренной в предыдущем примере, может быть задана так:

$X_1$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$X_2$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$U_2$	0	1	2	1	1	2	2	2	2

Нетрудно убедиться в том, что  $U_2(X_1, X_2) \equiv \max(X_1, X_2) \equiv X_1 \vee X_2$ , т. е. сопровождающей для функции  $u_2(x_1, x_2)$  является трехзначная дизъюнкция. Для того чтобы получить аналитическое выражение для функций трехзначной логики, сопровождающих  $R$ -функции  $u_1(x_1, x_2, x_3)$  и  $u_4(x_1, x_2, x_3)$ , необходимо сначала составить для них таблицы (27 строк в каждой), а затем использовать теорему 1 § 13 гл. 1.

**Пример 4.** Пусть  $\mathfrak{X} \subset C^1(\mathbb{R})$  — множество строго монотонных в точке  $t$  дифференцируемых функций,  $\mathfrak{X}(0), \mathfrak{X}(1) \subset \mathfrak{X}$  — соответственно подмножества убывающих и возрастающих в этой точке функций, а  $S_2(x) = 0$  при  $x \in \mathfrak{X}(0)$  и  $S_2(x) = 1$  при  $x \in \mathfrak{X}(1)$ . Легко убедиться в том, что оператор  $A: \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}$  вида

$$Ax = \int_0^x \left( 1 - \exp \prod_{i=2}^n x'_i(t) \right) dt, \quad (2.7)$$

$x_i(t) \in \mathfrak{X}$  ( $i = 1, \dots, n$ );  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , является  $R$ -отображением ( $R$ -оператором) и ему соответствует булева функция  $X_1 \sim (X_2 \sim \dots \sim X_n)$ .

Действительно, производная

$$\frac{d}{dt} Ax = \left( 1 - \exp \sum_{i=2}^n x'_i(t) \right) x'_1(t) \quad (2.8)$$

положительна, если функции

$$x'_1(t), \left( 1 - \exp \prod_{i=2}^n x'_i(t) \right) \quad (2.9)$$

одинакового знака, и отрицательна — в противном случае.

Знак второго из выражений (2.9) вполне определяется знаками  $x'_i(t)$  ( $i = 2, \dots, n$ ), т. е. принадлежностью функций  $x_i(t)$  к множествам  $\mathfrak{X}(0)$  (убывающих) и  $\mathfrak{X}(1)$  (возрастающих) функций. А именно, если четное число функций  $x_i(t)$  ( $i = 2, \dots, n$ ) убывающих, то функция  $1 - \exp \prod_{i=2}^n x'_i(t)$  отрицательна. В противном случае она положительна. Анализ этих знаков и приводит к сопровождающей функции  $X_1 \sim (X_2 \sim \dots \sim X_n)$ .

Перейдем к вопросу о замкнутости введенного выше множества  $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S_k)$   $R$ -функций.

*Теорема 1. Множество  $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S_k)$  замкнуто.*

*Доказательство.* Пусть  $\varphi: \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^m$ ,  $\psi: \mathfrak{X}^m \rightarrow \mathfrak{X}^p$  —  $R$ -отображения из  $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S_k)$ . Составим для этих отображений коммутативные диаграммы (2.2) и соединим их в одну:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{X}^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{X}^m & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{X}^p \\ s_i^n \downarrow & & s_i^m \downarrow & & s_i^p \downarrow \\ B_k^n & \xrightarrow{\Phi} & B_k^m & \xrightarrow{\Psi} & B_k^p \end{array}, \quad (2.10)$$

где  $\Phi: B_k^n \rightarrow B_k^m$  и  $\Psi: B_k^m \rightarrow B_k^p$  — сопровождающие функции  $k$ -значной логики для  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно. Из (2.10) следует коммутативность диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}^n & \xrightarrow{\psi \circ \varphi} & \mathfrak{X}^p \\ s_i^n \downarrow & & s_i^p \downarrow \\ B_k^n & \xrightarrow{\Psi \circ \Phi} & B_k^p \end{array}. \quad (2.11)$$

Следовательно,  $\psi \circ \varphi$  есть  $R$ -отображение, для которого функция  $\Psi \circ \Phi$  является сопровождающей. Учитывая, что  $(\varphi, \psi) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S_k)$  (см. замечание 2), если  $\varphi, \psi \in \mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S_k)$ , а тождественное отображение  $y \equiv x$  всегда является  $R$ -отображением (см. пример 1), приходим к выводу о том, что  $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S_k)$  замкнуто и относительно образования суперпозиций. Теорема доказана.

Из сказанного видно, что сопровождающая функция  $k$ -значной логики может быть получена путем формальной замены в рассматриваемой суперпозиции всех входящих в нее  $R$ -отображений соответствующими им сопровождающими функциями. Отсюда вытекает следующая теорема.



**Теорема 2.** Если множество  $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{R}(X, S_k)$  замкнуто, то замкнуто и множество  $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}(B_k)$  соответствующих сопровождающих функций.

Нетрудно заметить, что одна и та же функция  $k$ -значной логики может оказаться сопровождающей для различных  $R$ -отображений. (Например, знак первой из функций (2.1) не зависит от выбора множителя  $\varphi > 0$ .) Бинарное отношение «иметь общую сопровождающую» является отношением эквивалентности. Это приводит к разбиению множества  $\mathfrak{R}(X, S_k)$  на классы  $R$ -отображений (имеющих общую сопровождающую), которые будем называть ветвями  $\mathfrak{R}(X, S_k)$ . Учитывая, что ветвь вполне определяется заданием какого-либо своего  $R$ -отображения  $f$  или его сопровождающей функции  $F$ , будем обозначать ее  $\mathfrak{R}(f)$  или  $\mathfrak{R}(F)$  в зависимости от того, какое обозначение удобнее по контексту. Следуя определению, данному в § 4 гл. 1, множество  $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{R}(X, S_k)$  назовем замкнутым по признаку разбиения  $\mathfrak{R}(X, S_k)$  на ветви, если для всякой суперпозиции  $f$   $R$ -отображений из  $\mathfrak{M}_1$  в  $\mathfrak{M}_1$  существует  $R$ -отображение, принадлежащее той же ветви, что и  $f$ .

Для подмножеств множества  $\mathfrak{R}(X, S_k)$ , замкнутых по признаку разбиения на ветви, справедлива теорема, более сильная, чем теорема 2.

**Теорема 3.** Для того чтобы множество  $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{R}(X, S_k)$  было замкнуто по признаку разбиения множества  $\mathfrak{R}(X, S_k)$  на ветви, необходимо и достаточно, чтобы было замкнуто множество  $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}(B_k)$  соответствующих сопровождающих функций.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $H_1$  — произвольная система функций из  $\mathfrak{M}_1$ , а  $H \subset \mathfrak{M}_0$  — система  $R$ -отображений из соответствующих им ветвей. Пусть  $F$  — какая-либо суперпозиция системы  $H_1$ , а  $f$  — соответствующая, т. е. имеющая ту же структуру (см. § 4 гл. 1), суперпозиция системы  $H$  ( $f$  может и не принадлежать  $\mathfrak{M}_0$ ). Так как  $\mathfrak{M}_0$  предполагается замкнутым по признаку разбиения  $\mathfrak{R}(X, S_k)$  на ветви, в  $\mathfrak{M}_0$  есть  $R$ -отображение  $f_1$ , принадлежащее ветви  $\mathfrak{R}(f)$ . Сопровождающей для  $f_1$  является  $F$  и, следовательно,  $F \in \mathfrak{M}_1$ . Поэтому  $\mathfrak{M}_1$  — замкнутое множество.

**Достаточность.** Пусть  $H \subset \mathfrak{M}_0$  — произвольная система  $R$ -отображений, а  $f$  — суперпозиция системы  $H$ . Если  $F$  — суперпозиция соответствующей системы  $H_1$  сопровождающих функций, то в силу замкнутости  $\mathfrak{M}_1$   $F \in \mathfrak{M}_1$ . Тогда по условию теоремы  $F$  является сопровождающей для некоторого  $R$ -отображения  $f \in \mathfrak{M}_0$ . Так как  $f, f_1 \in \mathfrak{R}(F)$ , множество  $\mathfrak{M}_0$  замкнуто по признаку разбиения  $\mathfrak{R}(X, S_k)$  на ветви. Теорема доказана.

**Определение 2.** Система  $H$  называется достаточно полной (полной по признаку разбиения  $\mathfrak{R}(X, S_k)$  на ветви) в  $\mathfrak{R}(X, S_k)$ , если множество  $\mathfrak{M}(H)$  всех  $H$ -реализуемых отображений (см. § 4 гл. 1) имеет непустое пересечение с каждой ветвью  $\mathfrak{R}(F) \subset \mathfrak{R}(X, S_k)$ .

Другими словами, достаточная полнота системы  $H$  означает, что в каждой ветви  $\mathfrak{R}(F)$  есть по крайней мере одно  $R$ -отображение, которое может быть задано в виде единого аналитического

выражения, записанного с помощью введенных для системы  $H$  символов

Следствием теоремы 3 является следующая теорема.

**Теорема 4.** Для того чтобы система  $H \subset \mathfrak{R}, (\mathfrak{X}, S_k)$  была достаточно полной в множестве  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S_k)$ , необходимо и достаточно, чтобы соответствующая система  $H_1$  сопровождающих функций была полной в множестве  $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}(B_k)$  функций, сопровождающих  $\mathfrak{M}$

Так как для замкнутых множеств функций  $k$ -значной логики, рассмотренных в гл. 1, существуют конечные полные системы, то согласно теореме 4 для соответствующих множеств  $R$ -отображений существуют конечные достаточно полные системы.

*Упражнения и задачи.* 1. Пусть  $S_3(t)$  определяется формулой (2.4). Принадлежат ли множеству  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, S_3)$  функции

$$v_1 = x_1 + x_2 + x_3 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}; \quad v_2 = 2^{x_1 x_2 x_3} - 1;$$

$$v_3 = x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|; \quad v_4 = 1 + \sin(x_1 x_2)?$$

2. Показать, что отображение

$$y = Ax = x_1(t) + x_2(t) - \int_0^t \sqrt{[x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2} dt$$

является  $R$ -отображением в смысле, указанном в примере 4. Найти соответствующую ему сопровождающую булеву функцию. Показать, что функция  $y(t) = Ax$  на интервале  $(a, b)$  возрастает тогда и только тогда, когда  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  возрастающие на  $(a, b)$  функции.

## § 2. Обобщение понятия $R$ -отображения

Описанное в § 1 понятие  $R$ -отображения (в частности,  $R$ -функции) может быть расширено в результате учета следующих обстоятельств. При качественной оценке тех или иных величин или ситуаций часто бывает трудно с полной определенностью относить их к тому или иному качеству. Кроме того, бывают случаи, когда представляют интерес не все возможные наборы качеств, а лишь некоторые из них, и передача качеств от прообразов к их образам должна осуществляться именно для этих наборов. Естественно, что при таком подходе  $R$ -отображению ( $R$ -функции) может соответствовать не одна функция алгебры логики, а несколько. Что же касается передачи качеств «по наследству», то в подобных ситуациях ее можно понимать как возможность относить значения  $R$ -функции, соответствующие рассматриваемым наборам качеств аргументов, к тому или иному из допустимых качеств. Ниже приведена формализация высказанных соображений.

Пусть  $\mathfrak{X}$  — некоторое множество. Рассмотрим систему  $\Gamma$  подмножеств  $\mathfrak{X}$ :

$$\Gamma = \{\mathfrak{X}(0), \mathfrak{X}(1), \dots, \mathfrak{X}(k-1)\}, \quad (2.12)$$

представляющую собой покрытие  $\mathfrak{X}$ :  $\mathfrak{X} \subset \bigcup_{i=0}^{i=k-1} \mathfrak{X}(i)$ .

Множества  $\mathfrak{X}(i)$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ ) могут, вообще, взаимно пересекаться, поэтому каждый из элементов множества  $\mathfrak{X}$  может принадлежать нескольким из подмножеств  $\mathfrak{X}(i)$ . Совокупность тех из подмножеств  $\mathfrak{X}(i)$ , которые содержат  $z \in \mathfrak{X}$ , обозначим  $\sigma(z)$ .

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{X}^n$ , а

$$\sigma(x_j) = \{\mathbb{X}(m_{q_1}^j), \dots, \mathbb{X}(m_{q_s}^j)\}; \quad (2.13)$$

$$m_{q_j}^i \in B_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$$

есть система подмножеств, содержащих координату  $x_j$  точки  $x$ . Тогда  $x = (x_1, \dots, x_n)$  принадлежит каждому из множеств

$$\tau(q_1, \dots, q_n) = \mathbb{X}(m_{q_1}^1) \times \dots \times \mathbb{X}(m_{q_n}^n) \quad (q_j = 1, \dots, s_j; j = 1, \dots, n). \quad (2.14)$$

(Здесь  $m_{q_j}^i$  — номер множества  $\mathbb{X}(m_{q_j}^i)$  в строке  $\mathbb{X}(0), \mathbb{X}(1), \dots, \mathbb{X}(k-1)$ ;  $q_j$  — номер этого же множества в строке (2.13) тех множеств, которые содержат элемент  $x_j$ .)

При изменении координат точки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  соответствующая ей система множеств (2.14) будет, вообще, изменяться, однако количество различных множеств, которые таким путем могут быть получены, конечно и равно  $k^n$ . Это следует из того, что каждое из множеств  $\tau(q_1, \dots, q_n)$  ( $q_j = 1, \dots, s_j; j = 1, \dots, n$ ) вполне определяется заданием набора чисел  $q_1, \dots, q_n \in B_k$ , а число различных таких наборов равно  $k^n$ .

Перенумеруем множества (2.14) от единицы до  $k^n$ , используя для них обозначение  $T_i$  ( $i = 1, \dots, k^n$ ). Множества  $T_i$  являются, очевидно, подмножествами множества  $\mathbb{X}^n$ . Из сказанного выше следует, что каждому элементу множества  $\mathbb{X}^n$  соответствует не менее одного из множеств  $T_i$ , содержащих его. Таким образом,

$$\bigcup_{i=1}^{i=k^n} T_i = \mathbb{X}^n. \quad (2.15)$$

**Определение 1.** *Отображение  $f: \mathbb{X}^n \rightarrow \mathbb{X}$  называется  $R$ -отображением по отношению к множеству  $T_i \subset \mathbb{X}^n$ , если можно указать такое число  $q_i \in B_k$ , что  $\forall x \in T_i$  выполняется условие  $f \in \mathbb{X}(q_i)$ .*

**Определение 2.** *Отображение  $f: \mathbb{X}^n \rightarrow \mathbb{X}$  называется  $R$ -отображением по отношению к системе  $\{T_i\}$ , если оно является  $R$ -отображением по отношению к каждому из множеств  $T_i \in \{T_i\}$ . Отображение, являющееся  $R$ -отображением по отношению к каждому из подмножеств  $T_i$  ( $i = 1, \dots, k^n$ ), называется совершенным  $R$ -отображением.*

Если  $\mathbb{X}$  — числовое множество, то  $R$ -отображения будем называть  $R$ -функциями, если  $\mathbb{X}$  — функциональное пространство —  $R$ -операторами. Аналогично вводятся  $R$ -отображения вида  $f: \mathbb{X}^n \rightarrow \mathbb{X}^m$  (векторные  $R$ -отображения). Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть  $k = 1$  и, следовательно, множество  $\mathbb{X}(0)$  совпадает с исходным множеством  $\mathbb{X}$ . Соответствующие этому тривиальному случаю  $R$ -отображения представляют собой обычные отображения  $\mathbb{X}^n \rightarrow \mathbb{X}$ , т. е. являются правильными функциями с алфавитом  $\mathbb{X}$  ( $n$ -местными алгебраическими операциями на  $\mathbb{X}$ ). В частности, полагая  $\mathbb{X} = B_2 = \{0, 1\}$ , получаем булевы функции, при  $\mathbb{X} = B_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$  — функции  $k$ -значной логики.

2. Пусть  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ ;  $\mathbb{X}(0) = (-\infty, 0]$ ;  $\mathbb{X}(1) = [0, \infty)$ . Соответствующее такому покрытию числовой оси множество совершенных  $R$ -функций рассмотрено в работах [108, 109], где нуль рассматривался как положительное и отрицательное число одновременно. Примерами совершенных  $R$ -функций в этом случае являются

$$\omega_1 \equiv x_1 \wedge_0 x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$$

$$\omega_2 \equiv x_1 \vee_0 x_2 \equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$$

$$\omega_3 \equiv x_1 x_2 x_3 (1 + x_1^2);$$

$$\omega_4 \equiv (x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|) (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$$

и т. д. Примером функции, являющейся  $R$ -функцией по отношению к множеству  $T = \mathfrak{X}(1) \times \mathfrak{X}(1)$  (первая четверть плоскости  $x_1 O x_2$ ), но не являющейся  $R$ -функцией по отношению к другим областям  $T_i$ , есть функция

$$\omega \equiv 1 + x_1 + x_2. \quad (2.16)$$

3. Разобьем числовое множество  $\mathfrak{X}$  на непересекающиеся подмножества  $\mathfrak{X}(i)$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ ). Соответствующее множество  $R$ -отображений в этом случае совпадает с множеством  $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S_k)$   $R$ -отображений, рассмотренных в § 1. Так как множества  $\mathfrak{X}(i)$  непересекающиеся, непересекающимися оказываются также множества  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, k^n$ . Каждое из этих множеств вполне определяется набором целых чисел  $m_1^i, \dots, m_n^i \in B_k$ , так как  $T_i = \mathfrak{X}(m_1^i) \times \dots \times \mathfrak{X}(m_n^i)$  ( $i = 1, \dots, k^n$ ). Задание  $R$ -функции  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  означает также задание номера  $m_i$  множества  $\mathfrak{X}(m_i)$ , которому принадлежат ее значения, когда  $x \in T_i$ . Это приводит к установлению соответствия между наборами  $m_1^i, \dots, m_n^i$  и числами  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k^n$ ), т. е. к заданию некоторой функции  $k$ -значной логики.

Таким образом, если исходное множество  $\mathfrak{X}$  покрыто непересекающимися подмножествами  $\mathfrak{X}(i)$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ ), то каждому совершенному  $R$ -отображению можно поставить в соответствие функцию  $k$ -значной логики того же числа аргументов. Это соответствие может быть выражено формулой

$$S_k[f(x_1, \dots, x_n)] = F[S_k(x_1), \dots, S_k(x_n)], \quad (2.17)$$

где  $S_k(t) = i$ , если  $t \in \mathfrak{X}(i)$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ ).

Если  $f(x_1, \dots, x_n)$  является  $R$ -отображением по отношению к некоторой системе множеств  $\{T_i\}$ , не покрывающей  $\mathfrak{X}^n$ , то функции  $f$  можно поставить в соответствие некоторую систему («пучок») функций  $k$ -значной логики, значения которых в точках  $B_k^n$ , соответствующих системе  $\{T_i\}$ , совпадают, а в остальных точках — произвольны.

Функции  $k$ -значной логики, определенные не во всех точках  $B_k^n$ , обычно называют *частично заданными* или *частичными* функциями логики. Это дает основание называть несовершенные  $R$ -отображения *частичными*  $R$ -отображениями. Примером частичной  $R$ -функции является функция (2.16).

4. Пусть  $\mathfrak{X} = \{u(x_1, x_2) \in C^3(\Omega)\}$  есть множество трижды непрерывно дифференцируемых функций двух аргументов, определенных в некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Разобьем множество  $\mathfrak{X}$  на два подмножества:  $\mathfrak{X}(0)$ , включающее функции, тождественно удовлетворяющие в  $\Omega$  уравнению Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad (2.18)$$

и  $\mathfrak{X}(1)$ , включающее все остальные функции множества  $\mathfrak{X}$ . Тогда множество  $\mathfrak{X}^2$  упорядоченных пар  $(u, v)$ ,  $u, v \in \mathfrak{X}$  будет разбито на четыре подмножества:  $T(0)$  ( $\Delta u \equiv 0, \Delta v \equiv 0$ );  $T(1)$  ( $\Delta u \equiv 0, \Delta v \neq 0$ );  $T(2)$  ( $\Delta u \neq 0, \Delta v \equiv 0$ ) и  $T(3)$  ( $\Delta u \neq 0, \Delta v \neq 0$ ). Двухзначные операторы

$$A_1(uv) \equiv C_1 u + C_2 v + e^{x_i};$$

$$A_2(u, v) \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2}$$

являются частичными  $R$ -операторами по отношению к подмножеству  $T(0)$ , так как если  $\Delta u \equiv 0; \Delta v \equiv 0$ , то  $\Delta A_1 \equiv e^{x_i} \neq 0; \Delta A_2 \equiv 0$ , т. е.  $\Delta A_1 \in \mathfrak{X}(1)$ ,  $\Delta A_2 \in \mathfrak{X}(0)$ . Оператор  $A_3(u, v) \equiv u \int_{\Omega} \Delta v d\Omega + v \int_{\Omega} \Delta u d\Omega$  является  $R$ -операто-

ром по отношению к множествам  $T(0)$ ,  $T(1)$  и  $T(2)$ , так как для них  $\Delta A_3 \equiv 0$ , если хотя бы одна из функций  $u$  или  $v$  является гармонической.

Доказанное в предыдущем параграфе свойство замкнутости множества  $\mathfrak{R}(X, S_k)$  сохраняется в рассматриваемой более общей ситуации.

**Теорема 1.** *Каковы бы ни были множество  $X$  и его покрытие  $\Gamma_k = \{X(i), i = 0, 1, \dots, k-1\}$ , соответствующее множество  $\mathfrak{R}(X, \Gamma_k)$  совершенных  $R$ -отображений является замкнутым.*

**Доказательство.** Рассмотрим множество  $\mathfrak{R}(X, \Gamma_k)$  совершенных  $R$ -отображений. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi_j(x_{j1}, \dots, x_{jm_j}) \in \mathfrak{R}(X, \Gamma_k) \quad (j = 1, \dots, n); \\ f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}(X, \Gamma_k) \end{aligned} \quad (2.19)$$

есть некоторая система  $R$ -отображений.

Рассмотрим суперпозицию

$$f[\varphi_1(x_{11}, \dots, x_{1m_1}), \dots, \varphi_n(x_{n1}, \dots, x_{nm_n})], \quad (2.20)$$

где элементы  $x_{ji} \in X$  — не обязательно различные. Пусть среди этих элементов имеется  $q$  различных. Перенумеруем их от 1 до  $q$ , введя обозначения  $y_1, \dots, y_q$ . Пусть  $y_s \in X(\rho_s)$ ,  $\rho_s \in B_k$  ( $s = 1, \dots, q$ ). Рассмотрим множество

$$T = X(\rho_1) \times \dots \times X(\rho_q), \quad (2.21)$$

элементами которого являются наборы  $y_1, \dots, y_q$ . Задание набора  $y_1, \dots, y_q$  означает также задание наборов  $(x_{j1}, \dots, x_{jm_j})$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

При изменении набора  $y_1, \dots, y_q$  в пределах множества  $T$  упомянутые выше наборы  $(x_{j1}, \dots, x_{jm_j})$  будут находиться в пределах соответствующих множеств  $T^{(1)}, \dots, T^{(n)}$ , которые строятся аналогично множеству (2.21). Так как  $\varphi_j \in \mathfrak{R}(X, \Gamma_k)$ , найдутся также числа  $a_j \in B_k$  ( $j = 1, \dots, n$ ), что  $\varphi_j \in \mathfrak{X}(a_j)$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Тогда, вследствие того что  $f(x)$  также является совершенным  $R$ -отображением, окажется, что и суперпозиция (2.20) есть  $R$ -отображение при любом изменении набора  $y_1, \dots, y_q$ . Таким образом, (2.20) совершенное  $R$ -отображение. Теорема доказана.

Выше отмечалось, что задание  $R$ -отображения  $f$  означает и задание некоторой системы  $\{F\}$  функций  $k$ -значной логики:

$$\{F\} = \{F_1(X_1, \dots, X_n), F_2(X_1, \dots, X_n), \dots\}. \quad (2.22)$$

Эта система функций определяется следующим образом. При изменении точки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  в пределах множества  $T_j$  ( $j = 1, \dots, k^n$ ;  $R$ -отображение  $f(x_1, \dots, x_n)$  будет пробегать некоторое множество  $Q$ , принадлежащее по крайней мере одному из множеств  $X(i)$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ ). Номера  $a_1^i, \dots, a_{m_j}^i$  множеств  $X(a_1^i), \dots, X(a_{m_j}^i)$ , которым принадлежит множество  $Q$ , можно поставить в соответствие набору номеров  $m_1, \dots, m_n$  множеств  $X(m_1), \dots, X(m_n)$ , которым принадлежат элементы  $x_1, \dots, x_n$  соответственно. Если множество, состоящее из номеров  $a_1^i, \dots, a_{m_j}^i$ , обозначить  $A_j$ , то наборы значений функций (2.22)  $k$ -значной логики будут элементами множества  $A_1 \times \dots \times A_{k^n}$  и количество  $m$  различных функций  $k$ -значной логики, составляющих систему  $\{F\}$ , определится по формуле  $m = m_1 m_2 \dots m_{k^n}$ .

В частном случае, когда множества  $X(i)$ ,  $i \in B_k$ , не пересекаются, множества  $Q_j$  могут принадлежать только одному из множеств покрытия  $\Gamma_k$ , поэтому  $m_1 = \dots = m_{k^n} = 1$  и, следовательно,  $R$ -отображению  $f(x_1, \dots, x_n)$  соответствует единственная функция  $k$ -значной логики  $F(X_1, \dots, X_n)$ .

**Определение 3.** *Функции  $k$ -значной логики, соответствующие данному  $R$ -отображению  $f(x_1, \dots, x_n)$ , называются функциями, сопровождающими  $f$ .*

**Теорема 2.** Пусть  $\varphi_j(x_{j1}, \dots, x_{jm_j})$  ( $j = 1, \dots, s$ ) и  $f(y_1, \dots, y_s)$  есть совершенные  $R$ -отображения, а  $\Phi_j(X_{j1}, \dots, X_{jm_j})$  ( $j = 1, \dots, s$ ) и  $F(Y_1, \dots, Y_s)$  — взятые соответственно какие-либо из сопровождающих функций. Тогда суперпозиция

$$F[\Phi_1(X_{11}, \dots, X_{1m_1}), \dots, \Phi_s(X_{s1}, \dots, X_{sm_s})] \quad (2.23)$$

является сопровождающей для  $R$ -отображения

$$f[\varphi_1(x_{11}, \dots, x_{1m_1}), \dots, \varphi_s(x_{s1}, \dots, x_{sm_s})]. \quad (2.24)$$

**Доказательство.** Отображение (2.24) на основании теоремы 1 является совершенным  $R$ -отображением в каждом из множеств  $T_i$ , в которых набор номеров множеств  $\mathfrak{X}(i)$ ,  $i \in B_k$ , содержащих элементы  $x_1, \dots, x_{sm_s}$ , сохраняется,  $R$ -отображения  $\varphi_1, \dots, \varphi_s$  могут быть отнесены к множествам  $\mathfrak{X}(\Phi_1), \dots, \mathfrak{X}(\Phi_s)$  соответственно. Так как  $f(y_1, \dots, y_s) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{X}, \Gamma_k)$ , отображение (2.24) может быть отнесено к множеству  $\mathfrak{X}[F(\Phi_1, \dots, \Phi_s)]$ , т. е. суперпозиция (2.23) оказывается сопровождающей для (2.24), что и требовалось доказать.

**Теорема 3.** Если некоторое множество  $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{X}, \Gamma_k)$ , состоящее из совершенных  $R$ -отображений, замкнуто, то множество  $\mathfrak{M}$  соответствующих сопровождающих функций  $k$ -значной логики также замкнуто.

Справедливость теоремы 3 непосредственно следует из теоремы 2. Обратное утверждение, вообще, не верно, т. е. из замкнутости множества  $\mathfrak{M}$  не следует замкнутость множества  $\mathfrak{R}_1$ . Так, например, при покрытии числовой оси интервалами  $\mathfrak{X}(0) = (-\infty, 0]$ ;  $\mathfrak{X}(1) = [0, \infty)$  система  $\mathfrak{R}_1$ , составленная из двух  $R$ -функций  $w_1 \equiv \max(x_1, x_2)$  и  $w_2 \equiv 0$ , незамкнута, а соответствующая система  $\mathfrak{M}$  сопровождающих булевых функций содержит все булевы функции и, следовательно, представляет собой замкнутую систему. (Нетрудно видеть, что любая булева функция является сопровождающей для функции  $w_2 \equiv 0$ , которую можно рассматривать как функцию любого числа аргументов и относить ее значение как к множеству  $\mathfrak{X}(0)$ , так и к множеству  $\mathfrak{X}(1)$ .)

**Теорема 4.** Пусть  $\mathfrak{M}$  есть некоторое множество, составленное из функций  $k$ -значной логики, а  $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$  — множество всех соответствующих совершенных  $R$ -отображений, построенных на заданном множестве  $\mathfrak{X}$  при фиксированном его покрытии  $\Gamma_k$  непересекающимися подмножествами  $\mathfrak{X}(i)$ ,  $i \in B_k$ . Для того чтобы множество  $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$  было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы было замкнутым множество  $\mathfrak{M}$ .

Необходимость следует, очевидно, из теоремы 3, поэтому перейдем к доказательству достаточности.

Пусть (2.24) есть суперпозиция  $R$ -отображений, принадлежащих множеству  $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$ , а (2.23) — такая же суперпозиция соответствующих функций логики, принадлежащих  $\mathfrak{M}$ . Так как множество  $\mathfrak{M}$  функционально замкнуто, суперпозиция (2.23) принадлежит  $\mathfrak{M}$ . Ветвь  $R$ -отображений, соответствующая функции (2.23), включает  $R$ -отображение (2.24). Следовательно,  $R$ -отображение (2.24) принадлежит множеству  $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$ , что и требовалось доказать.

В заключение параграфа заметим, что подобно тому как это было сделано в § 1, для совершенных  $R$ -отображений можно ввести понятия ветви  $R$ -отображений и достаточно полной системы  $R$ -отображений.

**Упражнения и задачи.** 1. Пусть  $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{X}(0) = (-\infty, 0)$ ,  $\mathfrak{X}(1) = [0, \infty)$ . Указать системы всех сопровождающих булевых функций для следующих  $R$ -отображений:

$$u_1 \equiv 1; \quad u_2 \equiv 0; \quad u_3 \equiv (x_1 + |x_1|)(x_2 - |x_2|).$$

2. Пусть  $\mathfrak{X} = C^3(\Omega)$ ;  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathfrak{X}(0)$  — множество функций, для которых уравнение (2.18) удовлетворяется тождественно,  $\mathfrak{X}(1) = \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}(0)$ . Описать множество соответствующих этому случаю совершенных  $R$ -операторов.

3. Для каких разбиений  $\Gamma_k$  множества  $\mathfrak{X}$  и каких  $R$ -отображений могут существовать бесконечные системы сопровождающих функций  $k$ -значной логики?

4. Обобщить теоремы 1—4 на случай векторных  $R$ -отображений.

### § 3. Действительные $R$ -функции

Если основное множество  $\mathfrak{X}$ , используемое для построения  $R$ -отображений, представляет собой числовую ось или ее подмножество, то  $R$ -отображения — действительные функции действительных аргументов. В дальнейшем, если не будет оговорено особо, будут рассматриваться действительные совершенные  $R$ -функции, соответствующие всей числовой оси. Такие  $R$ -функции определены везде в пространстве своих аргументов и, таким образом, принадлежат множеству  $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$  правильных функций («алгебраических операций») с алфавитом  $\mathfrak{X} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .

Приведем некоторые свойства действительных  $R$ -функций.

1. Каково бы ни было покрытие  $\Gamma_k$  числовой оси, функция  $y \equiv C \equiv \text{const}$  является  $R$ -функцией. Если  $C \in \mathfrak{X}(s_j)$  ( $j = 1, \dots, m$ ), то сопровождающими функциями  $k$ -значной логики для функции  $y \equiv C$  будут всевозможные функции логики любого числа аргументов, значения которых принадлежат множеству  $\sigma(C) = \{s_1, \dots, s_m\}$ , состоящему из номеров тех множеств  $\mathfrak{X}(i)$ ,  $i \in B_k$ , которым принадлежит константа  $C$ .

Пусть, например,  $\mathfrak{X}(0) = (-\infty, 1]$ ;  $\mathfrak{X}(1) = [0, \infty)$ . Функция  $y \equiv 2$  является  $R$ -функцией, которой соответствует единственная булева функция  $Y \equiv 1$ . Для  $R$ -функции  $y \equiv \frac{1}{1+x_1^2}$  любая булева функция является сопровождающей.

2. Независимо от способа покрытия  $\Gamma_k$  числовой оси  $\mathbb{R}$  функция  $y \equiv x_1$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}$  является  $R$ -функцией. К числу сопровождающих  $R$ -функцию  $y \equiv x_1$  принадлежит функция  $k$ -значной логики  $Y \equiv X_1$ ,  $X_1 \in B_k$ .

Действительно, при изменении аргумента  $x_1$  в пределах какого-либо из множеств  $\mathfrak{X}(i)$ ,  $i \in B_k$ , функция  $Y \equiv X_1$  принимает значение, равное номеру того множества, к которому принадлежит значение  $y \equiv x_1$ . Если покрытие  $\Gamma_k$  состоит из непересекающихся множеств, то функция  $Y \equiv X_1$  — единственная сопровождающая функция для функции  $y \equiv x_1$ . В противном случае могут существовать и другие сопровождающие функции логики.

Пусть, например,  $k = 3$  и  $\mathfrak{X}(0) = (-\infty, 0]$ ,  $\mathfrak{X}(1) = [0, 2)$ ,  $\mathfrak{X}(2) = [2, \infty)$ . Тогда сопровождающими для  $y \equiv x_1$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}$  являются, например, функции трехзначной логики

$$F_i(X_1) \equiv X_1(2 - X_1)i + X_1(X_1 - 1) \quad (i = 0, 1, 2).$$

(В этой формуле используются обычные операции сложения и умножения.)

3. Пусть  $\Gamma_k$  есть покрытие числовой оси такое, что при замене  $t$  на  $(-t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , множество  $\mathfrak{X}(i)$  переходит в множество  $\mathfrak{X}(|k - 1 - i|)$ . Очевидно, что такое покрытие симметрично относительно начала координат на  $\mathbb{R}$ . Для всякого такого покрытия функция  $y \equiv -t$  является  $R$ -функцией. Среди сопровождающих ее функций логики есть функция  $Y \equiv \bar{X}$  (инверсия или отрицание).

4. Покрытие  $\Gamma_k = \{X(0), \dots, X(k-1)\}$  будем называть *монотонным*, если для всякой пары чисел  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  ( $t_1 \neq t_2$ ) из условий  $t_1 \in X(s)$ ,  $t_2 \in X(m)$  вытекают неравенства  $t_1 < t_2$  при  $s < m$  и  $t_1 > t_2$  при  $s > m$ . Примерами монотонных покрытий являются покрытия  $\Gamma_3 = \{(-\infty, -1), [-1, 2], (2, \infty)\}$ ,  $\Gamma_2 = \{(-\infty, 0], [0, \infty)\}$  и т. п. Покрытие  $\Gamma_3$  состоит из трех непересекающихся интервалов, в то время как множества  $X(0), X(1) \in \Gamma_2$  имеют общую точку, которая для них гранична.

Покажем, что функции  $y_1 \equiv \max(x_1, x_2)$  и  $y_2 \equiv \min(x_1, x_2)$  являются  $R$ -функциями при любом монотонном покрытии  $\Gamma_k$  числовой оси.

Действительно, при изменении аргументов  $x_1$  и  $x_2$  в пределах каких-либо из множеств  $X(\alpha_1)$  и  $X(\alpha_2)$  функции  $y_1$  и  $y_2$  удовлетворяют условиям  $y_1 \in X[\max(\alpha_1, \alpha_2)]$ ,  $y_2 \in X[\min(\alpha_1, \alpha_2)]$  и, следовательно, являются  $R$ -функциями. Этим функциям можно поставить в соответствие сопровождающие их функции  $k$ -значной логики  $Y_1 \equiv \max(X_1, X_2)$ ,  $Y_2 \equiv \min(X_1, X_2)$ .

В настоящей работе в основном будут рассматриваться  $R$ -функции для следующих покрытий:

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \{(-\infty, 0), [0, \infty)\}; \\ \Gamma_2^0 &= \{(-\infty, 0], [0, \infty)\}; \\ \Gamma_3 &= \{(-\infty, 0), 0, (0, \infty)\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Соответствующие этим разбиениям множества  $R$ -функций обозначим  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_2)$ ,  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_2^0)$  и  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_3) \equiv \mathfrak{R}$  и будем называть множествами  $R_2$ ,  $R_2^0$  и  $R_3$ -функций.

Множества  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_2)$ ,  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_2^0)$  и  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_3)$  пересекаются. Так, например, функции

$$y_1 \equiv x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|; \quad y_2 \equiv e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3};$$

$$y_3 \equiv \sqrt{x_1^2 + (x_2 + x_3 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2})^2} + x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

принадлежат каждому из этих множеств, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. В то же время функция  $y \equiv x_1 x_2$  принадлежит множествам  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_3)$  и  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_2^0)$ , но не принадлежит множеству  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_2)$ , а функция  $y \equiv x_1^2 x_2^2 (1 - x_1^2)$  принадлежит множеству  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_2)$ , но не принадлежит множеству  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_3)$ . Функция

$$y \equiv f(x_1, x_2) \equiv \begin{cases} 1, & \forall (x_1, x_2), \quad x_1^2 + x_2^2 > 0; \\ -1, & \forall (x_1, x_2), \quad x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

является  $R_3$ -функцией, но не принадлежит ни к  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_2)$ , ни к  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_2^0)$ .

Действительно, значения этой функции могут быть отнесены к множеству  $X(2) = (0, \infty)$ , если  $x_1, x_2 \notin X(1) = 0$ , и к множеству  $X(0) = (-\infty, 0)$ , если  $x_1, x_2 \in X(1)$ . В то же время в случае по-



крытий  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_2^0$ , если  $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}(1) = [0, \infty)$ , множество значений  $f(x_1, x_2)$ , состоящее из 1 и  $(-1)$ , не может быть отнесено ни к одному из интервалов  $(-\infty, 0]$ ,  $(-\infty, 0)$ ,  $[0, \infty)$ . В соответствии с принятой выше классификацией покрытий покрытия  $\Gamma_2, \Gamma_2^0$  и  $\Gamma_3$  являются монотонными. Следовательно, функции  $y_1 \equiv \max(x_1, x_2)$  и  $y_2 \equiv \min(x_1, x_2)$  являются  $R_2$ -,  $R_2^0$ - и  $R_3$ -функциями одновременно. Покрытия  $\Gamma_2^0$  и  $\Gamma_3$  являются симметричными, и поэтому функция  $y \equiv -x, x \in \mathbb{R}$ , является одновременно  $R_2$ - и  $R_3$ -функцией. Далее, покрытия  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  — непересекающиеся и, следовательно,  $R_2$ - и  $R_3$ -функции имеют по единственной сопровождающей функции двузначной и трехзначной логики соответственно.

Среди совершенных действительных  $R$ -функций особый интерес представляют непрерывные, а также требуемое число раз непрерывно-дифференцируемые функции. Именно с такими  $R$ -функциями приходится иметь дело при конструировании решений краевых задач математической физики, задач оптимального программирования и др.

Покажем, что даже в случае «хороших» покрытий числовой оси, таких, например, как  $\Gamma_2$  или  $\Gamma_3$ , существуют ветви  $R$ -функций, не содержащие непрерывных функций.

**Пример 1.** Рассмотрим ветвь множества  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_3)$ , соответствующую функции  $F(X) \in \mathfrak{Y}(B_3)$ , которая при  $X = 0$  и  $X = 2$  принимает значения, равные нулю, а при  $X = 1$  — равное двум. Принадлежащие соответствующей ветви  $R$ -функции должны, следовательно, быть строго отрицательны при  $x < 0$  и  $x > 0$ , а при  $x = 0$  — строго положительны. Очевидно, что такие функции в точке  $x = 0$  имеют разрыв.

**Пример 2.** Не содержит непрерывных функций ветвь  $R_2$ -функций, соответствующая отрицанию  $\bar{\mathfrak{X}}$  двузначной логики. Действительно, если  $y = f(x) \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_2)$  есть  $R_2$ -функция из соответствующей ветви, то при  $x < 0$  она должна принимать значение из интервала  $\mathfrak{X}(1) = [0, \infty)$ , т. е. быть неотрицательной, а при  $x \geq 0$  принимать значение из интервала  $\mathfrak{X}(0) = (-\infty, 0)$ , т. е. быть строго отрицательной. Следовательно, в точке  $x = 0$  функция  $y = f(x)$  имеет разрыв.

Пусть  $T$  есть некоторый признак (например, непрерывность, непрерывная дифференцируемость и т. п.), которым могут обладать правильные функции с алфавитом  $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ . Пусть, далее, признак  $T$  таков, что множество всех правильных функций, обладающих признаком  $T$ , замкнуто. Зададим некоторое покрытие  $\Gamma_k$  числовой оси. Может случиться, что некоторые из ветвей соответствующего множества  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_k)$  не содержат  $R$ -функций, обладающих признаком  $T$  (например, как в приведенных выше примерах, не содержат непрерывных функций, если признак  $T$  означает непрерывность).

Обозначим объединение всех ветвей множества  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_k)$ , которые содержат  $R$ -функции, обладающие признаком  $T$ , через  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_k, T)$ .

**Теорема 1.** *Каково бы ни было покрытие  $\Gamma_k$  числовой оси, множество  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_k, T)$  является замкнутым.*

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_i(x_{i1}, \dots, x_{im_i})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и  $f(y_1, \dots, y_n)$  —  $R$ -функции из  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_k)$  (не обязательно обла-

дающие признаком  $T$ ). Суперпозиция

$$f[\varphi_1(x_{11}, \dots, x_{1m_1}), \dots, \varphi_n(x_{n1}, \dots, x_{nm_n})] \quad (2.26)$$

согласно теореме 1 § 2 является  $R$ -функцией. По условию теоремы ветвь каждой из  $R$ -функций  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и  $f$  содержит  $R$ -функцию, обладающую признаком  $T$ . Пусть для них такими функциями являются  $R$ -функции  $\varphi_i^0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и  $f^0$ . Суперпозиция

$$f^0[\varphi_1^0(x_{11}, \dots, x_{1m_1}), \dots, \varphi_n^0(x_{n1}, \dots, x_{nm_n})] \quad (2.27)$$

принадлежит той же ветви, что и (2.26), так как  $R$ -функции  $\varphi_i$ ,  $f$  и  $\varphi_i^0$ ,  $f^0$  имеют соответственно одни и те же системы сопровождающих функций. Согласно теореме 2 § 2 суперпозиции (2.26) и (2.27) имеют общую систему сопровождающих функций и, следовательно, находятся в одной ветви. Но  $R$ -функция (2.27) обладает признаком  $T$ , так как по предположению множество функций, обладающих признаком  $T$ , замкнуто. Таким образом, ветвь, в которую входят суперпозиции (2.26) и (2.27), — часть множества  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_k, T)$ , что и доказывает его замкнутость.

*Следствие 1.* Объединение  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_k, C)$  ветвей  $R$ -функций, содержащих непрерывные функции, замкнуто. Замкнуто также объединение  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_k, C^m)$  ветвей  $R$ -функций, содержащих  $m$  раз непрерывно-дифференцируемые функции.

Справедливость этого следствия вытекает из замкнутости множеств  $C(\mathbb{R}^n)$  и  $C^m(\mathbb{R}^n)$ .

*Следствие 2.* Множество  $\mathfrak{M}(T)$  всех функций  $k$ -значной логики сопровождающих для  $R$ -функций из  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_k, T)$  замкнуто. (В частности, замкнуты множества  $\mathfrak{M}(C)$  и  $\mathfrak{M}(C^m)$  сопровождающих для непрерывных и  $m$  раз непрерывно-дифференцируемых функций соответственно.)

Справедливость этого следствия непосредственно вытекает из теоремы 3 § 2.

#### § 4. Основная система $R$ -функций

В дальнейшем главное внимание будет уделено  $R_s$ -функциям, соответствующим разбиению  $\mathbb{R}$  на части  $\mathfrak{X}(0) = (-\infty, 0)$ ,  $\mathfrak{X}(1) = (0, \infty)$ , что равносильно заданию сюръекции  $S_s(t)$  (2.4).

Множество всех  $R_s$ -функций будем обозначать  $\mathfrak{R}^s$ . Одновременно будем рассматривать также множество  $\mathfrak{R}^s$  таких  $R$ -функций, которые строятся на множестве  $\mathfrak{X} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  при его разбиении на две части:  $\mathfrak{X}(0) = (-\infty, 0)$  и  $\mathfrak{X}(1) = (0, \infty)$ .

Отметим некоторые свойства  $R_s$ -функций.

1. Если  $f \in \mathfrak{R}^s$ , то  $Cf \in \mathfrak{R}^s$  ( $C = \text{const}$ ). При этом, если  $F \in \mathfrak{F}(B_s)$  — сопровождающая для  $f$ , то при  $C > 0$   $F$  — сопровождающая и для  $Cf$ . При  $C < 0$  сопровождающая для  $Cf$  — функция  $\bar{F}$ ,

полученная путем применения к  $F$  операции трехзначного отрицания. При  $C = 0$  сопровождающей для  $Cf$  является  $F \equiv 1$ .

2. К числу  $R_3$ -функций относятся функции  $y_1 \equiv C \equiv \text{const}$ ;  $y_2 \equiv x \equiv -x$ ;  $y_3 = x_1 \wedge_1 x_2 \equiv \min(x_1, x_2)$ ;  $y_4 \equiv x_1 \vee_1 x_2 \equiv \max(x_1, x_2)$ . Сопровождающими для  $y_2, y_3$  и  $y_4$  соответственно являются функции из  $F(B_3)$ :  $\bar{X}$ ,  $X_1 \wedge X_2$  и  $X_1 \vee X_2$ . Справедливость этого свойства вытекает из симметричности и монотонности разбиения  $\Gamma_3$ .

3. Так как  $\min(x_1, x_2) + \max(x_1, x_2) \equiv x_1 + x_2$ ;  $\min(x_1, x_2) \times \max(x_1, x_2) = x_1 x_2$ , то  $\min(x_1, x_2)$  и  $\max(x_1, x_2)$  являются соответственно меньшим и большим корнями уравнения  $z^2 - (x_1 + x_2)z + x_1 x_2 = 0$ . Решая это уравнение, находим

$$\begin{aligned} \min(x_1, x_2) &\equiv \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|); \\ \max(x_1, x_2) &\equiv \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|). \end{aligned} \quad (2.28)$$

4. Произведение  $y = x_1 x_2$  есть  $R_3$ -функция. Соответствующая сопровождающая функция имеет следующий вид:

$X_1$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$X_2$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$F^3$	2	1	0	1	1	1	0	1	2

Функцию  $F$  принято называть *трехзначной равнозначностью* и обозначать, как и соответствующую булеву равнозначность, символом  $X_1 \sim X_2$ .

Заметим, что если в приведенной таблице вычеркнуть столбцы, содержащие единицы, а затем двойки заменить единицами, то для булевой равнозначности получим

$X_1$	0	0	1	1
$X_2$	0	1	0	1
$F$	1	0	0	1

Можно проверить, что трехзначная равнозначность ассоциативна:

$$(X_1 \sim X_2) \sim X_3 \equiv X_1 \sim (X_2 \sim X_3).$$

#### 5. Произведение

$$y \equiv \prod_{i=1}^n \varphi_i(x_{i1}, \dots, x_{im_i}), \quad (2.29)$$

где  $\varphi_i \in \mathfrak{R}^3$ , есть  $R_3$ -функция. (Это свойство следует из свойства 4 и замкнутости множества  $\mathfrak{R}^3$ .) При этом, если  $F_i(X_{i1}, \dots, X_{im_i})$  — сопровождающие для  $\varphi_i(x_{i1}, \dots, x_{im_i})$ , то сопровождающей для (2.29) является

$$Y \equiv F_1(X_{11}, \dots, X_{1m_1}) \sim \dots \sim F_n(X_{n1}, \dots, X_{nm_n}). \quad (2.30)$$

Пример 1. Функции

$$f_1(x_1, x_2) \equiv (1 - e^{x_1})(1 - e^{x_2});$$

$$f_2(x_1, x_2) \equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$$

$$f_3(x_3) \equiv -x_3$$

есть  $R_3$ -функции. Функция  $f_1$  соответствует равнозначности, функция  $f_2$  — дизъюнкция  $X_1 \vee X_2$ ,  $f_3$  — отрицанию из  $\bar{U}(B_3)$ . Поэтому функция

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv -x_3(1 - e^{x_1})(1 - e^{x_2})(x_2 + x_3 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2})$$

есть  $R_3$ -функция, для которой сопровождающей является

$$F(X_1, X_2, X_3) \equiv \bar{X}_3 \sim (X_1 \sim X_2) \sim (X_2 \vee X_3).$$

6. Если  $f$  —  $R_3$ -функция, а  $\varphi > 0$  — произвольная положительная функция тех же аргументов, что и  $f$ , то  $f\varphi$  — функция из той же ветви, что и  $f$ .

7. Если  $f_1$  и  $f_2$  есть  $R_3$ -функции из одной и той же ветви, то  $f_1 + f_2$  является  $R_3$ -функцией из этой же ветви.

8. Если  $f_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) —  $R_3$ -функции, принадлежащие одной ветви,  $\varphi_i > 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — произвольные положительные функции тех же аргументов, то  $f_1\varphi_1 + \dots + f_m\varphi_m$  есть  $R_3$ -функция из рассматриваемой ветви.

9. Если  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  есть  $R_3$ -функция, а  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — строго знакопостоянные функции, то функция  $y = f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  — знакопостоянная функция или тождественный нуль.

10. Если  $R_3$ -функция  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  интегрируема по переменной  $x_1$ , то функция

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv \int_0^{x_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \quad (2.31)$$

является  $R_3$ -функцией. При этом, если  $F(X_1, \dots, X_n) \in F(B_3)$  — сопровождающая для  $f$ , то

$$\Phi(X_1, \dots, X_n) \equiv X_1 \sim F(X_1, \dots, X_n) \in F(B_3) \quad (2.32)$$

есть сопровождающая для  $\varphi$ .

Пример 2. Нетрудно убедиться в том, что функция

$$y \equiv f(x_1, x_2) \equiv x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + (x_1 - x_1 x_2) \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_1^2}$$

является  $R_3$ -функцией, соответствующей дизъюнкци  $X_1 \vee X_2 \in F(B_3)$ . Тогда функция

$$\begin{aligned} y \equiv \varphi(x_1, x_2) &\equiv \int_0^{x_1} \left[ x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + (x_1 - x_1 x_2) \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_1^2} \right] dx_1 = \\ &= \frac{1}{3} x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_1 |x_2| \left[ \frac{1}{2} x_2 \sqrt{1 + x_2^2} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \ln \left( x_2 + \sqrt{1 + x_2^2} \right) - \frac{1}{3} \left( \sqrt{1 + x_2^2} \right)^3 + \frac{1}{3} \right] \end{aligned}$$

есть  $R_3$ -функция, для которой сопровождающей служит функция  $Y \equiv (X_1 \vee X_2) \sim X_2$ .

Очевидно, что если  $R_3$ -функция интегрируема по нескольким аргументам, то в результате ее интегрирования по каждому из аргументов (в указанных выше пределах) также получим  $R_3$ -функцию.

11. Если  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  есть  $R_3$ -функция, непрерывная в  $\mathbb{R}^n$ , а  $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$  — положительная функция, то функция

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) f(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n)$$

является  $R_3$ -функцией и принадлежит той же ветви, что и  $f$ .

Рассматриваемые в настоящем параграфе множества  $\mathfrak{R}^3$  и  $\mathfrak{R}^2$   $R$ -функций в последующих главах будут использованы при построении уравнений сложных геометрических объектов и так называемых структур решений краевых задач. Отметим, что применение разбиений и соответствующих  $R$ -функций, в которых нуль не выделен в отдельную качественную градацию, может оказаться недостаточным.

Дело в том, что к уравнению  $\omega(x) = 0$  границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  обычно предъявляется требование, чтобы функция  $\omega \in C(\mathbb{R}^n)$  была строго положительной внутри области  $\Omega$  и строго отрицательной вне ее. Между тем одного факта, что область  $\Omega$  определяется неравенством  $\omega > 0$ ,  $\omega$  — везде непрерывная функция, вообще, не достаточно для того, чтобы уравнение  $\omega = 0$  было уравнением границы  $\partial\Omega$ . Более того, если замкнутая область  $\Omega \cup \partial\Omega$  определяется неравенством  $\omega \geq 0$ ,  $\omega \in C(\mathbb{R}^n)$ , то это не означает, что  $\partial\Omega = (\omega = 0)$ . Аналогичное явление наблюдается и при рассмотрении областей  $\omega < 0$  и  $\omega \leq 0$ . Это обстоятельство вынудило рассматривать  $R$ -функции, соответствующие разбиению  $\Gamma_3$ , в котором нуль представляет самостоятельную качественную градацию. Несмотря на то что сопровождающими для таких  $R$ -функций есть функции трехзначной логики, булева алгебра может быть все же в значительной степени сохранена в качестве рабочего аппарата при решении прикладных задач. Это можно объяснить тем, что для приложений нужны не все  $R$ -функции, а лишь некоторое их подмножество, которому соответствуют функции трехзначной логики, близкие по свойствам функциям булевой алгебры.

Изложим соображения, приводящие к сужению множества  $\mathfrak{R}^3$ .

А. Для приложений естественно требование непрерывности  $R$ -функций. Между тем, как уже отмечалось выше, не каждая ветвь множества  $\mathfrak{R}^3$  содержит непрерывные функции. В то же время вследствие замкнутости множества  $C(\mathbb{R}^n)$  объединение всех ветвей  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_3, C)$ , содержащих непрерывные функции, замкнуто (см. следствие 1 § 3).

**Теорема 1.** Множество функций трехзначной логики, сопровождающих для множества  $Q = \mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_3, C) \cap C$ , где  $C$  — множество везде определенных непрерывных функций, есть множество  $Q_3^1$  (§ 14, 15 гл. 1)

**Доказательство.** Пусть  $F(X) : B_3^n \rightarrow B_3$  — сопровождающая для  $R$ -функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) \in Q$ , а  $x^1 \in \mathbb{R}^n$  — точка, среди координат которой есть нули. Не нарушая общности

рассуждений, примем равными нулю первые  $s$  координат:  $x^1 = (0, \dots, 0, x_{s+1}^1, \dots, x_n^1)$ . Тогда в  $\epsilon$ -окрестности  $B(x^1, \epsilon) = \{\|x - x^1\| < \epsilon\}$  точки  $x^1$  при  $\epsilon < \max\{|x_{s+1}^1|, \dots, |x_n^1|\}$  координаты точки  $x$  от  $(s+1)$ -й до  $n$ -й будут сохранять свой знак, в то время как каждая из координат  $x_1, \dots, x_s$  может равняться нулю, быть положительной или отрицательной. Очевидно, что если точка  $x$  пробегает окрестность  $B(x^1, \epsilon)$ , то соответствующая точка  $X = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i \in S_3(x_i)$ , имеет в качестве первых  $s$  координат всевозможные наборы нулей, единиц и двоек.

Если  $f(x^1) \neq 0$ , то в силу непрерывности  $f(x)$  сохраняет свой знак и в некоторой окрестности точки  $x^1$ . Тогда во всех упоминавшихся выше точках  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , соответствующих точкам  $B(x^1, \epsilon)$ , сопровождающая функция  $F(X)$  будет принимать значение  $S_3|f(x^1)|$ , равное нулю или двум (в зависимости от знака  $f(x^1)$ ). В соответствии с определением 4 § 14 гл. 1  $F(X) \in Q_3^1$ .

Покажем, что если  $F(X) \in Q_3^1$ , то в соответствующей ветви  $\mathfrak{R}(f)$  множества  $\mathfrak{R}^3$  есть непрерывные функции.

В § 15 гл. 1 показано, что система  $H = \{0, 1, \bar{X}, X_1 \wedge X_2\}$  полная в множестве  $Q_3^1$ . Нетрудно заметить, что функции  $H^1 = \{y_1 \equiv -1; y_2 \equiv 0; y_3 \equiv -x; y_4 \equiv \min(x_1, x_2)\}$  являются  $R$ -функциями, для которых  $0, 1, \bar{X}$  и  $X_1 \wedge X_2$  — соответствующие сопровождающие. Представив  $F(X) \in Q_3^1$  в виде суперпозиции системы  $H$  и произведя формальную замену символов  $X_i$  на  $x_i$ , а символов функций из  $H$  на соответствующие символы функций из  $H^1$ , получим непрерывную  $R$ -функцию, для которой  $\bar{F}(X)$  есть сопровождающая.

В общем случае векторных  $R$ -функций применяем это же доказательство для каждой из компонент  $F_i(X)$  функции  $F(X) : B_3^n \rightarrow B_3^m$  и получаем, что  $F_i(X) \in Q_3^1$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

Б. Перейдем к рассмотрению второго ограничения на множество  $\mathfrak{R}^3$ . Потребуем, чтобы задание знаков аргументов  $R$ -функции вполне определяло знак этой функции. Это означает, что точке  $x \in \mathbb{R}^n$ , среди координат которой нет нулей,  $R$ -функция  $y = f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  должна ставить в соответствие отличное от нуля число. В общем случае для векторных  $R$ -функций вида  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  это требование означает, что точке  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ( $x_i \neq 0, i = 1, \dots, n$ ) должна соответствовать точка  $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_j \neq 0, j = 1, \dots, m$ . Множество  $R$ -функций, обладающих таким свойством, обозначим через  $J$ .

Нетрудно заметить, что для сопровождающих функций трехзначной логики это требование равносильно условию, чтобы каждой точке  $X = (X_1, \dots, X_n) \in B_3^n$  ( $X_i \neq 1, i = 1, \dots, n$ ) соответствовала точка  $Y = (Y_1, \dots, Y_m) \in B_3^m$  ( $Y_j \neq 1, j = 1, \dots, m$ ), т. е. в этом случае  $F \in J_3^1$  (см. § 14 гл. 1). Отсюда следует теорема.

**Теорема 2.** Множество функций трехзначной логики, сопровождающих для множества  $J$ , есть множество  $J_3^1 \subset \mathfrak{F}(B_3)$ .

В. Объединяя требования А и Б, приходим к множеству  $P = Q \cap J$ , для которого сопровождающим служит множество  $\mathcal{P}_3^1 = Q_3^1 \cap J_3^1$  (см. § 15 гл. 1). Напомним, что полной в  $\mathcal{P}_3^1$  является система

$$H_1 = \{0, \bar{X}, X_1 \wedge X_2\} \subset \mathfrak{F}(B_3). \quad (2.33)$$

Систему (2.33) обычно дополняют следующими функциями из  $\mathfrak{F}(B_3)$ :

$$\begin{aligned} X_1 \vee X_2 &\equiv \overline{\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2} \equiv \max(X_1, X_2); \\ X_1 \sim X_2 &\equiv (\bar{X}_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \bar{X}_2); \quad X_1 \rightarrow X_2 \equiv \bar{X}_1 \vee X_2; \\ X_1 / X_2 &\equiv \overline{X_1 \wedge X_2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Эти функции называются соответственно дизъюнкцией, равнозначностью, импликацией, операцией Шеффера трехзначной логики. Значения этих функций следующие:

$x_1$	$x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \sim x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$	$x_1 / x_2$
0	0	0	0	2	2	2
0	1	0	1	1	2	2
0	2	0	2	0	2	2
1	0	0	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	2	1	2	1
2	0	0	2	0	0	2
2	1	1	2	1	1	1
2	2	2	2	2	2	0

Сохранение для функций (2.34) символов и наименований соответствующих булевых функций связано не только с идентичностью формул вида (1.49) и (2.34), но и со следующим свойством функций (2.34): если из таблиц этих функций вычеркнуть наборы значений аргументов, содержащие единицы, а в оставшихся строках заменить двойки единицами, то получим таблицы одноименных булевых функций.

Ниже будет показано, что по таблицам соответствующих булевых функций можно восстановить таблицы функций (2.35). Таким образом, приходим к расширенной полной системе в  $\mathcal{P}_3^1$ :

$$H_2 = \{0, \bar{X}, X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2, X_1 \sim X_2, X_1 \rightarrow X_2, X_1 / X_2\}, \quad (2.35)$$

с которой можно формально обращаться по тем же правилам, что и с соответствующей системой булевых функций. Отличие состоит в том, что при переходе от формул к таблицам для функций из  $\mathcal{P}_3^1$  необходимо подсчитывать значения в точках, среди координат которых есть единицы.

Г. Укажем еще одно ограничение, которое будем в ряде случаев накладывать на  $R$ -функции вида  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . В пространстве  $\mathbb{R}^n$  имеется  $2^n$  областей, в каждой из которых все координаты точек

отличны от нуля и сохраняют постоянные знаки. На плоскости  $\mathbb{R}^2$  это четверти, в пространстве  $\mathbb{R}^3$  — октанты. В общем случае эти области будем называть *координатными долями* пространства  $\mathbb{R}^n$ . Точки, среди координат которых есть нули, назовем вырожденными. Очевидно, если вырожденная точка  $x^0$  имеет  $s$  координат, равных нулю, то она является граничной для  $2^s$  координатных долей. Эти координатные доли назовем соседними с точкой  $x^0$ .

Если некоторая  $R$ -функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  принадлежит множеству  $\mathcal{P}$  и в вырожденной точке  $x^0$  отлична от нуля, то она в силу условия  $\mathcal{P} \subset Q$  во всех соседних с  $x^0$  координатных долях имеет тот же знак, что и в точке  $x^0$ . Однако обратное утверждение не верно: функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  может принадлежать множеству  $\mathcal{P}$ , иметь один и тот же знак во всех соседних с точкой  $x^0$  координатных долях, а в точке  $x^0$  — равняться нулю. Примером является функция  $y = \max(x, -x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , которая положительна при  $x \neq 0$  и равна 0 при  $x = 0$ .

В дальнейшем особый интерес будут представлять  $R$ -функции, принадлежащие множеству  $\mathcal{P}$ , для которых указанное условие не выполняется. Множество всех таких функций, отображающих  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}$  (для всех целых  $n \geq 1$ ), для которых указанное явление не наблюдается, обозначим  $\mathcal{P}^0$ , множество соответствующих сопровождающих функций трехзначной логики —  $\mathcal{P}_3^0$ .

Поскольку  $\mathcal{P}_3^0 \subset \mathcal{P}_3^1$ , всякая функция  $\mathcal{P}_3^0$  является суперпозицией системы (2.33) или (2.35), однако среди суперпозиций этих функций есть и такие, которые множеству  $\mathcal{P}_3^0$  не принадлежат. Примером является функция  $X \vee \bar{X}$ , сопровождающая для  $R$ -функции  $\max(x, -x)$ , упоминавшейся выше. Этот же пример показывает, что множество  $\mathcal{P}_3^0$  не замкнуто. Нетрудно проверить, что к множеству  $\mathcal{P}_3^0$  принадлежат все функции системы (2.35).

Из сказанного выше следует, что  $R$ -функция  $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{P}^0$ , может равняться нулю лишь в точках, среди координат которых есть нули (т.е. в вырожденных точках), и при этом в соседних к ним координатных долях принимает значение разных знаков. Отсюда следует, что если  $F(X): B_3^n \rightarrow B_3$  — сопровождающая для  $f(x) \in \mathcal{P}^0$  и  $F(X) = 1$ , то среди координат точки  $X$  есть единицы, а при всевозможной замене этих единиц нулями и двойками получаются точки, в которых  $F(X)$  принимает значение как нуля, так и двух.

Сказанное выше позволяет установить взаимнооднозначное соответствие между функциями из  $\mathcal{P}_3^0$  и булевыми функциями. А именно: если в таблице функции  $F$  из  $\mathcal{P}_3^0$  вычеркнуть наборы значений аргументов, содержащие единицы, а в остальных местах таблицы заменить двойки единицами, то получим таблицу некоторой булевой функции  $F_1$ . В свою очередь по таблице  $F_1$  можно восстановить таблицу функции  $F$ . Для этого достаточно построить для точки, среди



координат которой есть единицы, всевозможные точки, получающиеся заменой этих единиц нулями и двойками, и посмотреть на значения функции в этих точках: если все они равны нулю (или двум), то и в данной точке функция равна нулю (или двум); если же есть точки, в которых функция равна нулю, и точки, в которых она равна двум, то значение функции в данной точке равно единице.

В частности, нетрудно убедиться, что все функции (2.35) принадлежат множеству  $\mathcal{P}_3^0$ . Описанная выше их связь с булевыми функциями легко проверяется по таблице значений функций (2.34).

Поскольку множество  $\mathcal{P}_3^0$  не является замкнутым, то суперпозиция функции (2.33) или (2.35) может оказаться и не принадлежащей  $\mathcal{P}_3^0$ . Укажем критерий, гарантирующий принадлежность суперпозиции этих систем множеству  $\mathcal{P}_3^0$ .

**Теорема 3.** Если  $F(X) : B_3^n \rightarrow B_3$  есть суперпозиция функций (2.33) или (2.35), имеющая единственное вхождение каждой из координат  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), то  $F \in \mathcal{P}_3^0$ .

(Примерами формул с единственным вхождением каждой координаты являются  $F_1 \equiv (X_1 \wedge (X_2 \vee X_3))$ ;  $F_2 \equiv (X_1 \rightarrow X_2) \sim \sim (X_3 \vee X_4)$ . Формула  $F_3 \equiv (X_1 \wedge \bar{X}_2) \rightarrow X_1$  имеет двойное вхождение координаты  $X_1$ .)

**Доказательство.** Пусть  $Z = F(X) = \Phi[\Psi_1(X^1), \dots, \Psi_m(X^m)] = 1$ ,  $X^i = (X_1^i, \dots, X_n^i)$  ( $i = 1, \dots, m$ );  $X = (X^1, \dots, X^m) = (X_1^1, \dots, X_{q_1}^1, \dots, X_1^m, \dots, X_{q_m}^m)$ ;  $\Phi, \Psi_j \in \mathcal{P}_3^0$ , а среди координат точки  $X$  нет одинаковых. Обозначим  $Y_i = \Psi_i(X^i)$  ( $i = 1, \dots, m$ );  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ . Поскольку по условию  $\Phi(Y) = 1$  и  $\Phi \in \mathcal{P}_3^0$ , существует такое множество индексов  $A$ , что  $Y_i = 1$ , если  $i \in A$ . Тогда из  $Y_i = \Psi_i(X^i) \in \mathcal{P}_3^0$  следует, что среди координат  $X_j^i$  точек  $X^i$ ,  $i \in A$ , также есть единицы.

Пусть  $B$  — множество индексов  $j$ , для которых  $X_j^i = 1$ . Из  $\Psi_i(X^i) \in \mathcal{P}_3^0$  также следует существование таких точек  $X^{0i}$  и  $X^{2i}$ , получающихся заменой  $X_j^i$ ,  $j \in B$ , наборами нулей и двоек, что  $\Psi_i(X^{0i}) = 0$ ;  $\Psi_i(X^{2i}) = 2$ . Но тогда в силу независимости координат точек  $X^i$  существуют точки, получающиеся в результате замены единичных координат точки  $X$  наборами нулей и двоек, которым соответствуют всевозможные точки  $Y^s$ , получающиеся заменой единичных координат точки  $Y$  нулями и двойками. А так как  $\Phi \in \mathcal{P}_3^0$ , имеются точки, в которых функция  $F(X) \equiv \Phi(Y)$  принимает значение как нуля, так и двух. Следовательно,  $F(X) \in \mathcal{P}_3^0$ . Выбирая в качестве функций  $\Phi$  и  $\Psi_i$  функции (2.33) или (2.35), приходим к утверждению теоремы 3.

Приведем примеры некоторых достаточно полных в  $\mathcal{P}^0$  систем  $R$ -функций, для которых сопровождающей является система (2.35). (Одновременно предлагается символика для обозначения соответствующих  $R$ -операций.)

А. Система  $\mathfrak{R}_\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 y_1 &\equiv -1, \quad y_2 = \bar{x} \equiv -x; \\
 y_3 &\equiv x_1 \wedge_\alpha x_2 \equiv \frac{1}{1-\alpha} (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}); \\
 y_4 &\equiv x_1 \vee_\alpha x_2 \equiv \frac{1}{1+\alpha} (x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}); \\
 y_5 &\equiv x_1 \sim_\alpha x_2 \equiv 2x_1 x_2 \left[ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (1+\alpha^2)x_1 x_2} + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} \right]^{-1}; \\
 y_6 &\equiv x \rightarrow_\alpha x_2 \equiv \frac{1}{1+\alpha} (x_2 - x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha x_1 x_2}); \\
 y_7 &\equiv x_1 /_\alpha x_2 \equiv \frac{1}{1+\alpha} (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} - x_1 - x_2), \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

где  $\alpha(x_1, x_2)$  — произвольная функция, удовлетворяющая неравенствам  $-1 < \alpha(x_1, x_2) \leq 1$ . К этим неравенствам в большинстве случаев будем добавлять условия

$$\alpha(x_1, x_2) \equiv \alpha(x_2, x_1) \equiv \alpha(\bar{x}_1, x_2) \equiv \alpha(x_1, \bar{x}_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.37)$$

Символы  $R$ -операций  $\bar{x}$ ,  $x_1 \wedge_\alpha x_2$ ,  $x_1 \vee_\alpha x_2$ ,  $x_1 \sim_\alpha x_2$ ,  $x_1 \rightarrow_\alpha x_2$ ,  $x_1 /_\alpha x_2$  указывают на их принадлежность ветвям, имеющим в качестве сопровождающих трехзначные операции  $\bar{X}$ ,  $X_1 \wedge X_2$ ,  $X_1 \vee X_2$ ,  $X_1 \sim X_2$ ,  $X_1 \rightarrow X_2$ ,  $X_1 / X_2$  (2.35) соответственно. Покажем, например, что  $R$ -конъюнкция  $x_1 \wedge_\alpha x_2$  принадлежит ветви  $\mathfrak{R}(X_1 \wedge X_2)$ . Пусть  $a = |x_1|$ ;  $b = |x_2|$ ;  $\cos \gamma = \alpha$ . Тогда  $c = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}$  есть сторона треугольника, построенного по двум сторонам  $a$ ,  $b$  и углу  $\gamma$  между ними. Очевидно, что  $|a - b| \leq c$ ;  $a + b \geq c$ . С учетом этого зависимость знака  $x_1 \wedge_\alpha x_2$  от знаков  $x_1$  и  $x_2$  следующая:

Знак $x_1$	Знак $x_2$	$S_3(x_1)$	$S_3(x_2)$	$(x_1 \wedge_\alpha x_2)(1+\alpha)$	Знак $x_1 \wedge_\alpha x_2$	$S_3(x_1 \wedge_\alpha x_2)$
-	-	0	0	$-a - b - c$	-	0
-	0	0	1	$-2a$	-	0
-	+	0	2	$-a + b - c$	-	0
0	-	1	0	$-2b$	-	0
0	0	1	1	0	0	1
0	+	1	2	0	0	1
+	-	2	0	$a - b - c$	-	0
+	0	2	1	0	0	1
+	+	2	2	$a + b - c$	+	2

Видно, что  $S_3(x_1 \wedge_\alpha x_2) = S_3(x_1) \wedge_\alpha S_3(x_2)$ . Аналогичные таблицы легко составить для остальных  $R$ -операций из системы  $\mathfrak{R}_\alpha$ . Обратим внимание на то, что в формулах (2.36) имеются положительные множители  $\frac{1}{1+\alpha}$  (для  $x_1 \wedge_\alpha x_2$ ,  $x_1 \vee_\alpha x_2$ ,  $x_1 \rightarrow_\alpha x_2$  и  $x_1 /_\alpha x_2$ ) и  $[\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (1+\alpha^2)x_1 x_2} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}]^{-1}$  (для  $x_1 \sim_\alpha x_2$ ),

которые, естественно, не влияют на знаки соответствующих функций. Введение этих множителей вызвано соображениями, не имеющими никакого отношения к связи между  $R$ -функциями и сопровождающими их функциями алгебры логики, а касаются лишь определенных свойств дифференциального характера, о которых будет сказано в § 6.

Из системы (2.36) при  $\alpha \equiv 0$  получаем систему  $\mathfrak{R}_0$ , которую чаще всего используют на практике

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv -1; & y_2 &\equiv \bar{x} \equiv -x; & y_3 &\equiv x_1 \wedge_0 x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \\ y_4 &\equiv x_1 \vee_0 x_2 \equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \\ y_5 &\equiv x_1 \sim_0 x_2 \equiv 2x_1x_2 \left[ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right]^{-1}; & (2.38) \\ y_6 &\equiv x_1 \rightarrow_0 x_2 \equiv x_2 - x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \\ y_7 &\equiv x_1 /_0 x_2 \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Другой интересный частный случай системы  $\mathfrak{R}_\alpha$  получаем при  $\alpha \equiv 1$ . Система  $\mathfrak{R}_1$ :

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv -1; & y_2 &\equiv \bar{x} \equiv -x; \\ y_3 &\equiv x_1 \wedge_1 x_2 \equiv \frac{1}{2} (x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|) \equiv \min(x_1, x_2); \\ y_4 &\equiv x_1 \vee_1 x_2 \equiv \frac{1}{2} (x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|) \equiv \max(x_1, x_2); & (2.39) \\ y_5 &\equiv x_1 \sim_1 x_2 \equiv 2x_1x_2 (|x_1 + x_2| + |x_1 - x_2|)^{-1}; \\ y_6 &\equiv x_1 \rightarrow_1 x_2 \equiv \frac{1}{2} (x_2 - x_1 + |x_1 + x_2|) \equiv \max(\bar{x}_1, x_2); \\ y_7 &\equiv x_1 /_1 x_2 \equiv \frac{1}{2} (|x_1 - x_2| - x_1 - x_2) \equiv -\min(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Недостаток этой системы — недифференцируемость входящих в нее двухместных  $R$ -операций вдоль прямых  $x_1 = x_2$  или  $x_1 = -x_2$ . Для сравнения отметим, что соответствующие  $R$ -операции системы  $\mathfrak{R}_0$  имеют разрывы производных только в точке  $(0, 0)$ .

Б. Система  $\mathfrak{R}_0^m$ :

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv -1; & y_2 &\equiv \bar{x} \equiv -x; \\ y_3 &\equiv x_1 \wedge_0^m x_2 \equiv (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) (x_1^2 + x_2^2)^{m/2}; \\ y_4 &\equiv x_1 \vee_0^m x_2 \equiv (x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) (x_1^2 + x_2^2)^{m/2}; & (2.40) \end{aligned}$$

$$y_6 \equiv x_1 x_2; \quad y_0 \equiv x_1 \xrightarrow{m} x_2 \equiv (x_2 - x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2})(x_1^2 + x_2^2)^{m/2};$$

$$y_7 \equiv x_1 \int_0^m x_2 \equiv (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2)^{m/2}.$$

Двухместные операции из  $\mathfrak{R}_0^m$  принадлежат классу  $C^m(\mathbb{R}^2)$ , однако лишены некоторых свойств дифференциального характера, о которых будет сказано в § 6.

В. Система  $\mathfrak{R}$ :

$$y_1 \equiv -1; \quad y_2 \equiv \bar{x} \equiv -x;$$

$$y_3 \equiv x_1 \wedge_p x_2 \equiv x_1 + x_2 - [ |x_1|^p + |x_2|^p ]^{1/p};$$

$$y_4 \equiv x_1 \vee_p x_2 \equiv x_1 + x_2 + [ |x_1|^p + |x_2|^p ]^{1/p};$$

$$y_5 \equiv x_1 \sim_p x_2 \equiv x_1 x_2 [ |x_1|^p + |x_2|^p ]^{-1/p};$$

$$y_6 \equiv x_1 \xrightarrow{p} x_2 \equiv x_2 - x_1 + [ |x_1|^p + |x_2|^p ]^{1/p};$$

$$y_7 \equiv x_1 /_p x_2 \equiv [ |x_1|^p + |x_2|^p ]^{1/p} - x_1 - x_2,$$
(2.41)

где  $p > 1$ .

Ситуация, в которой система  $\mathfrak{R}$  имеет преимущества по сравнению с другими приведенными системами, определена теоремой 6 § 6.

Г. Система  $\mathfrak{R}_C$ :

$$y_1 \equiv -1; \quad y_2 \equiv \bar{x} \equiv -x;$$

$$y_3 \equiv x_1 \wedge_C^m x_2 \equiv \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^m \text{sign}(x_1 + x_2)^{m+1} -$$

$$- \left( \frac{x_1 - x_2}{2} \right)^m \text{sign}(x_1 - x_2)^m;$$
(2.42)

$$y_4 \equiv x_1 \vee_C^m x_2 \equiv \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^m \text{sign}(x_1 + x_2)^{m+1} +$$

$$+ \left( \frac{x_1 - x_2}{2} \right)^m \text{sign}(x_1 - x_2)^m.$$

Функции  $x_1 \wedge_C^m x_2$  и  $x_1 \vee_C^m x_2$  являются однородными (степени  $m$ )

полиномиальными сплайнами, принадлежащими  $C^m(\mathbb{R}^2)$ , с единственной линией разрыва производных порядка  $m$ , которая определяется уравнением  $x_1 + (-1)^m x_2 = 0$ .

Д. Система  $\mathfrak{R}$ :

$$y_1 \equiv -1; \quad y_2 \equiv \bar{x} \equiv -x;$$

$$y_3 \equiv x_1 \overset{0}{\wedge}_n x_2 \equiv \begin{cases} x_1 x_2 (x_1^n + x_2^n)^{-\frac{1}{n}}, & \forall x_1 > 0, x_2 > 0; \\ x_1, & \forall x_1 \leq 0, x_2 \geq 0; \\ x_2, & \forall x_1 \geq 0, x_2 \leq 0; \\ (-1)^{n+1} (x_1^n + x_2^n)^{\frac{1}{n}}, & \forall x_1 < 0, x_2 < 0; \end{cases} \quad (2.43)$$

$$y_4 \equiv x_1 \overset{0}{\vee}_n x_2 \equiv \begin{cases} (x_1^n + x_2^n)^{\frac{1}{n}}, & \forall x_1 > 0, x_2 > 0; \\ x_2, & \forall x_1 \leq 0, x_2 \geq 0; \\ x_1, & \forall x_1 \geq 0, x_2 \leq 0; \\ (-1)^{n+1} x_1 x_2 (x_1^n + x_2^n)^{-\frac{1}{n}}, & \forall x_1 < 0, x_2 < 0; \end{cases}$$

$$y_5 \equiv x_1 \overset{0}{\sim}_n x_2 \equiv \left( \overset{0}{\bar{x}}_1 \overset{0}{\vee}_n x_2 \right) \overset{0}{\wedge}_n \left( x_1 \overset{0}{\vee}_n x_2 \right); \quad y_6 \equiv x_1 \overset{0}{\rightarrow}_n x_2 \equiv \left( \overset{0}{\bar{x}}_1 \overset{0}{\vee}_n x_2 \right);$$

$$y_7 \equiv x_1 \overset{0}{/}_n x_2 \equiv \overline{x_1 \overset{0}{\wedge}_n x_2}.$$

где  $n \geq 2$  — целое. О достоинствах системы  $\mathfrak{R}$  будет сказано в дальнейшем. Отметим лишь, что операции  $x_1 \overset{0}{\wedge}_n x_2$  и  $x_1 \overset{0}{\vee}_n x_2$  принадлежат классу  $C^{n-1}(\mathbb{R}^2)$  и являются коммутативными и ассоциативными. Кроме этих операций, среди приведенных выше  $R$ -конъюнкций и  $R$ -дизъюнкций свойствами коммутативности и ассоциативности обладают  $x_1 \overset{0}{\wedge}_1 x_2$  и  $x_1 \overset{0}{\vee}_1 x_2$ , которые принадлежат, однако, лишь к классу  $C(\mathbb{R}^2)$ .

*Замечание 1.* Для введенных  $R$ -операций будут применяться формулы сокращенной записи, например

$$\overset{i=n}{\underset{i=0}{\wedge}}_0 a_i \equiv (\dots ((a_1 \wedge_0 a_2) \wedge_0 a_3) \wedge_0 \dots) \wedge_0 a_n.$$

Скобки могут быть опущены лишь для ассоциативных  $R$ -операций (например,  $\overset{0}{\wedge}_1$ ,  $\overset{0}{\wedge}_n$  или других, которые могут быть построены).

Представляют определенный интерес такие  $R$ -функции, которые, с одной стороны, являются достаточно хорошими по своим дифференциальным свойствам (например, принадлежат  $C^m(\mathbb{R}^n)$ ), а с другой — принадлежат ветвям, соответствующим функциям  $\overset{i=n}{\underset{i=1}{\wedge}} X_i$ ,  $\overset{i=n}{\underset{i=1}{\vee}} X_i$  трехзначной логики.

В принципе такие  $R$ -функции могут быть построены по предложенной ранее общей методике. При этом они даже будут обладать дополнительными свойствами, о которых будет сказано в § 6. Однако

в случаях, когда эти свойства не являются обязательно необходимыми, а требуется лишь простота формул (например, ради сокращения объема вычислений), могут быть предложены следующие  $R$ -многоместные  $R$ -конъюнкция и  $R$ -дизъюнкция:

$$\bigwedge_{i=1}^{i=n} x_i \equiv \sum_{i=1}^n (-1)^m x_i^m (x_i - |x_i|) + \prod_{i=1}^{i=n} x_i^m (x_i + |x_i|); \quad (2.44)$$

$$\bigvee_{i=1}^{i=n} x_i \equiv \sum_{i=1}^n x_i^m (x_i + |x_i|) - \prod_{i=1}^{i=n} (-1)^m x_i^m (|x_i| - x_i). \quad (2.45)$$

Нетрудно видеть, что для  $R$ -функций (2.44) и (2.45) справедливы формулы, аналогичные формулам де Моргана алгебры логики:

$$\overline{\bigwedge_{i=1}^{i=n} x_i} \equiv \bigvee_{i=1}^{i=n} \bar{x}_i; \quad \overline{\bigvee_{i=1}^{i=n} x_i} \equiv \bigwedge_{i=1}^{i=n} \bar{x}_i. \quad (2.46)$$

Построению многоместных  $R$ -операций посвящена также работа О. В. Зенкина [38].

*Упражнения и задачи.* 1. Построить  $R$ -функции, для которых функции из  $\mathfrak{F}(B_3)$

$$(X_1 \rightarrow \bar{X}_2) \sim X_1; \quad \overline{(X_1 \nearrow X_2) \wedge \bar{X}_3}; \quad (X_1 \wedge X_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_3)$$

являются сопровождающими.

2. Построить  $R$ -функцию из множества  $\mathcal{P}^0$ , которой соответствует булева функция, заданная в виде

$X_1$	0	0	0	0	1	1	1	1
$X_2$	0	0	1	1	0	0	1	1
$X_3$	0	1	0	1	0	1	0	1
$F$	0	0	1	1	0	0	0	0

3. Показать, что функции

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{x_1^2 + x_3^2} - \sqrt{x_2^2 + x_3^2} + \\ & \quad + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}; \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{x_1^2 + x_3^2} - \sqrt{x_1^2 + x_4^2} - \\ & - \sqrt{x_2^2 + x_3^2} - \sqrt{x_2^2 + x_4^2} - \sqrt{x_3^2 + x_4^2} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \\ & \quad + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_4^2} + \sqrt{x_1^2 + x_3^2 + x_4^2} + \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} - \\ & \quad - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \end{aligned}$$

есть  $R$ -функции из  $\mathcal{P}^0$  [127]. Являются ли аналогичные формулы  $R$ -функциями при  $n \geq 5$ ? Дать геометрическую интерпретацию этим утверждениям, используя для этой цели параллелепипед в  $\mathbb{R}^n$  со сторонами  $|x_1|, \dots, |x_n|$ .

4. Доказать существование ассоциативных бесконечно дифференцируемых везде в  $\mathbb{R}^2$  (кроме, возможно, точки нуль)  $R$ -операций, соответствующих  $X_1 \wedge X_2$ ,  $X_1 \vee X_2 \in \mathfrak{F}(B_3)$ . Рассмотреть аналогичный вопрос для аналитических (т. е. разлагающихся в ряд Тейлора в окрестности каждой точки) функций.

5. Показать, что операции

$$\begin{aligned} (x_1 \wedge_1 x_2) \wedge_1 a; & [(x_1 \wedge_1 x_2) \wedge_1 a] \vee_1 b; \\ (x_1 \vee_1 x_2) \vee_1 b; & [(x_1 \vee_1 x_2) \vee_1 a] \wedge_1 b, \end{aligned}$$

где  $a, b$  — постоянные, ассоциативны. При каких  $a$  и  $b$  они являются  $R$ -операциями из основной системы  $R$ -функций?

6. Для каких из приведенных в упражнении 5 функций свойство ассоциативности сохранится при замене  $R$ -операций  $x_1 \wedge_1 x_2$  и  $x_1 \vee_1 x_2$  другими ассоциативными  $R$ -операциями из соответствующих ветвей?

7. Существуют ли ограниченные в  $\mathbb{R}^2$  бесконечно дифференцируемые везде (кроме, возможно, точки нуль)  $R$ -операции, соответствующие двухместным операциям алгебры логики?

## § 5. Проблема минимизации $R$ -функций

Из изложенного выше видно, что базисные системы функций

$$H_1 = \{x_1 + x_2; x_1 x_2; \sqrt{x}, (x \geq 0); a \forall a \in \mathbb{R}\}; \quad (2.47)$$

$$H_2 = \{x_1 + x_2; x_1 x_2; |x|^m, m \in \mathbb{N}; a \forall a \in \mathbb{R}\} \quad (2.48)$$

являются достаточно полными по отношению к основному множеству  $R$ -функций. Это означает, что в множествах  $\mathfrak{M}(H_1)$  и  $\mathfrak{M}(H_2)$   $H_1$ - и  $H_2$ -реализуемых функций есть представители от каждой ветви множества  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \Gamma_3)$ . Более того, поскольку умножение  $R$ -функции на положительную функцию не выводит ее за пределы соответствующей ветви, существует бесконечное множество  $H_1$ - и  $H_2$ -реализуемых функций, принадлежащих данной ветви. Аналогичная ситуация возможна и для различных других достаточно полных систем. В связи с этим возникает следующая проблема.

Дана достаточно полная по отношению к множеству  $R$ -функций система  $H$ . В множестве  $\mathfrak{M}(H)$  требуется найти такую  $R$ -функцию  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ , принадлежащую ветви, соответствующей произвольно заданной функции  $F(X) \equiv F(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{F}(B_3)$ , что данный функционал  $If(x)$  достигает минимума. Эта задача становится еще более сложной, если функционал  $If(x)$  заменить функционалом от «формы записи»  $f(x)$  в символах системы  $H$ , приняв, например,  $If(x)$  равным количеству букв  $x_1, \dots, x_n$ , входящих в формулу  $f(x) \equiv f(x_1, \dots, x_n)$  (при подсчете учитывается каждое вхождение буквы  $x_i$  в формулу). В этой постановке допускается два случая:  $F$  — функция трехзначной логики;  $F$  — булева функция. В последнем случае минимальную  $f(x)$  можно искать в  $\mathcal{P}^0$ .

Сформулированная задача о минимизации  $H$ -реализуемых  $R$ -функций весьма сложна и вряд ли будет решена в ближайшее время даже для таких базисных систем, как  $H_1$  и  $H_2$ . Поэтому ограничимся лишь некоторыми простейшими соображениями, которыми иногда можно воспользоваться на практике для упрощения формул  $R$ -функций.

Пусть  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  есть некоторая  $H$ -реализуемая  $R$ -функция. Заметим, во-первых, что формулу  $f(x_1, \dots, x_n)$  можно упростить с помощью обычных тождественных преобразований. Во-вторых, если путем тождественных преобразований удастся привести функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$  к виду

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv f_1(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

где  $\varphi$  — неотрицательная функция, нули которой являются нулями функции  $f_1(x_1, \dots, x_n)$ , то  $f_1 \in \mathfrak{R}(f)$ .

**Пример 1.** Рассмотрим  $R$ -функцию, соответствующую функции  $Y \equiv \equiv (\bar{X}_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2) \in \mathfrak{F}(B_2)$ , построенную с помощью  $R$ -операций  $x_1 \wedge_0$ ,  $\wedge_0 x_2$ ,  $x_1 \vee_0 x_2$  и  $x$ :

$$y \equiv (\bar{x}_1 \wedge_0 x_2) \vee_0 (x_1 \wedge_0 \bar{x}_2) \equiv \left\{ -x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1 - x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \left[ \left( -x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^2 + \left( x_1 - x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (2.49)$$

После тождественных преобразований получаем

$$y \equiv -\frac{2x_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \quad (2.50)$$

Опуская положительный множитель, имеем  $y \equiv -x_1x_2$ .

Описанный выше прием упрощения формул  $R$ -функций, естественно, не может быть применен в тех случаях, когда рассматриваемая  $R$ -функция обладает некоторыми дополнительными свойствами, которые должны быть сохранены в процессе преобразований. В частности, в § 6 будет показано, что формула (2.50) обладает некоторыми полезными свойствами, которых лишена более простая формула  $y \equiv \equiv -x_1x_2$ .

## § 6. Логические и дифференциальные свойства основной системы $R$ -функций

1.  $R$ -функции, входящие в достаточно полные системы § 4, обладают рядом свойств, сходных со свойствами сопровождающих их функций алгебры логики.

Предположим, что  $\alpha = \alpha(x_1, x_2)$  удовлетворяет условиям (2.37). Тогда справедливы следующие формулы:

- 1°)  $\bar{\bar{x}} \equiv x$ ;
- 2°)  $x_1 \wedge_\alpha x_2 \equiv x_2 \wedge_\alpha x_1$ ;
- 3°)  $\frac{x_1}{x_2} \vee_\alpha x_2 \equiv \frac{x_2}{x_1} \vee_\alpha x_1$ ;
- 4°)  $x_1 \wedge_\alpha x_2 \equiv x_1 \vee_\alpha x_2$ ;



$$5^\circ) \overline{x_1 \vee_\alpha x_2} \equiv \bar{x}_1 \wedge_\alpha \bar{x}_2;$$

$$6^\circ) (x_1 \wedge_\alpha x_2) + (x_1 \vee_\alpha x_2) \equiv \frac{2}{1+\alpha} (x_1 + x_2);$$

$$7^\circ) (x_1 \wedge_\alpha x_2)(x_1 \vee_\alpha x_2) \equiv \frac{2}{1+\alpha} x_1 x_2;$$

8°)  $x_1 \wedge_\alpha x_2 = 0$  тогда и только тогда, когда  $x_1 = 0, x_2 \geq 0$  или  $x_2 = 0, x_1 \geq 0$ .

9°)  $x_1 \vee_\alpha x_2 = 0$  тогда и только тогда, когда  $x_1 = 0, x_2 \leq 0$  или  $x_2 = 0, x_1 \leq 0$ .

Нетрудно убедиться в том, что свойствами  $1^\circ-5^\circ$  и  $8^\circ, 9^\circ$  обладают также функции  $x_1 \wedge_0^m x_2, x_1 \vee_0^m x_2; x_1 \wedge_p x_2, x_1 \vee_p x_2;$

$x_1 \wedge_0^n x_2, x_1 \vee_0^n x_2; x_1 \wedge_c^m x_2, x_1 \vee_c^m x_2$ , принадлежащие системам  $\mathfrak{R}_0^m;$

$\mathfrak{R}; \mathfrak{R}; \mathfrak{R}_C$  соответственно.

$\rho$  Функции  $x_1 \wedge_1 x_2$  и  $x_1 \vee_1 x_2$  в дополнение к свойствам  $1^\circ-9^\circ$  обладают также свойствами

$$10^\circ) x \wedge_1 x \equiv x;$$

$$11^\circ) x \vee_1 x \equiv x;$$

$$12^\circ) x \wedge_1 \bar{x} \equiv -|x|;$$

$$13^\circ) x \vee_1 \bar{x} \equiv |x|;$$

$$14^\circ) x_1 \wedge_1 (x_2 \wedge_1 x_3) \equiv (x_1 \wedge_1 x_2) \wedge_1 x_3 \equiv x_1 \wedge_1 x_2 \wedge_1 x_3;$$

$$15^\circ) x_1 \vee_1 (x_2 \vee_1 x_3) \equiv (x_1 \vee_1 x_2) \vee_1 x_3 \equiv x_1 \vee_1 x_2 \vee_1 x_3;$$

$$16^\circ) x_1 \wedge_1 (x_2 \vee_1 x_3) \equiv (x_1 \wedge_1 x_2) \vee_1 (x_1 \wedge_1 x_3);$$

$$17^\circ) x_1 \vee_1 (x_2 \wedge_1 x_3) \equiv (x_1 \vee_1 x_2) \wedge_1 (x_1 \vee_1 x_3);$$

$$18^\circ) (x_1 \wedge_1 x_2) \vee_1 x_1 \equiv x_1;$$

$$19^\circ) (x_1 \vee_1 x_2) \wedge_1 x_1 \equiv x_1.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что свойствами  $14^\circ-15^\circ$  обладают также  $R$ -операции  $x_1 \wedge_n^0 x_2$  и  $x_1 \vee_n^0 x_2$ .

2.  $R$ -функции, получающиеся в результате образования суперпозиций достаточно полных систем (2.36), (2.38), (2.41) и (2.43), кроме свойств логического характера, отмеченных выше, обладают рядом дифференциальных свойств, имеющих важное значение для построения уравнений сложных геометрических объектов и структур решений краевых задач, о которых речь будет идти в последующих главах.

Пусть  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in \mathfrak{R}_3(\mathbb{R}, \Gamma_3)$ , а  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — произвольное достаточное число раз дифференцируемое отображение. Композиция  $\varphi \circ \psi$  не является, вообще,  $R$ -функцией. Однако, как будет показано ниже, на композицию  $\varphi \circ \psi$  в ряде случаев переносятся некоторые дифференциальные свойства отображения  $\psi$ .

**Теорема 1.** Если  $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\psi_1(x^0) = 0, \quad \psi_2(x^0) > 0, \quad (2.51)$$

$$\{D^\gamma(\Lambda_\alpha \circ \psi)\}|_{x=x^0} = (D^\gamma \psi_1)|_{x=x^0} \quad (2.52)$$

при  $|\gamma| = 1$ , где  $D^\gamma$  — оператор дифференцирования  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  — обобщенный индекс,  $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ .

Доказательство. Используя формулу

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha \circ \psi &\equiv \psi_1 \wedge_\alpha \psi_2 \equiv \\ &\equiv \frac{1}{1 + \alpha(\psi_1, \psi_2)} \left( \psi_1 + \psi_2 - \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 - 2\alpha(\psi_1, \psi_2)\psi_1\psi_2} \right), \end{aligned}$$

непосредственным дифференцированием находим

$$\begin{aligned} D^\gamma(\Lambda_\alpha \circ \psi) &\equiv -\frac{1}{(1 + \alpha)^2} \left( \psi_1 + \psi_2 - \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 - 2\alpha\psi_1\psi_2} \right) D^\gamma \alpha + \\ &+ \frac{1}{1 + \alpha} [D^\gamma \psi_1 + D^\gamma \psi_2 - (\psi_1 D^\gamma \psi_1 + \psi_2 D^\gamma \psi_2 - \psi_1 \psi_2 D^\gamma \alpha - \alpha \psi_2 D^\gamma \psi_1 - \\ &\quad - \alpha \psi_1 D^\gamma \psi_2) (\psi_1^2 + \psi_2^2 - 2\alpha\psi_1\psi_2)^{-\frac{1}{2}}]. \end{aligned}$$

В силу условий (2.51) при  $x = x^0$  получаем

$$\begin{aligned} D^\gamma(\Lambda_\alpha \circ \psi) &\equiv \frac{1}{1 + \alpha} [D^\gamma \psi_1 + D^\gamma \psi_2 - (\psi_2 D^\gamma \psi_2 - \alpha \psi_2 D^\gamma \psi_1) |\psi_3|^{-1}] = \\ &= \frac{1}{1 + \alpha} [D^\gamma \psi_1 + \alpha D^\gamma \psi_1] = D^\gamma \psi_1. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Если  $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^2)$  и выполняются условия

$$\psi_1(x^0) = 0, \quad \psi_2(x^0) < 0, \quad (2.53)$$

то при  $|\gamma| = 1$  справедливо равенство

$$\{D^\gamma(\vee_\alpha \circ \psi)\}|_{x=x^0} = (D^\gamma \psi_1)|_{x=x^0}. \quad (2.54)$$

**Теорема 3.** Если  $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^2)$  и выполняется условие

$$\psi_1(x^0) = 0, \quad \psi_2(x^0) \neq 0,$$

то при  $|\gamma| = 1$  справедливо равенство

$$D^\gamma(\sim_\alpha \circ \psi)|_{x=x^0} = (\text{sign } \psi_2 D^\gamma \psi_1)|_{x=x^0}. \quad (2.55)$$

Теоремы 2 и 3 доказываются аналогично теореме 1. Отметим также очевидную формулу, справедливую для  $R$ -отрицания  $\bar{x} \equiv -x$ :

$$D^\gamma \bar{\psi} \equiv -D^\gamma \psi \equiv \overline{D^\gamma \psi}. \quad (2.56)$$

Пусть  $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{F}^0$  есть суперпозиция функций  $\bar{x}, x_1 \wedge_\alpha x_2, x_1 \vee_\alpha x_2$  с единственным вхождением каждого из аргументов  $x_i$ . Число операций отрицания над  $x_i$  и содержащими  $x_i$  частя-

ми формулы  $\varphi$  назовем инверсной степенью  $x_i$ . Так, например, в первой из формул  $\varphi = (x_1 \wedge_{\alpha} (x_2 \vee_{\alpha} x_3))$ ;  $\varphi = (\bar{x}_1 \wedge_{\alpha} x_2) \wedge_{\alpha} \bar{x}_2$   $x_1$  имеет инверсную степень 1,  $x_2$  и  $x_3$  — инверсную степень 2, а во второй формуле  $x_1$  имеет инверсную степень 1, а для  $x_2$  это понятие не имеет смысла, так как  $x_2$  — дважды входит в формулу.

**Теорема 4.** Пусть  $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{F}^0$  есть суперпозиция функций  $(-1)$ ,  $x$ ,  $x_1 \wedge_{\alpha} x_2$ ,  $x_1 \vee_{\alpha} x_2$ , имеющая единственное вхождение  $x_1$  с инверсной степенью  $s$ ,  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^1(\mathbb{R}^n)$  и

$$\psi_1(x^0) = 0, \quad \psi_i(x^0) \neq 0 \quad (i = 2, 3, \dots, m). \quad (2.57)$$

Тогда если

$$\varphi \circ \psi|_{x=x^0} = 0, \quad (2.58)$$

то при  $|\gamma|$  справедливо равенство

$$[D^{\gamma}(\varphi \circ \psi)]|_{x=x^0} = (-1)^s (D^{\gamma} \psi_1)|_{x=x^0}. \quad (2.59)$$

**Доказательство.** Применим запись  $f^{[k]} = (-1)^k f$ . Так как  $R$ -отрицание определяется формулой  $\bar{x} \equiv -x$ , то  $f^{[k]}$  можно рассматривать как результат  $k$ -кратного применения этой операции к  $f$ .

Воспользовавшись формулой  $x_1 \vee_{\alpha} x_2 \equiv \overline{\overline{x_1 \wedge_{\alpha} x_2}}$ , исключим из формулы  $\varphi \circ \psi$  операцию  $\vee_{\alpha}$ . Тогда, ввиду того что  $\psi_1$  имеет единственное вхождение в формулу  $\varphi \circ \psi = \varphi(\psi_1, \dots, \psi_m)$ , ее можно представить в виде

$$\varphi \circ \psi \equiv ((\psi_1^{[k_1]} \wedge_{\alpha} p)^{[k_2]} \wedge_{\alpha} q)^{[k_3]},$$

где  $p = p(\psi_2, \dots, \psi_m)$ ,  $q = q(\psi_2, \dots, \psi_m)$  — некоторые выражения, не включающие  $\psi_1$ . Нетрудно видеть, что  $s = k_1 + k_2 + k_3$ .

Согласно (2.58)

$$[(\psi_1^{[k_1]} \wedge_{\alpha} p)^{[k_2]} \wedge_{\alpha} q]^{[k_3]}|_{x=x^0} = 0. \quad (2.60)$$

Так как  $p$  и  $q$  получены путем применения операций  $R$ -конъюнкции  $x_1 \wedge_{\alpha} x_2$  и  $R$ -отрицания  $\bar{x}$  к функциям  $\psi_i$  ( $i = 2, \dots, m$ ) и, возможно, к функции  $y_1 \equiv -1$ , в силу условий (2.57)  $p(x^0) \neq 0$ ,  $q(x^0) \neq 0$ .

В то же время из (2.60) и свойства 8° п. 1 следует

$$(\psi_1^{[k_1]} \wedge_{\alpha} p)|_{x=x^0} = 0, \quad q|_{x=x^0} > 0. \quad (2.61)$$

Отсюда из того же свойства 8°

$$p|_{x=x^0} > 0. \quad (2.62)$$

На основании теоремы 1 и условий (2.61), (2.62) и формулы (2.52) получаем

$$\begin{aligned} [D^{\gamma}(\varphi \circ \psi)]|_{x=x^0} &= D^{\gamma}[(\psi_1^{[k_1]} \wedge_{\alpha} p)^{[k_2]} \wedge_{\alpha} q]^{[k_3]}|_{x=x^0} = \\ &= (-1)^{k_3} D^{\gamma}[(\psi_1^{[k_1]} \wedge_{\alpha} p)^{[k_2]} \wedge_{\alpha} q]|_{x=x^0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{k_1+k_2} [D^{\nu}(\psi_1^{[k_1]} \wedge_{\alpha} p)]|_{x=x^0} = (-1)^{k_1+k_2} [D^{\nu}\psi_1^{[k_1]}]|_{x=x^0} = \\
 &= (-1)^{k_1+k_2+k_3} D^{\nu}\psi_1|_{x=x^0} = (-1)^s D^{\nu}\psi_1|_{x=x^0},
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 5.** Пусть  $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{F}^0$  есть суперпозиция  $R$ -функций  $(-1), \bar{x}, x_1 \wedge_{\alpha} x_2, x_1 \vee_{\alpha} x_2, x_1 \rightarrow_{\alpha} x_2, x_1 \sim_{\alpha} x_2, x_1 /_{\alpha} x_2$ , имеющая единственное вхождение  $x_1$ , а  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^1(\mathbb{R}^n)$  — удовлетворяет условиям

$$\psi_1(x^0) = 0, \quad \psi_i(x^0) \neq 0 \quad (i = 2, \dots, m). \quad (2.63)$$

Тогда если  $\varphi_0 \circ \psi|_{x=x^0} = 0$ , то при  $|\gamma| = 1$  справедливо равенство (2.59), где  $s$  — некоторое целое число.

**Доказательство.** Используя формулы

$$\begin{aligned}
 x_1 \vee_{\alpha} x_2 &\equiv \overline{\bar{x} \wedge_{\alpha} x_2}; \\
 x_1 \rightarrow_{\alpha} x_2 &\equiv \overline{\bar{x}_1 \vee_{\alpha} x_2}; \\
 x_1 /_{\alpha} x_2 &\equiv \overline{x_1 \wedge_{\alpha} x_2},
 \end{aligned} \quad (2.64)$$

исключим из суперпозиции  $\varphi \circ \psi \equiv \varphi(\psi_1, \dots, \psi_m)$  операции  $x_1 \vee_{\alpha} x_2, x_1 \rightarrow_{\alpha} x_2, x_1 /_{\alpha} x_2$ . Тогда функцию  $\varphi \circ \psi$  можно представить в виде

$$\varphi \circ \psi = ((q_1 \sim_{\alpha} q_2)^{[k_1]} \wedge_{\alpha} q_3)^{[k_2]}, \quad (2.65)$$

где лишь одна из функций  $q_1, q_2$  или  $q_3$  зависит от  $\psi_1$ .

Так как  $\varphi \circ \psi = 0$  в точке  $x^0$ , равна нулю в этой точке лишь та из функций  $q_1, q_2$  и  $q_3$ , которая зависит от  $\psi_1$ . Остальные функции отличны от нуля ввиду того, что суперпозиции  $R$ -функций из множества  $\mathcal{F}^0$  отображают знакоопределенные точки (т. е. не имеющие нулевых координат) в знакоопределенные.

Пусть от  $\psi_1$  зависит функция  $q_j$ , где  $j$  — одно из чисел 1, 2 или 3. Тогда из теорем 1 и 3 следует

$$D^{\nu}(\varphi \circ \psi)|_{x=x^0} = \pm D^{\nu}q_j|_{x=x^0}. \quad (2.66)$$

Если функция  $q_j$  не содержит операции  $\sim_{\alpha}$ , то к ней применима теорема 4 и тогда равенство (2.59) выполняется. В противном случае к  $q_j$  можно применить те же рассуждения, которые были применены к  $\varphi \circ \psi$ , и тем самым исключить из рассмотрения очередную операцию  $\sim_{\alpha}$ . В конечном итоге также приходим к формуле (2.59). Теорема доказана.

Для достаточно полной системы  $\mathfrak{R}$  справедливы более сильные теоремы, чем теоремы 1—5 для системы  $\mathfrak{R}_{\alpha}$ .

**Теорема 6.** Пусть  $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{F}^0$  есть суперпозиция  $R$ -функций  $(-1), \bar{x}, x_1 \wedge_{\alpha} x_2, x_1 \vee_{\alpha} x_2, x_1 \rightarrow_{\alpha} x_2, x_1 \sim_{\alpha} x_2, x_1 /_{\alpha} x_2$ , имеющая единственное вхождение аргумента  $x_1$ , а  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m) \in C^s(\mathbb{R}^n)$  удовлетворяет условиям (2.63), тогда при  $p > s$  для

$|\gamma| \leq s$  выполняется условие

$$D^\gamma (\varphi \circ \psi)|_{x=x^0} \equiv (-1)^m D^\gamma \psi_1|_{x=x^0}. \quad (2.67)$$

**Доказательство.** Как и при доказательстве теоремы 5, исключим операции  $x_1 \underset{p}{\vee} x_2$ ,  $x_1 \underset{p}{\rightarrow} x_2$ ,  $x_1 \underset{p}{/} x_2$  и представим функцию  $\varphi \circ \psi$  в виде

$$\varphi \circ \psi = ((q_1 \underset{p}{\sim} q_2)^{[k_1]} \underset{p}{\wedge} q_3)^{[k_2]}. \quad (2.68)$$

Так как по условию  $\varphi \circ \psi = 0$  в точке  $x^0$ , в этой точке либо  $q_3 = 0$ ,  $(q_1 \underset{p}{\sim} q_2)^{[k_1]} > 0$ , либо  $q_1 \underset{p}{\sim} q_2 = 0$ ,  $q_3 > 0$ . В первом случае

$$\begin{aligned} (-1)^{k_1} (q_1 \underset{p}{\sim} q_2) \underset{p}{\wedge} q_3 &= [(-1)^{k_1} (q_1 \underset{p}{\sim} q_2)] + q_3 - [|q_1 \underset{p}{\sim} q_2|^p + \\ &+ |q_3|^p]^{1/p} = |q_1 \underset{p}{\sim} q_2| + q_3 - |q_1 \underset{p}{\sim} q_2| [1 + O(q_3^p)] = q_3 + O(q_3^p). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Во втором случае (если, например,  $q_1$  зависит от  $\psi_1$ )

$$q_1 \underset{p}{\sim} q_2 = q_1 q_2 [|q_1|^p + |q_2|^p]^{-1/p} = \pm q_1 + O(q_1^p). \quad (2.70)$$

Пусть  $q^{(1)}$  есть та из компонент формулы (2.68), которая зависит от  $\psi_1$ . Тогда из (2.69) и (2.70) следует

$$\varphi \circ \psi = \pm q^{(1)} + O[(q^{(1)})^p]. \quad (2.71)$$

А поскольку в точке  $x^0$   $q^{(1)} = 0$ , имеем

$$D^\gamma (\varphi \circ \psi)|_{x=x^0} = (-1)^{m_1} D^\gamma q^{(1)}, \quad (2.72)$$

где  $m_1$  — некоторое целое число. Представляя  $q^{(1)}$  в форме (2.68) и повторяя предыдущие рассуждения, получаем

$$D^\gamma (\varphi \circ \psi)|_{x=x^0} = (-1)^{m_2} D^\gamma q^{(2)}, \quad (2.73)$$

где  $q^{(2)}$  — суперпозиция, содержащая  $\psi_1$ , с меньшим числом операций, чем  $q^{(1)}$ . Выполняя этот процесс, через некоторое число шагов приходим к функции  $q^{(r)} = \pm \psi_1$ , следовательно, и к формуле (2.67). Теорема доказана.

**Теорема 7.** Теорема 6 справедлива для всякой системы R-функций

$$H = \{-1; \bar{x}; x_1 \wedge^* x_2; x_1 \vee^* x_2; x_1 \sim^* x_2; x_1 \rightarrow^* x_2; x_1 / ^* x_2\}, \quad (2.74)$$

удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} x_1 \wedge^* x_2 &= x_i + o(x_i^2) \quad \text{при } x_i > 0 \quad (i, j = 1, 2; i \neq j); \\ x_1 \vee^* x_2 &= x_i + o(x_i^2) \quad \text{при } x_i < 0 \quad (i, j = 1, 2; i \neq j); \\ x_1 \rightarrow^* x_2 &= x_1 + o(x_1^2) \quad \text{при } x_2 > 0; \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$x_1 \nearrow^* x_2 = -x_i + o(x_i^s) \quad \text{при } x_i > 0 \quad (i, j = 1, 2; i \neq j);$$

$$x_1 \sim^* x_2 = x_i \operatorname{sign} x_i + o(x_i^s) \quad \text{при } x_i \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, i \neq j).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что условиям последней теоремы удовлетворяют при  $n \geq s$  также функции

$$x_1 \overset{\wedge}{\underset{n}{x_2}}, x_1 \overset{\vee}{\underset{n}{x_2}}, x_1 \overset{\rightarrow}{\underset{n}{x_2}}, x_1 \overset{\sim}{\underset{n}{x_2}}, x_1 \overset{\nearrow}{\underset{n}{x_2}}, \text{ определяемые формулами (2.43).}$$

Теоремы 1—7 используются в дальнейшем при построении нормализованных уравнений сложных геометрических объектов и структур решений краевых задач.

Приведем некоторые результаты, касающиеся свойств вторых производных от  $R$ -конъюнкций и  $R$ -дизъюнкций.

**Лемма.** Если  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$  ( $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ ), и

$$S_3[f(x_1, x_2)] \equiv S_3(x_1) \wedge S_3(x_2); \quad (2.76)$$

$$f(tx_1, tx_2) \equiv tf(x_1, x_2), \quad \forall t \in \mathbb{R}; \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \leq 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \cap (x_1^2 + x_2^2 \neq 0), \quad (2.78)$$

где  $S_3(t) = 1 + \operatorname{sign} t$ , то

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \geq 0. \quad (2.79)$$

**Доказательство.** Из формулы (2.77) по теореме Эйлера получаем

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \equiv f. \quad (2.80)$$

Дифференцируем тождество (2.80) по  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \equiv -\frac{x_1}{x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \equiv -\frac{x_2}{x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \quad (x_1^2 + x_2^2 \neq 0). \quad (2.81)$$

Отсюда

$$x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \equiv x_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}. \quad (2.82)$$

Согласно условию (2.78)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \leq 0$ . Из условия (2.76) следует, что  $f = 0$  при  $x_1 = 0, x_2 > 0$  и  $x_2 = 0, x_1 > 0$  и  $f > 0$  при  $x_1 > 0, x_2 > 0$ . В остальных точках  $\mathbb{R}^2$   $f < 0$ .

Из (2.80) следует

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2 \geq 0}} = 0. \quad (2.83)$$

Согласно (2.81) при  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  выполняется неравенство  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \geq 0$ . Поэтому  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  является возрастающей функцией  $x_1$  (при фиксированном  $x_2$ ) и в силу (2.83)  $\frac{\partial f}{\partial x_2} \geq 0$  в первой четверти. Во второй четверти ( $x_1 < 0$ ,  $x_2 < 0$ )  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \leq 0$ , поэтому  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  убывает с ростом  $x_1$  и в силу того же условия (2.83)  $\frac{\partial f}{\partial x_2} \geq 0$  во второй четверти. Так как по доказанному  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \leq 0$ , поэтому  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  убывает с ростом  $x_2$ . Тогда  $\frac{\partial f}{\partial x_2} \geq 0$  и при  $x_2 < 0$ . Аналогично находим, что  $\frac{\partial f}{\partial x_1} \geq 0$ .

**Теорема 8.** Если функция  $f(x_1, x_2) \equiv x_1 \wedge^* x_2$  удовлетворяет условиям леммы, а  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ , и

$$\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial l^2} \leq 0 \quad (l = 1, 2), \quad (2.84)$$

где  $l$  — произвольное направление, то

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2} f(\varphi_1, \varphi_2) \leq 0. \quad (2.85)$$

**Доказательство.** Дифференцируя  $f(\varphi_1, \varphi_2)$  дважды по  $l$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l} f(\varphi_1, \varphi_2) &\equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial l}; \\ \frac{\partial^2}{\partial l^2} f(\varphi_1, \varphi_2) &\equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial l} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial l} \frac{\partial \varphi_2}{\partial l} + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial l} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial l^2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial l^2}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Так как  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \leq 0$ ;  $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial l^2} \leq 0$ ;  $\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial l^2} \leq 0$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x_1} \geq 0$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x_2} \geq 0$ , из последней формулы получаем неравенство (2.85).

**Пример 1.** Покажем, что условиям теоремы 8 удовлетворяют рассмотренные выше  $R$ -конъюнкции  $x_1 \wedge_\alpha x_2$  ( $\alpha \equiv \text{const}$ ),  $x_1 \wedge_p x_2$  ( $p \geq 2$ ),  $x_1 \bigwedge_n x_2$  ( $n \geq 2$ ). Действительно,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (x_1 \wedge_\alpha x_2) \equiv - \frac{x_2^2 (1 - \alpha)}{(x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2)^{3/2}} \leq 0;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (x_1 \wedge_p x_2) \equiv - (p-1) |x_1|^{p-2} + |x_2|^{p-2} |x_1|^{p-2} |x_2|^p \leq 0;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( x_1 \overset{0}{\bigwedge}_n x_2 \right) \equiv \begin{cases} -(n+1) x_1^{n-1} x_2^{n+1} (x_1^n + x_2^n)^{-2-\frac{1}{n}} & \text{при } x_1 > 0, x_2 > 0; \\ 0 & \text{при } x_1 \leq 0, x_2 > 0; \\ & x_1 > 0, x_2 \leq 0; \\ (-1)^{n+1} (n-1) x_1^{n-2} x_2^n (x_1^n + x_2^n)^{\frac{1}{n}-2} & \text{при } x_1 < 0, x_2 < 0. \end{cases} \quad (2.87)$$

и, следовательно,  $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( x_1 \overset{0}{\bigwedge}_n x_2 \right) \leq 0$ . Справедливость остальных условий теоремы 8 очевидна.

*Следствие.* Если  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \leq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ), то

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\dots((\varphi_1 \wedge_{\alpha_1} \varphi_2) \wedge_{\alpha_2} \varphi_3) \wedge_{\alpha_3} \dots) \wedge_{\alpha_{m-1}} \varphi_m] \leq 0, \quad (2.88)$$

где  $\alpha_i \in (-1, 1)$ . Неравенство (2.88) сохраняется при любой другой расстановке скобок, а также при замене символов  $\wedge_{\alpha_i}$  (всех или части) символами  $\overset{0}{\bigwedge}_p$  ( $p \geq 2$ ) или  $\overset{0}{\bigwedge}_n$  ( $n \geq 2$ ). При этом в силу ассоциативности  $R$ -конъюнкции  $x_1 \overset{0}{\bigwedge}_n x_2$  при ее использовании не имеет значения порядок открывающих и закрывающих скобок. Поэтому, если заменить  $\wedge_{\alpha}$  на  $\overset{0}{\bigwedge}_n$ , неравенство (2.88) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \overset{0}{\bigwedge}_{1 \leq i \leq m} \varphi_i \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \varphi_1 \overset{0}{\bigwedge}_n \dots \overset{0}{\bigwedge}_n \varphi_m \right) \leq 0. \quad (2.89)$$

Следующая теорема является двойственной теореме 8.

**Теорема 9.** Если функция  $f(x_1, x_2) \equiv x_1 \vee^* x_2$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \cap \{x_1^2 + x_2^2 \neq 0\})$ , удовлетворяет условиям

$$S_3[f(x_1, x_2)] \equiv S_3(x_1) \vee S_3(x_2); \quad f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \geq 0, \quad (2.90)$$

а функция  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^1)$ , такова, что

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial l^2} \leq 0 \quad (i = 1, 2), \quad (2.91)$$

где  $l$  — произвольное направление, то

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2} f(\varphi_1, \varphi_2) \geq 0. \quad (2.92)$$

Легко убедиться в том, что условиям теоремы 9 удовлетворяют  $R$ -дизъюнкции  $x_1 \vee_{\alpha} x_2$  ( $\alpha \equiv \text{const}$ ),  $x_1 \vee_p x_2$  ( $p \geq 2$ ),  $x_1 \overset{0}{\bigvee}_n x_2$  ( $n \geq 0$ ).



Упражнения и задачи. 1. Пусть везде в  $\mathbb{R}^2$

$$\varphi(x_1, x_2) + \psi(x_1, x_2) \equiv (x_1 + x_2) a(x_1, x_2);$$

$$\varphi(x_1, x_2) \psi(x_1, x_2) \equiv x_1 x_2 b(x_1, x_2).$$

Какими должны быть функции  $a(x_1, x_2)$  и  $b(x_1, x_2)$ , чтобы  $\varphi \in \mathfrak{R}(X_1 \wedge X_2)$ ,  $\psi \in \mathfrak{R}(X_1 \vee X_2)$ ?

2. Показать, что для всякой строго монотонно возрастающей функции  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(x_1, x_2) \equiv f(x_1 + x_2) - f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \in \mathfrak{R}(X_1 \wedge X_2); \quad (2.93)$$

$$\psi(x_1, x_2) \equiv f(x_1 + x_2) + f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \in \mathfrak{R}(X_1 \vee X_2).$$

Какой должна быть функция  $f$ , чтобы функции  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяли соответственно теоремам 1, 8 и 2, 9?

4. Показать, что  $x_1 \wedge_0 x_2 \leq x_1 \wedge_1 x_2 \equiv \min(x_1, x_2)$ ,  $x_1 \vee_0 x_2 \geq x_1 \vee_1 x_2 \equiv \max(x_1, x_2)$ . При каких  $\alpha$   $x_1 \wedge_\alpha x_2 \leq x_1 \wedge_1 x_2$ ,  $x_1 \vee_\alpha x_2 \geq x_1 \vee_1 x_2$ ?

## § 7. Условные R-функции

1. Пусть  $f(x) : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^m$ , и существует такая функция  $k$ -значной логики  $F : B_k^n \rightarrow B_k^m$ , что диаграмма (2.2) коммутативна при условии  $x \in G \subset \mathfrak{X}^n$ , а вне  $G$  условие  $S^m \circ f = F \circ S^n$  может и не выполняться. В этом случае  $f$  будем называть *условным R-отображением*, а функцию  $F$  — *сопровождающей для  $f$  в  $G$* . Одно и то же отображение  $f$  может быть *условным R-отображением* по отношению к системе  $\{G_i\}$  непересекающихся подмножеств  $\mathfrak{X}^n$  с системой  $\{F_i\} \subset \mathfrak{F}(B_k)$ , если в каждом из  $G_i$  выполняется условие  $S^m \circ f = F_i \circ S^n$ .

**Пример 1.** Функции

$$x_1 \cap_{x_3} x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}; \quad (2.94)$$

$$x_1 \cup_{x_3} x_2 \equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

являются  $R$ -функциями на плоскости  $x_3 = 0$ . Эти функции были использованы при решении пространственных контактных задач теории упругости [128].

**Пример 2.** Функция

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 + x_2 - x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (2.95)$$

является  $R$ -конъюнкцией на плоскости  $x_3 = 1$  и  $R$ -дизъюнкцией на плоскости  $x_3 = -1$ .

2. До сих пор рассматривались функции, являющиеся  $R$ -функциями везде в пространстве своих аргументов. Такие  $R$ -функции соответствуют некоторому покрытию числовой оси. Определенный интерес представляют также  $R$ -функции, соответствующие покрытиям конечных интервалов.

Так как с помощью замены

$$x' = \frac{2(x-a)}{b-a} - 1 + (x-a)(x-b)\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.96)$$

где  $\varphi(x) \in C$  — произвольная функция, отрезок  $[a, b]$  переходит в  $[-1, 1]$ , можно ограничиться рассмотрением отрезка  $[-1, 1]$ . При этом функцию  $\varphi(x)$  в формуле

(2.96) можно выбрать так, чтобы всякий заданный набор точек из  $[a, b]$  перешел в заданный набор точек отрезка  $[-1, 1]$ .

Рассмотрим следующее покрытие промежутка  $[-1, 1]$ :

$$\mathfrak{X}(0) = [-1, 0]; \quad \mathfrak{X}(1) = 0; \quad \mathfrak{X}(2) = (0, 1].$$

Функция  $f: \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}$  есть  $R$ -функция, соответствующая этому покрытию, если существует такая функция  $F: B_3^n \rightarrow B_3$ , что

$$S'_3[f(x_1, \dots, x_n)] = F[S'_3(x_1), \dots, S'_3(x_n)], \quad (2.97)$$

где

$$S'_3(t) = \begin{cases} 2, & \forall t \in (0, 1]; \\ 1, & t = 0; \\ 0, & \forall t \in [-1, 0). \end{cases} \quad (2.98)$$

$R$ -функции, определяемые формулами (2.97) и (2.98), будем называть  $R[-1, 1]$ -функциями.

Если  $\varphi(x) \equiv \varphi(x_1, \dots, x_n)$  есть  $R$ -функция, соответствующая разбиению  $\mathbb{R}$  на три части:  $\mathfrak{X}(0) = (-\infty, 0)$ ,  $\mathfrak{X}(1) = 0$ ,  $\mathfrak{X}(2) = (0, \infty)$ , то она может и не быть  $R[-1, 1]$ -функцией, так как значения этой функции в области  $\mathfrak{X}^n = \{-1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$  могут и не принадлежать отрезку  $[-1, 1]$ . Однако всегда можно провести нормировку, умножив  $\varphi$  на положительную величину  $C$  такую, что  $C^{-1} \geq \sup_{x \in \mathfrak{X}^n} |\varphi(x)|$ , и получить  $R[-1, 1]$ -функцию  $\varphi_1(x) = C\varphi(x)$ . Таким путем

легко получить достаточно полные системы  $R[-1, 1]$ -функций, производя надлежащую нормировку соответствующих систем  $R$ -функций.

Определенный интерес представляют  $R[-1, 1]$ -функции, для которых сопровождающими являются функции трехзначной логики из множества  $\mathcal{P}_3^1 = J_3^1 \cap \Omega \cap Q_3^1$ . Достаточно полные системы  $R[-1, 1]$ -функций, в частности, следующие.

Система  $\mathfrak{R}_1$ :

$$\{-1; \bar{x} \equiv -x; x_1 \wedge_\alpha x_2; x_1 \vee_\alpha x_2\}.$$

Система  $\mathfrak{R}_\alpha^0[-1, 1]$ :

$$y_1 \equiv -1; \quad y_2 \equiv \bar{x} \equiv -x; \quad y_3 \equiv x_1 \wedge'_\alpha x_2 \equiv \frac{1}{4} \left( x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} \right); \\ y_4 \equiv x_1 \vee'_\alpha x_2 \equiv \frac{1}{4} \left( x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} \right). \quad (2.99)$$

Система  $\mathfrak{R}_0^m[-1, 1]$ :

$$\left\{ -1; \bar{x} \equiv -x; \frac{1}{2^{m+2}} (x_1 \wedge_0^m x_2); \frac{1}{2^{m+2}} (x_1 \vee_0^m x_2) \right\}. \quad (2.100)$$

Заметим, что системы  $\mathfrak{R}_\alpha^0[-1, 1]$  и  $\mathfrak{R}_0^m[-1, 1]$  не удовлетворяют условиям теорем 1, 2, 4 § 6. Для того чтобы эти теоремы выполнялись и для  $R[-1, 1]$ -функций, можно использовать систему

$$\{-1; \bar{x} \equiv -x; x_1 \wedge' x_2 \equiv [1 + (x_1 \wedge^* x_2)^2]^{-1/2} (x_1 \wedge^* x_2); \\ x_1 \vee' x_2 \equiv [1 + (x_1 \vee^* x_2)^2]^{-1/2} (x_1 \vee^* x_2)\}, \quad (2.101)$$

где  $x_1 \wedge^* x_2$ ,  $x_1 \vee^* x_2$  — какие-либо из  $R$ -операций, для которых упомянутые теоремы справедливы. Другой вариант нормированной системы, сохраняющей теоремы 1, 2, 4, § 6, может быть представлен в виде

$$\{-1; \bar{x} \equiv -x; x_1 \wedge' x_2 \equiv [(x_1 \wedge_\alpha x_2) \vee_\alpha (-1)] \wedge_\alpha 1; \\ x_1 \vee' x_2 \equiv [(x_1 \vee_\alpha x_2) \wedge_\alpha 1] \vee_\alpha (-1)\}. \quad (2.102)$$

Проверить перечисленные свойства систем (2.101) и (2.102)  $R[-1, 1]$ -функций предоставляем читателю.

3. При построении элементарных достаточно полных систем  $R$ - и  $R[-1, 1]$ -функций были использованы операции  $\sqrt{x}$  ( $x \geq 0$ ) и  $|x|$ . Возникает вопрос: нельзя ли обойтись без этих операций, ограничившись, например, операциями  $x + y$ ,  $xu$  и константами? Легко убедиться в том, что ответ на этот вопрос отрицателен. Более того, множество аналитических везде функций, более широкое, чем множество полиномов, также не содержит достаточно полных систем  $R$  и  $R[-1, 1]$ -функций. Действительно, если, например, некоторая функция  $f(x_1, x_2)$  является  $R[-1, 1]$ -функцией, соответствующей конъюнкции  $X_1 \wedge X_2 \in \mathcal{F}(B_3)$ , то она равна нулю при  $x_2 = 0$ ,  $x_1 > 0$  и отрицательна при  $x_2 = 0$ ,  $x_1 < 0$ . Но тогда в точке  $(0, 0)$  она не может быть аналитической (см. п. 3 § 9). Отсюда, в частности, следует, что система  $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, a \forall a \in \mathbb{R}\}$  не достаточно полна по отношению к множеству  $R[-1, 1]$ -функций.

Поскольку полиномы принадлежат к числу наиболее простых относительно вычислений и наиболее удобных в обращении функций, возникает вопрос о приближении  $R$ -функций полиномами. Специфический характер поведения полиномов на бесконечности не позволяет рассчитывать на получение необходимых приближений  $R$ -функций (везде в  $\mathbb{R}^n$ ). Но для  $R[-1, 1]$ -функций этот вопрос может быть решен. При этом необходимо иметь в виду, что задача заключается не в приближении конкретных  $R[-1, 1]$ -функций полиномами, а в том, чтобы «почти попасть» в наперед заданную ветвь  $R[-1, 1]$ -функций. Такая постановка вопроса объясняется тем, что элементы одной ветви отличаются друг от друга положительными функциональными множителями, выбор которых с точки зрения построения достаточно полных систем  $R$ -функций в ряде случаев не имеет значения. Таким образом, речь идет лишь о приближении множеств нулей  $R[-1, 1]$ -функций множествами нулей полиномов при условии совпадения знаков  $R[-1, 1]$ -функций и приближающих полиномов в точках, находящихся на некотором расстоянии от указанных множеств их нулей.

Точнее эта задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  есть некоторая  $R[-1, 1]$ -функция, а  $Q$  — множество точек  $\mathbb{X}^n$ , в которых  $f = 0$ . Обозначим через  $Q_\epsilon$   $\epsilon$ -окрестность множества  $Q$ .

*Определение.* Полином  $P_m(x_1, \dots, x_n)$  называется  $R_\epsilon[-1, 1]$ -функцией с точностью до  $\epsilon$  (или  $R_\epsilon[-1, 1]$ -полиномом), если все нули  $P_m$ , лежащие в  $\mathbb{X}^n$ , принадлежат множеству  $Q_\epsilon$ , а в точках  $\mathbb{X}^n \cap \bar{Q}_\epsilon$  выполняется условие

$$S'_3[f(x_1, \dots, x_n)] \equiv S'_3[P_m(x_1, \dots, x_n)]. \quad (2.103)$$

Не затрагивая сложный вопрос о наилучшем приближении  $R[-1, 1]$ -функций, предложим один прием, с помощью которого  $R_\epsilon[-1, 1]$ -полиномы могут быть построены для каждой ветви  $R[-1, 1]$ -функций и при этом  $\epsilon$  можно выбрать сколь угодно малым. Неравенство

$$\varphi(x_1, x_2) \equiv 1 - x_1^{2m} - x_2^{2m} \geq 0 \quad (2.104)$$

определяет на плоскости  $x_1 O x_2$  область  $S$ , которая при достаточно большом  $m$  сколь угодно близка к квадрату  $ABCD$  (рис. 41). Следовательно, функция

$$\varphi_1(x_1, x_2) \equiv \varphi(x_1 - 1, x_2 - 1) \equiv 1 - (x_1 - 1)^{2m} - (x_2 - 1)^{2m} \quad (2.105)$$

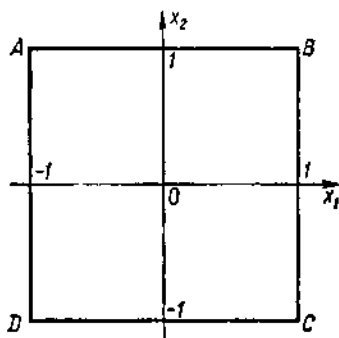


Рис. 41.

в области ( $\varepsilon \leq x_1 \leq 1, \varepsilon \leq x_2 \leq 1$ ) ( $\varepsilon > 0$ ) при достаточно большом  $m$  положительна, а в области  $(-1 \leq x_1 \leq -\varepsilon; -1 \leq x_2 \leq 1) \cup (-1 \leq x_1 \leq 1; -1 \leq x_2 \leq \varepsilon)$  — отрицательна. Все нули функции  $\psi_1$ , принадлежащие области  $\mathfrak{X}^2 = [-1, 1]^2$ , расположены в полоске  $Q_\varepsilon$ , состоящей из  $\varepsilon$ -окрестностей положительных полуосей  $Ox_1$  и  $Ox_2$ . Легко найти, что  $\varepsilon = 1 - 2^{1/2m}$ . Таким образом, полином  $\psi_1(x_1, x_2)$  является  $R_\varepsilon[-1, 1]$ -конъюнкцией. Аналогично убеждаемся в том, что полином

$$\psi_2(x_1, x_2) \equiv (x_1 + 1)^{2m} + (x_2 + 1)^{2m} - 1 \quad (2.106)$$

является  $R_\varepsilon[-1, 1]$ -дизъюнкцией. Очевидно, что  $R$ -отрицание  $\bar{x} \equiv -x$  можно рассматривать как  $R_\varepsilon[-1, 1]$ -отрицание при любом  $\varepsilon$ . Введем обозначения:  $\psi_1 \equiv \gamma^{-1}(x_1 \wedge^\varepsilon x_2)$ ;  $\psi_2 \equiv \gamma^{-1}(x_1 \vee^\varepsilon x_2)$ , где  $\gamma = 2^{2m+1}$ . Тогда система полиномов

$$\begin{aligned} (-1; \bar{x} \equiv -x; x_1 \wedge^\varepsilon x_2 \equiv 2^{-2m-1} [1 - (x_1 - 1)^{2m} - (x_2 - 1)^{2m}]; \\ x_1 \vee^\varepsilon x_2 \equiv 2^{-2m-1} [(x_1 + 1)^{2m} + (x_2 + 1)^{2m} - 1]) \end{aligned} \quad (2.107)$$

при  $m \geq \ln 2 \cdot [2 \ln(1 - \varepsilon)]^{-1}$  представляет собой (в определенном смысле) достаточно полную систему  $R[-1, 1]$ -функций. При выбранном  $\gamma$  значения функций, входящих в систему (2.107), по модулю меньше единицы. Путем суперпозиции полиномов (и выборе надлежащего  $m$  для каждой суперпозиции) можно получать  $R_\varepsilon[-1, 1]$ -полиномы, соответствующие различным ветвям. Вопрос о том, каким должно выбираться  $m$  в зависимости от выбора ветви, не исследован.

*Упражнение.* Показать, что функции  $\psi_1 \equiv \Phi \left[ x_1 - (1 - 2^{-1/2m-1}); x_2 - (1 - 2^{-1/2m-1}) \right]$  и  $\psi_2 \equiv -\Phi \left[ x_1 + (1 - 2^{-1/2m-1}); x_2 + \frac{1}{2} (1 - 2^{-1/2m-1}) \right]$  являются  $R_\varepsilon[-1, 1]$ -функциями, соответствующими конъюнкции и дизъюнкции, при  $\varepsilon = \frac{1}{2} 2^{-1/m}$ .

## § 8. Некоторые $R$ -операторы

Пусть  $\mathfrak{X}$  есть множество непрерывно-дифференцируемых строго монотонных на интервале  $[a, b]$  функций. Рассмотрим покрытие этого множества множествами  $\mathfrak{X}(0)$  и  $\mathfrak{X}(1)$ , включив в  $\mathfrak{X}(0)$  возрастающие на  $[a, b]$  функции, а в  $\mathfrak{X}(1)$  — убывающие. Тогда  $m$ -местный оператор

$$\omega \equiv A[u_1(x), \dots, u_m(x)], \quad u_i(x) \in \mathfrak{X}, \quad (2.108)$$

будет  $R$ -оператором, если найдется такая булева функция  $F(X_1, \dots, X_m)$ , что для всех функций  $u_i(x) \in \mathfrak{X}$  выполняется равенство

$$S_2[A(u_1, \dots, u_m)] = F[S_2(u_1), \dots, S_2(u_m)], \quad (2.109)$$

где:  $S_2[u(x)] = \begin{cases} 1, & \text{если } u(x) \text{ — возрастает;} \\ 0, & \text{если } u(x) \text{ — убывает.} \end{cases}$

Приведем примеры  $R$ -операторов для этого случая:

$$\omega_1 \equiv A_1[u(x)] \equiv \exp(x); \quad \omega_2 \equiv A_2[u(x)] \equiv \overline{u(x)} = -u(x);$$

$$\omega_3 \equiv A_3[u(x)] \equiv \frac{1}{1 + u^2(x)};$$

$$\omega_4 \equiv A_4 [u(x), v(x)] \equiv u(x) + v(x) - \int_a^x \sqrt{(u'_x)^2 + (v'_x)^2} dx; \quad (2.110)$$

$$\omega_5 \equiv A_5 [u(x), v(x)] \equiv u(x) + v(x) + \int_a^x \sqrt{(u'_x)^2 + (v'_x)^2} dx$$

Оператору  $A_1$  соответствует булева константа единица, поскольку  $S_2 [A_1 (u)] = 1$  независимо от выбора функции  $u(x)$ . Операторам  $A_2$  и  $A_3$  соответствует отрицание  $\bar{X}$ , так как они преобразуют возрастающую функцию в убывающую, и наоборот. Оператору  $A_4$  соответствует конъюнкция. Действительно,  $\frac{d\omega_4}{dx} = u'_x + v'_x - \sqrt{(u'_x)^2 + (v'_x)^2} \equiv u'_x \wedge v'_x$  и, следовательно, производная  $\frac{d\omega_4}{dx} \geq 0$  тогда и только тогда, когда  $u'_x \geq 0$ ,  $v'_x \geq 0$  и  $\frac{d\omega_4}{dx} \leq 0$ , если хотя бы одна из производных  $u'_x$  или  $v'_x$  меньше нуля. Аналогично убеждаемся, что оператору  $A_5$  соответствует дизъюнкция  $X_1 \vee X_2$ .

Из теоремы 4 § 1 следует, что система  $R$ -операторов

$$H = \{u(x); A_4(u, v); A_5(u, v)\} \quad (2.111)$$

достаточно полная в множестве всех  $R$ -операторов рассматриваемого типа.

**Пример 1.** Функция  $y = x^2$  убывает на интервале  $(-\infty, 0)$  и возрастает на интервале  $(0, \infty)$ . Функция  $y = \sin x$  возрастает на интервалах  $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ ) и убывает на остальных. Следовательно, функция  $y = x^2 + \sin x - \int_0^x \sqrt{4x^2 + \cos^2 x} dx$  возрастает на интервалах  $(0, \frac{\pi}{2})$ ;  $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и убывает на остальных интервалах числовой оси.

Аналогично могут быть построены  $R$ -операторы, соответствующие разбиению множества функций на выпуклые и вогнутые.

**Упражнение.** Пусть  $X$  — множество дважды дифференцируемых в точке  $x$  функций и

$$S_3 [y(x)] = \begin{cases} 0, & \forall y(x), \quad y'' + a(x)y < 0; \\ 1, & \forall y(x), \quad y'' + a(x)y = 0; \\ 2, & \forall y(x), \quad y'' + a(x)y > 0, \end{cases}$$

где  $a(x)$  — известная функция. Построить для соответствующего множества  $R$ -операторов достаточно полную систему.

## § 9. Чертеж и его уравнение

1. В дальнейшем вместо часто употребляемых терминов «линия», «фигура», «поверхность», «тело», «гиперповерхность» и более общих, но длинных терминов «геометрический объект», «точечное множество» будем использовать термин «чертеж». На интуитивном уровне этот термин будем понимать как нечто в  $\mathbb{R}^n$ , имеющее форму.

Точка есть простейший чертеж, и поэтому чертежи можно было бы рассматривать как элементы множества  $2^{\mathbb{R}^n}$  всех подмножеств  $\mathbb{R}^n$ . Однако при таком общем подходе пришлось бы рассматривать в

качестве чертежей, например, множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению  $\sin\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = 0$ ; множество точек куба, расстояния которых от его вершин иррациональны, и т. д. О форме таких чертежей можно говорить лишь весьма условно. В дальнейшем будет произведена формализация понятия чертежа, исключая подобного рода геометрические объекты из числа чертежей, но пока никакие ограничения на это понятие не накладываются.

В аналитической геометрии обычно говорят о множествах точек в  $\mathbb{R}^n$ , координаты которых удовлетворяют уравнениям вида  $f(x) = 0$ , где  $f$  — функция, принадлежащая некоторому достаточно общему множеству. В качестве такого множества часто рассматривают множества целых рациональных функций. Это приводит к так называемым *алгебраическим чертежам* (кривым, поверхностям и т. д.), к числу которых относятся, например, прямые, окружности, эллипсы в  $\mathbb{R}^2$ , плоскости, сферы, эллипсоиды, гиперboloиды в  $\mathbb{R}^3$ . В традиционных курсах аналитической геометрии, как правило, рассматриваются алгебраические кривые и поверхности второго порядка. Уравнениям высшей степени посвящена специальная литература [150].

В дальнейшем для простоты будем называть уравнение  $f = 0$  непрерывным,  $m$  раз дифференцируемым, аналитическим и так далее в зависимости от того, является ли функция  $f$  непрерывной,  $m$  раз дифференцируемой, аналитической и т. д. Аналогично будем говорить о непрерывных, аналитических и других неравенствах.

Нетрудно заметить, что упомянутое множество алгебраических чертежей, хотя в него и входит целый ряд замечательных линий и поверхностей, довольно бедно. Оно не содержит, например, квадрата, ломаной линии, усеченного конуса, не говоря уже о таком объекте, как, скажем, головка цилиндра двигателя внутреннего сгорания.

Если допустить, что уравнение  $f(x) = 0$  непрерывно в  $\mathbb{R}^n$ , и не накладывать на него больше никаких ограничений, то получится излишне широкое множество геометрических объектов. Легко понять, что в этом случае уравнению  $f(x) = 0$  соответствует некоторое замкнутое множество точек в  $\mathbb{R}^n$ . Верно и обратное утверждение: для всякого замкнутого множества  $L$  может быть построено непрерывное уравнение (см. теоремы 1 и 2 § 16 гл. 1). Его простейший вариант — уравнение

$$f(x) \equiv \inf_{y \in L} \|x - y\| = 0, \quad (2.112)$$

которое назовем *нормальным уравнением*  $L$  [109].

В известном курсе лекций по аналитической геометрии П. С. Александрова сказано: «Каждый раз, когда определен какой-нибудь класс функций  $F(x, y)$  или  $F(x, y, z)$  соответственно от двух или трех переменных, можно определить посредством уравнений вида  $F(x, y) = 0$  или  $F(x, y, z) = 0$  и соответствующий класс линий на пло-

скости или поверхностей в пространстве. Так, например, можно рассматривать функции  $F(x, y)$  и  $F(x, y, z)$ , имеющие частные производные по всем аргументам, вплоть до данного порядка  $k$ , можно рассматривать бесконечно дифференцируемые функции и т. д. Наиболее широким представляется класс линий и поверхностей, который получается, если от функций  $F(x, y)$  и  $F(x, y, z)$  не требовать ничего, кроме их непрерывности, однако этот класс оказывается слишком обширным... » [3, с. 393—394].

Но если для некоторого геометрического объекта можно написать непрерывное уравнение  $f = 0$ , то для него можно написать и бесконечно дифференцируемое уравнение  $\varphi = 0$ ! Этот замечательный результат получен еще в 1932 г. известным математиком Х. Уитни. Теорема Уитни в теории дифференцируемых многообразий рассматривается как хорошо известный факт [127]. Однако, несмотря на принципиальное значение этих результатов, они до последнего времени не были восприняты многими математиками, работающими в других областях. Об этом, в частности, свидетельствует приведенная выше цитата. Отметим, что известный математик М. Х. Шульц [205] при формулировке ряда своих теорем вводит излишнее предположение о том, что для рассматриваемых им замкнутых точечных множеств существуют бесконечно дифференцируемые уравнения. Между тем из теоремы Уитни следует, что для всякого замкнутого множества существует бесконечно дифференцируемое уравнение и, таким образом, упомянутые теоремы Шульца следует считать более сильными, чем предполагает сам автор.

На первый взгляд теорема Уитни может показаться противоречащей здравому смыслу, так как представления о бесконечно дифференцируемых уравнениях и таких чертежах, как квадрат, ломаная линия, усеченный конус, трудно ассоциируются. Чтобы более просто представить возникающую ситуацию, рассмотрим бесконечно дифференцируемое уравнение  $f(x_1, x_2) = 0$  на плоскости  $x_1Ox_2$ . Функции  $z = f(x_1, x_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  в пространстве  $x_1Ox_2z$  соответствует некоторая бесконечно гладкая поверхность  $S$ . Чертеж  $L$ , описываемый уравнением  $f(x_1, x_2) = 0$ , есть результат пересечения этой поверхности с плоскостью  $z = 0$ . Конечно, приходится преодолевать определенный психологический барьер, чтобы представить, как в результате пересечения бесконечно гладкой поверхности с плоскостью получается такая фигура, как, например, квадрат. Отметим, что по теореме Уитни в результате такого пересечения может получиться вообще любое замкнутое множество на плоскости.

2. Приведем простое доказательство теоремы Уитни, используя функцию  $\text{up}(x)$  [126].

**Теорема 1.** Для любого замкнутого множества  $S \subset \mathbb{R}^n$  существует функция  $\omega(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  такая, что

$$\omega(x) = 0 \quad \text{при } x \in S;$$

$$\omega(x) > 0 \quad \text{при } x \in (\mathbb{R}^n \setminus S);$$

$$|D^\alpha \omega(x)| < C(\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n;$$

$$D^\alpha \omega(x) = 0, \quad x \in S, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

$$\text{где } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}.$$

**Доказательство.** Пусть  $S_\varepsilon$  —  $\varepsilon$ -окрестность замкнутого множества  $S$ :

$$S_\varepsilon = \{x : \rho(x, S) < \varepsilon\}.$$

Учтем, что  $\sum_{k_i=-\infty}^{\infty} \text{up}(2^m x_i - k_i) \equiv 1$ . Отсюда следует тождество

$$\sum_{k_1, \dots, k_n} \prod_{i=1}^n \text{up}(2^m x_i - k_i) \equiv 1,$$

где суммирование производится по всем целым  $k_i$ .

Оставим в этой сумме только те слагаемые, носители которых не пересекаются с  $S_\varepsilon$  при  $\varepsilon = 2^{-m}$ , и назовем полученную функцию  $\omega_m(x)$ . Тогда функция  $\omega(x) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m!} \omega_m(x)$  обладает всеми тре-

буемыми свойствами, причем  $C(\alpha) = C2^{2|\alpha|}$ .

3. Естественное сужение множества бесконечно дифференцируемых функций — множество аналитических функций. Нетрудно, однако, показать, что соответствующее аналитическим уравнениям множество чертежей излишне узко. Покажем, например, что этому множеству не принадлежит квадрат.

Рассмотрим квадрат с вершинами в точках  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(a, a)$ ,  $(0, a)$ . Пусть  $f = 0$  — аналитическое уравнение этого квадрата, а  $\rho$  — радиус сходимости ряда Тейлора функции  $f$ , построенного для точки  $(0, 0)$ . Тогда при  $x_1^2 + x_2^2 < \rho^2$

$$f(x) \equiv f(x_1, x_2) \equiv f(0, 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_2} x_2 + \\ + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_1^2} x_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_1 \partial x_2} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_2^2} x_2^2 \right] + \dots$$

Полагая  $x_2 = 0$ , получаем

$$f(x)|_{x_2=0} \equiv f(x_1, 0) \equiv f(0, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(0, 0)}{\partial x_1^k} x_1^k, \quad |x_1| < \rho. \quad (2.113)$$

Поскольку функция  $f(x)$  равна нулю в точках квадрата, имеем  $f(x_1, 0) = 0$  при  $0 \leq x_1 \leq a$ . Поэтому

$$f(0, 0) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_1^2} = \dots = 0.$$



Следовательно, согласно (2.113)  $f(x_1, 0) \equiv 0$  вдоль интервала  $(-p, p)$  оси абсцисс и, таким образом, чертеж, описываемый уравнением  $f(x) = 0$ , кроме точек квадрата включает в себя еще и точки интервала  $(-p, 0)$  оси абсцисс. Поэтому уравнение  $f(x) = 0$  не является уравнением квадрата. Приходим к противоречию.

4. Есть еще одно важное обстоятельство, которое влияет на выбор множества допустимых функций: необходимо, чтобы имелась возможность фактического построения уравнений рассматриваемых геометрических объектов.

Со времен Декарта такая задача самостоятельно ставилась и решалась лишь для небольшого числа наиболее простых геометрических форм — прямой, плоскости, окружности, конических сечений, сферы и некоторых других объектов. Между тем в математике и ее приложениях есть много различных задач, в которых требуется строить уравнения для геометрических объектов весьма сложного вида, например при расчете физико-механических полей различной природы в сложных областях, оптимальном раскрое и геометрической миниатюризации аппаратуры, распознавании зрительных образов, в математическом программировании и др.

Чтобы можно было фактически написать уравнение  $f(x) = 0$  для данного чертежа, необходимо точно определить, что означают слова «написать уравнение» и «данный чертеж». Для написания какого-нибудь конкретного уравнения вида  $f(x) = 0$  надо, очевидно, располагать некоторой системой конструктивных средств для записи функции  $f(x)$ . Введенное в § 4 гл. I понятие  $H$ -реализуемой функции — достаточно хорошая для этой цели формализация. Впредь, когда речь будет идти о построении какой-либо функции, будем подразумевать, что есть некоторая система  $H$  функций («операций»), для обозначения которых введена определенная символика, а рассматриваемые функции являются их суперпозициями.

Заметим, что среди упоминавшихся в настоящем параграфе функциональных множеств требованию  $H$ -реализуемости удовлетворяет лишь множество  $\mathfrak{M}(H_0)$  целых рациональных функций: каждая такая функция может быть представлена в виде суперпозиции  $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, a \forall a \in \mathbb{R}\}$ . Соответствующее множеству  $\mathfrak{M}(H_0)$  множество  $\mathfrak{N}(H_0)$  алгебраических чертежей вполне определяется заданием базисной системы  $H_0$  и в конечном счете все свойства алгебраических чертежей определяются свойствами системы  $H_0$ .

В ряде работ [например, 5] используется понятие *полуалгебраического множества* (полуалгебраического чертежа). К числу полуалгебраических относятся чертежи, точки которых удовлетворяют конечным системам алгебраических уравнений и неравенств, а также объединения конечного числа таких чертежей. Множество полуалгебраических чертежей обозначим  $\mathfrak{M}_{1/2}(H_0)$ .

Множество полуалгебраических чертежей  $\mathfrak{M}_{1/2}(H_0)$  существенно более широкое, чем множество алгебраических. Например, квадрат, ломаная линия, усеченный конус и другие уже принадлежат множеству полуалгебраических чертежей. Однако то, что при таком

подходе полуалгебраические чертежи задаются не одним уравнением вида  $f(x) = 0$ , а системами систем уравнений и неравенств, серьезный конструктивный недостаток, проявляющийся во многих ситуациях, где требуется учитывать геометрическую информацию на аналитическом уровне. Такая традиционная фраза, применяемая при задании геометрических объектов, как, например, «фигура, ограниченная линиями  $\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_n = 0$ », вообще, не достаточно удачная. Так, если сказать, что «пятиугольник задан уравнениями сторон  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_1 + x_2 = 4, x_1 - x_2 = 2, x_2 = 2$ , то совершенно

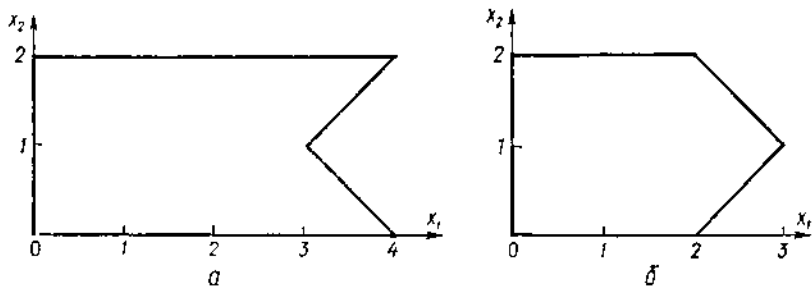


Рис. 42.

неясно, какой из пятиугольников, изображенных на рис. 42, имеется в виду. И требуются некоторые дополнительные комментарии (например, что многоугольник выпуклый), к которым трудно применить формальный математический аппарат.

Возникает вопрос: нельзя ли и такие чертежи, как полуалгебраические, задавать одним уравнением, подобно тому как это можно делать для прямых, окружностей, эллипсоидов и других линий и поверхностей? Ясно, что решение этого вопроса следует искать на пути расширения базисной системы  $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, a \forall a \in \mathbb{R}\}$ . На первый взгляд этот путь может показаться мало перспективным. Ведь если даже при использовании операций сложения, умножения и констант задача изучения соответствующих чертежей — алгебраических линий и поверхностей — оказалась весьма сложной, то насколько сложнее она станет при добавлении к сложению и умножению еще каких-нибудь операций! Однако, как увидим далее, дело совсем не безнадежно. Необходимо иметь в виду, что в рассматриваемой задаче речь идет не о предложении каких-либо новых средств для изучения чертежей, описываемых заданными уравнениями, а о том, чтобы строить уравнения для уже заданных чертежей.

Более широким конструктивно заданным множеством, чем множество  $\mathfrak{M}(H_0)$  целых рациональных функций, является множество  $E = \mathfrak{M}(H_\varepsilon)$  элементарных функций — суперпозиций системы (1.9). Чертеж  $L \subset \mathbb{R}^n$ , определяемый элементарным уравнением  $f(x) = 0, f \in C(\mathbb{R}^n) \cap E$ , будем называть *элементарным чертежом*. Множество элементарных чертежей обозначим  $\mathfrak{N}(H_\varepsilon)$ .

По аналогии с множеством полуалгебраических чертежей введем множество полуэлементарных чертежей  $\mathfrak{R}_{1/2}(H_e)$ , которое включает точечные множества, удовлетворяющие системам элементарных уравнений и неравенств, и конечные объединения таких множеств. На плоскости, например, к числу полуэлементарных принадлежат не только чертежи, составленные из кусков алгебраических кривых, но и из синусоид, тангенсоид, логарифмических и любых других элементарных кривых.

Может показаться, что по аналогии с множеством алгебраических чертежей  $\mathfrak{R}(H_0)$ , для которого множество полуалгебраических чертежей  $\mathfrak{R}_{1/2}(H_0)$  оказалось существенно более широким, множество полуэлементарных чертежей  $\mathfrak{R}_{1/2}(H_e)$  также шире множества элементарных чертежей  $\mathfrak{R}(H_e)$ . В § 10 будет показано, что это не так: всякий полуэлементарный чертеж является элементарным. Таким образом,

$$\mathfrak{R}_{1/2}(H_e) = \mathfrak{R}(H_e).$$

В частности, это означает, что символов основных элементарных функций, арифметических операций и констант достаточно для того, чтобы написать, например, уравнение поверхности книжного шкафа или днища корабля, если считать что последние представляют собой объединение кусков плоскостей, сфер, конусов, цилиндров и других элементарных поверхностей. (В крайнем случае можно аппроксимировать неизвестные поверхности известными).

Рассуждения, проведенные для базисных систем  $H_0$  и  $H_e$ , можно провести для любой другой базисной системы  $H$ . В итоге получим множества  $\mathfrak{R}(H)$   $H$ -реализуемых чертежей и  $\mathfrak{R}_{1/2}(H)$  полу- $H$ -реализуемых чертежей. При этом возможны две ситуации: а)  $\mathfrak{R}(H) \subset \mathfrak{R}_{1/2}(H)$  и, кроме того, имеются полу- $H$ -реализуемые чертежи, не принадлежащие  $\mathfrak{R}(H)$ ; б)  $\mathfrak{R}_{1/2}(H) = \mathfrak{R}(H)$  — всякий полу- $H$ -реализуемый чертеж является и  $H$ -реализуемым.

Для ситуации «б» базисную систему  $H$  будем называть *алгоритмически полной*. (Более точное формальное определение дано ниже.) Это название отражает тот факт, что с помощью символов операций, составляющих алгоритмически полную систему  $H$ , можно написать уравнение всякого чертежа, входящего в порождаемое системой  $H$  множество полу- $H$ -реализуемых чертежей.

Примером алгоритмически неполной системы является  $H_0 = \{x_1 + x_2, x_2 x_2, a \forall a \in \mathbb{R}\}$ . Полноту системы  $H_0$  предстоит доказать.

Расширим несколько понятие алгоритмической полноты. Пусть, как и прежде,  $\mathfrak{M}(H)$  — множество  $H$ -реализуемых функций. Чертеж  $S$ , определяемый неравенством  $f \geq 0$ ,  $f \in \mathfrak{M}(H)$ , назовем  *$H$ -реализуемой областью*. (На самом деле  $S$  может и не быть областью в обычном понимании. Так, неравенство  $(-x_1^2) \geq 0$  определяет ось  $Ox_2 \in \mathbb{R}^2$ , а неравенству  $(-1 - x_1^2) \geq 0$  соответствует пустое множество). Множество всех  $H$ -реализуемых областей обозначим  $\mathfrak{G}(H)$ .

Чертеж  $L_\varphi f = L \cap S$ , где  $L = (f = 0)$ ,  $S = (\varphi \geq 0)$ ,  $f, \varphi \in \mathfrak{M}(H)$ , назовем  $H$ -элементом чертежа  $L$ , выделяемым областью  $S$ . Нетрудно заметить, что упомянутые выше полу- $H$ -реализуемые чертежи, составляющие множество  $\mathfrak{R}_{1/2}(H)$ , состоят из конечных объединений  $H$ -элементов.

Пусть  $\mathfrak{F}(H, T)$  — множество, состоящее из конечных объединений  $H$ -элементов или чертежей, получающихся из  $H$ -элементов путем применения некоторого множества преобразований  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . В частности, если  $T = E$  — тождественное преобразование  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , то  $\mathfrak{F}(H, T) = \mathfrak{R}_{1/2}(H)$ .

Множество  $\mathfrak{F}(H, T)$  назовем множеством  $H$ -чертежей. Если не будет оговорено, будем считать, что  $T$  — множество преобразований переноса и поворота (конгруэнций), а соответствующее множество  $H$ -чертежей будем обозначать  $\mathfrak{F}(H)$ . Очевидно, что если система  $H$  является расширением системы  $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, a \forall a \in \mathbb{R}\}$ , то конгруэнтные чертежи принадлежат или не принадлежат множеству  $\mathfrak{F}(H)$  одновременно. Таким образом, в этом случае  $\mathfrak{F}(H) = \mathfrak{R}_{1/2}(H)$ . В дальнейшем в основном имеются в виду именно такие системы. Это объясняется в первую очередь естественным желанием сохранить в множестве  $H$ -чертежей широко встречающиеся в приложениях полуалгебраические чертежи.

**Определение.** Базисная система  $H$ , для которой выполняется условие

$$\mathfrak{F}(H, T) = \mathfrak{R}(H), \quad (2.114)$$

называется алгоритмически полной (по отношению к множеству преобразований  $T$ ). Далее будет показано, что понятие алгоритмической полноты тесно связано с рассмотренным в предыдущих параграфах понятием достаточно полной системы  $R$ -функций.

## § 10. Переход от предикатных уравнений чертежей к обычным

Пусть  $\Sigma_i = [\sigma_i(x) \geq 0]$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — система опорных (замкнутых) областей в  $\mathbb{R}^n$ . Буквой  $\Sigma_i$  будем обозначать также трехзначные предикаты (трехзначные характеристические функции), соответствующие функциям  $\sigma_i(x)$ . А именно

$$\Sigma_i = \begin{cases} 0, & \forall x \sigma_i(x) < 0; \\ 1, & \forall x \sigma_i(x) = 0; \\ 2, & \forall x \sigma_i(x) > 0, \end{cases} \quad (2.115)$$

или, что то же,

$$\Sigma_i = S_3[\sigma_i(x)] = 1 + \text{sign } \sigma_i(x). \quad (2.116)$$

Относительно функций  $\sigma_i(x)$  будем предполагать, что они принадлежат множеству  $\mathfrak{M}(H)$   $H$ -реализуемых функций, где  $H \subset C(\mathbb{R}^n)$  — некоторая система функций, такая, что  $\mathfrak{M}(H)$  включает

в себя по крайней мере одну достаточно полную систему  $R$ -функций (§ 4).

Пусть  $F: B_3^m \rightarrow B_3$  — некоторая функция трехзначной логики. В § 17 гл. 1 было показано, что если  $F \in Q_3^1$ , то функция

$$\Omega = F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m) = F[S_3(\sigma_1), \dots, S_3(\sigma_m)] \quad (2.117)$$

может рассматриваться в  $\mathbb{R}^n$  как трехзначный предикат и при этом предикатное уравнение

$$F[S_3(\sigma_1), \dots, S_3(\sigma_m)] = i \quad (2.118)$$

определяет при  $i = 0$  и  $i = 2$  открытые области  $\Omega^0$  и  $\Omega^2$  соответственно, а при  $i = 1$  — замкнутую область  $\Omega^1$ .

Пусть  $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  —  $R$ -функция, для которой  $F$  есть сопровождающая функция трехзначной логики, т. е.

$$S_3 \circ f(x) = F \circ S_3(x), \quad (2.119)$$

где  $S_3(x) = (S_3(x_1), \dots, S_3(x_n))$ .

**Теорема 1.** Если функция трехзначной логики  $F: B_3^m \rightarrow B_3$  принадлежит множеству  $Q_3^1$  функций, сопровождающих для множества  $Q = C(\mathbb{R}^m) \cap \mathfrak{R}(\mathbb{R}, S_3)$  непрерывных  $R$ -функций, а  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  —  $R$ -функция из  $Q$ , для которой  $F$  сопровождающая, то предикатное уравнение

$$F[S_3(\sigma)] \equiv F[S_3(\sigma_1), \dots, S_3(\sigma_m)] = 1 \quad (2.120)$$

определяет тот же чертеж, что и уравнение

$$f(\sigma) \equiv f(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = 0. \quad (2.121)$$

**Доказательство.** Из формул (2.118) и (2.120) получаем

$$S_3[f(\sigma)] = F[S_3(\sigma)] = 1. \quad (2.122)$$

Тогда, вследствие того что  $S_3(t) = 1 + \text{sign } t$ , из (2.122) получаем  $1 + \text{sign } f(\sigma) = 1$ . Отсюда  $\text{sign } f(\sigma) = 0$ , следовательно,  $f(\sigma) = 0$ . Теорема доказана.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 1 уравнение  $f(\sigma) = 0$  необязательно является уравнением границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega = \{f(\sigma) \geq 0\}$ . Так, если

$$\Sigma_1 = (\sigma_1 \equiv |x_1| - x_1 \geq 0);$$

$$\Sigma_2 = (\sigma_2 \equiv 1 - x_1 \geq 0)$$

области на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , а  $\Omega = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , то предикат для области  $\Omega$  получаем с помощью трехзначной конъюнкции  $\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2$ . (Здесь  $\Omega, \Sigma_1, \Sigma_2$  обозначают не области, а величины из  $B_3$ ). Возьмем в качестве соответствующей  $R$ -функции  $R$ -конъюнкцию  $x_1 \wedge_0 x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Тогда предикатному уравнению  $\Sigma_1 \wedge \Sigma_2 = 1$  соответствует уравнение

$$\omega \equiv \sigma_1 \wedge_0 \sigma_2 \equiv |x_1| - x_1 + 1 - x_1 - \sqrt{(|x_1| - x_1)^2 + (1 - x_1)^2} = 0,$$

которому удовлетворяют точки бесконечной полосы, заключенной между прямыми  $x_1 = 0$  и  $x_1 = 1$ . В то же время границей области служит прямая  $x_1 = 1$ . Вместе с тем из доказательства теоремы 1 следует, что область, определяемая предикатным неравенством

$$\Omega = F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m) \geq 1, \quad (2.123)$$

определяется также неравенством

$$\omega \equiv f(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \geq 0. \quad (2.124)$$

Из приведенных рассуждений следует, что выполнения условий теоремы 1, вообще, недостаточно для решения задачи построения уравнений границ сложных областей. Но именно эти уравнения будут в дальнейшем представлять наибольший интерес. При их построении основную роль играет следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $f(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$  —  $R$ -функция, для которой функция  $F(X) : B_3^m \rightarrow B_3$ ,  $F(X) \in \mathcal{P}_3^1$ , сопровождающая. Тогда, каковы бы ни были простые непрерывные функции  $\sigma_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), уравнению

$$\omega(x) \equiv f(\sigma) \equiv f(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = 0 \quad (2.125)$$

соответствует чертёж, не содержащий внутренних точек. (Множество  $\mathcal{P}_3^1$  рассмотрено в § 15—18 гл. 1)

**Доказательство.** Пусть  $\omega(x^0) = 0$ ,  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , тогда согласно (2.122)

$$\begin{aligned} F\{S_3[\sigma_1(x^0)], \dots, S_3[\sigma_m(x^0)]\} &= S_3\{f[\sigma_1(x^0), \dots, \sigma_m(x^0)]\} = \\ &= S_3[\omega(x^0)] = 1. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Поскольку  $F \in \mathcal{P}_3^1$ , из (2.126) следует, что среди чисел  $S_3[\sigma_1(x^0)], \dots, S_3[\sigma_m(x^0)]$  есть единицы и согласно (2.116) соответствующие им числа  $\sigma_i(x^0)$  равны нулю. Так как функции  $\sigma_i(x)$  по условию теоремы — простые непрерывные, то в любой окрестности точки  $x^0$  они принимают отличные от нуля значения. Из  $F \in \mathcal{P}_3^1$  следует, что  $f \in \mathcal{P}$  (см. § 4). Поэтому, если все аргументы функции  $f$  отличны от нуля, то и  $f \neq 0$ . Таким образом, в любой окрестности точки  $x^0$  есть точки, в которых функция  $\omega(x)$  отлична от нуля. Теорема доказана.

Из доказанных теорем следует простое правило перехода от предикатных уравнений сложных геометрических объектов (см. § 18, гл. 1) к обычным уравнениям. Однако применение этого правила имеет ряд специфических особенностей, на которые внимание будет обращено далее.

## § 11. Примеры построения уравнений границ областей

Задачи, рассмотренные ниже, отражают методику построения уравнений границ областей различной конфигурации. Одновременно обращается внимание на некоторые «технологические» вопросы,

например касающиеся выбора тех или иных систем  $R$ -функций, характера соответствующих семейств линий уровня, вырождения и т. п. Эти проблемы постоянно приходится решать тем, кто пытается применять метод  $R$ -функций.

**Пример 1.** Построить уравнение прямоугольника  $ABCD$  с вершинами в точках  $A(a, b)$ ,  $B(-a, b)$ ,  $C(-a, -b)$  и  $D(a, -b)$  (рис. 43, а). Этот прямоугольник можно построить, взяв в качестве опорных областей две полосы (вертикальную и горизонтальную)

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= (\sigma_1 \equiv a^2 - x_1^2 \geq 0); \\ \Sigma_2 &= (\sigma_2 \equiv b^2 - x_2^2 \geq 0)\end{aligned}\quad (2.127)$$

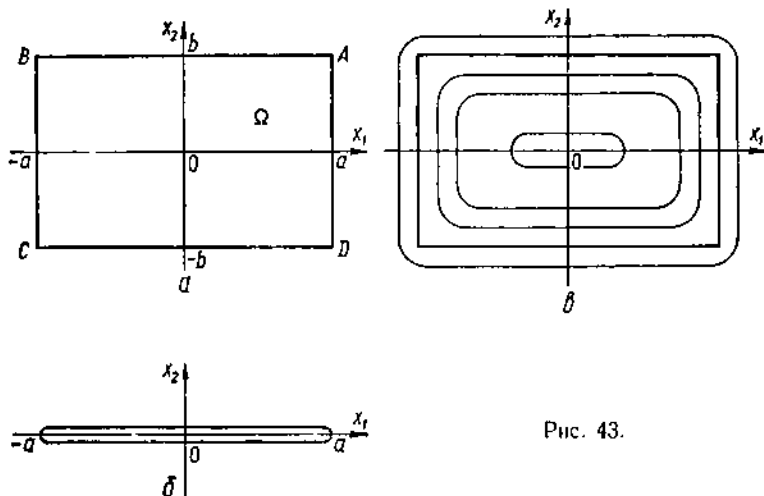


Рис. 43.

или четыре полуплоскости

$$\begin{aligned}\Sigma_3 &= (\sigma_3 \equiv a - x_1 \geq 0); \quad \Sigma_4 = (\sigma_4 \equiv a + x_1 \geq 0); \\ \Sigma_5 &= (\sigma_5 \equiv b - x_2 \geq 0); \quad \Sigma_6 = (\sigma_6 \equiv b + x_2 \geq 0).\end{aligned}\quad (2.128)$$

В первом случае область  $\Omega$  можно представить предикатом

$$\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2$$

и, если использовать простейшую  $R$ -конъюнкцию  $x_1 \wedge_0 x_2$ , написать уравнение границы в виде

$$\omega_1 \equiv (a^2 - x_1^2) \wedge_0 (b^2 - x_2^2) \equiv a^2 - x_1^2 + b^2 - x_2^2 - \sqrt{(a^2 - x_1^2)^2 + (b^2 - x_2^2)^2} = 0. \quad (2.129)$$

Во втором случае полагаем

$$\Omega = \Sigma_3 \wedge \Sigma_4 \wedge \Sigma_5 \wedge \Sigma_6. \quad (2.130)$$

Соответствующее уравнение прямоугольника получаем в виде

$$\begin{aligned}\omega_2 &\equiv [(a - x_1) \wedge_0 (a + x_1)] \wedge_0 [(b - x_2) \wedge_0 (b + x_2)] \equiv \\ &\equiv [2a - \sqrt{(a - x_1)^2 + (a + x_1)^2}] \wedge_0 [2b - \sqrt{(b - x_2)^2 + (b + x_2)^2}] \equiv \\ &\equiv 2a + 2b - \sqrt{(a - x_1)^2 + (a + x_1)^2} - \sqrt{(b - x_2)^2 + (b + x_2)^2} - \\ &- \sqrt{(2a - \sqrt{(a - x_1)^2 + (a + x_1)^2})^2 + (2b - \sqrt{(b - x_2)^2 + (b + x_2)^2})^2} = 0. \quad (2.131)\end{aligned}$$

Впрочем, вместо уравнения (2.131) можно было бы получить другие уравнения, по-инному расставляя в нем скобки. Например,  $\omega \equiv \{(a - x_1) \wedge_0 [(a + x_1) \wedge_0 (b - x_2)]\} \wedge_0 (b + x_2)$  и т. п. В итоге в силу неассоциативности  $x_1 \wedge_0$

$\Lambda_0 x_2$  были бы получены другие уравнения прямоугольника. Уравнения другого вида можно получить, применяя другие  $R$ -операции:  $x_1 \wedge_\alpha x_2, x_1 \wedge_\beta x_2, \dots$

*Замечание 1.* Вопрос о том, какому из уравнений прямоугольника отдать предпочтение, зависит от конкретной ситуации, в которой оно будет использовано. Сейчас отдадим предпочтение уравнению (2.129) как самому простому. В некоторых случаях, как будет видно, более выгодным оказывается использование не самых простых уравнений чертежей, а таких, которые обладают некоторыми дополнительными свойствами.

*Замечание 2.* Посмотрим, к чему приведет естественное желание избавиться от радикала в уравнении (2.129). Поступая подобно тому, как это обычно делается в курсах аналитической геометрии при выводе уравнений эллипса и гиперболы, перенесем квадратный корень из левой части формулы (2.129) в правую и возведем обе части уравнения в квадрат. После очевидных сокращений получаем

$$(a^2 - x_1^2)(b^2 - x_2^2) = 0. \quad (2.132)$$

Нетрудно убедиться, что уравнению (2.132) удовлетворяют не только точки рассматриваемого прямоугольника, но и точки, принадлежащие продолжениям его сторон, т. е. (2.132) есть уравнение двух пар параллельных прямых.

Обратим внимание также на частный случай уравнения (2.129), когда прямоугольник  $ABCD$  вырождается в отрезок  $[-a, a]$  оси  $Ox_1$ , (рис. 43, б). Полагая в (2.129)  $b = 0$ , получаем уравнение этого отрезка в виде

$$a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \sqrt{(a^2 - x_1^2)^2 + x_2^4} = 0. \quad (2.133)$$

*Замечание 3.* Представляет определенный интерес вид семейства  $\omega(x) = C = \text{const}$  линий (поверхностей, гиперповерхностей), которое при  $C = 0$  включает данный чертеж  $\omega(x) = 0$ . Покажем, что уравнения вида  $F(x) = C$ , соответствующие (2.129) и (2.131), определяют семейства выпуклых линий (рис. 43, в).

Для доказательства используем теорему 8 и первое из неравенств (2.87) § 6. Дифференцируя  $\sigma_i(x)$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) в (2.127), (2.128) дважды по произвольному направлению  $l$ , получаем

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial l^2} = -2 \cos^2(x_1, l) \leq 0; \quad \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial l^2} = -2 \cos^2(x_2, l);$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial l^2} = 0 \quad (i = 3, \dots, 6).$$

Тогда согласно (2.85)

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial l^2} = \frac{\partial^2}{\partial l^2} [(a^2 - x_1^2) \wedge_0 (b^2 - x_2^2)] \leq 0; \quad (2.134)$$

$$\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial l^2} = \frac{\partial^2}{\partial l^2} \{[(a - x_1) \wedge_0 (a + x_1)] \wedge_0 [(b - x_2) \wedge_0 (b + x_2)]\} \leq 0.$$

Из этих неравенств следует, что поверхности  $z \equiv \omega_1(x_1, x_2)$  и  $z \equiv \omega_2(x_1, x_2)$  выпуклые, а поэтому выпуклые и семейства линий  $\omega_1 = C$  и  $\omega_2 = C$  (см. теоремы 1 § 15).



Отметим также, что рассмотренные выше семейства линий, включающие при  $C = 0$  данный прямоугольник, останутся выпуклыми, если вместо  $R$ -конъюнкции  $x_1 \wedge_0 x_2$  взять  $x_1 \wedge_\alpha x_2$  ( $\alpha \equiv \text{const}$ ),  $x_1 \wedge_p x_2$  ( $p \geq 2$ ),  $x_1 \wedge_n x_2$  или любую другую  $R$ -конъюнкцию, удовлетворяющую условиям теоремы 8 § 6.

**Пример 2.** Напишем уравнение границы области  $\Omega$  (рис. 44), заданной системой неравенств,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\equiv x_1 + x_2 - 1 \geq 0; & \sigma_2 &\equiv -2x_1 + x_2 + 3 \geq 0; \\ \sigma_3 &\equiv -x_2 + 3 \geq 0; & \sigma_4 &\equiv x_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Воспользуемся  $m$ -местной  $R$ -конъюнкцией (2.44) § 4, полагая для простоты  $m = 0$ . В итоге получаем

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 1 - |x_1 + x_2 - 1| - 2x_1 + \\ + x_2 + 3 - |-2x_1 + x_2 + 3| + \\ + 3 - x_2 - |3 - x_2| + x_1 - |x_1| + \\ + (x_1 + x_2 - 1 + |x_1 + x_2 - \\ - 1|)(-2x_1 + x_2 + 3 + |-2x_1 + \\ + x_2 + 3|)(-x_2 + 3 + |-x_2 + \\ + 3|)(x_1 + |x_1|) = 0. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Для сравнения напишем уравнение этой же линии, применив  $R$ -конъюнкцию  $x_1 \wedge_1 x_2$  (2.39):

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 5 - |x_1 + x_2 - 3| - \\ - |5x_1 - 3x_2 - 3 - |x_1 + x_2 - 3|| - \\ - |13 - 7x_1 - 3x_2 - |x_1 + x_2 - 3|| - \\ - |5x_1 - 3x_2 - 3 - |x_1 + \\ + x_2 - 3|| = 0. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Обратим внимание на то, что уравнения (2.136) и (2.137) лишь непрерывны, а производные их левых частей имеют линии разрыва. Принадлежность уравнения к  $C^k(\mathbb{R}^2)$  можно обеспечить, взяв, например, в формуле (2.44)  $m = k$  или заменив  $R$ -конъюнкцию  $x_1 \wedge_1 x_2$   $R$ -конъюнкцией  $x_1 \wedge_0^m x_2$  (2.40). Заметим, что в этом случае соответствующие функции  $\omega(x_1, x_2)$  уже не будут выпуклыми. Это следует хотя бы из того, что в вершинах углов при  $m \geq 0$  град  $\omega = 0$ .

**Пример 3.** Написать дважды непрерывно-дифференцируемое уравнение поверхности прямоугольного параллелепипеда  $\Omega$ , определяемого неравенствами  $\Sigma_i = (a_i^2 - x_i^2 \geq 0)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Очевидно, что  $\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2 \wedge \Sigma_3$  есть трехзначный предикат из  $\mathcal{S}_3^1$ , соответствующий области  $\Omega$ . Соответствующее уравнение границы  $\partial\Omega$  можем написать в виде

$$\omega_1 \equiv [(a_1^2 - x_1^2) \wedge_0^2 (a_2^2 - x_2^2)] \wedge_0^2 (a_3^2 - x_3^2) = 0, \quad (2.138)$$

где  $x_1 \wedge_0^2 x_2 \equiv (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})(x_1^2 + x_2^2)$ . Поскольку операция  $\wedge_0^2$  не ассоциативна, наряду с (2.138) можем написать также уравнения

$$\begin{aligned} \omega_2 &\equiv [(a_3^2 - x_3^2) \wedge_0^2 (a_1^2 - x_1^2)] \wedge_0^2 (a_2^2 - x_2^2) = 0; \\ \omega_3 &\equiv [(a_2^2 - x_2^2) \wedge_0^2 (a_3^2 - x_3^2)] \wedge_0^2 (a_1^2 - x_1^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.139)$$

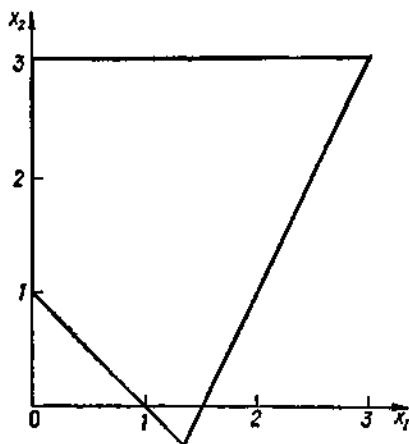


Рис. 44.

Легко убедиться в том, что  $\omega_i \neq \omega_j$  ( $i \neq j$ ), даже если  $a = b = c$ . Если же из каких-либо соображений необходимо, чтобы уравнение поверхности параллелепипеда было «симметричным» относительно своих компонент, можно взять его в виде

$$\omega(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x) + \omega_3(x) = 0. \quad (2.140)$$

Так, для поверхности куба со стороной  $2a$  можем написать уравнение

$$\begin{aligned} \omega(x, x_2, x_3) \equiv & [(a^2 - x_1^2) \wedge_0^2 (a^2 - x_2^2)] \wedge_0^2 (a^2 - x_3^2) + \\ & + [(a^2 - x_3^2) \wedge_0^2 (a^2 - x_1^2)] \wedge_0^2 (a^2 - x_2^2) + \\ & + [(a^2 - x_2^2) \wedge_0^2 (a^2 - x_3^2)] \wedge_0^2 (a^2 - x_1^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.141)$$

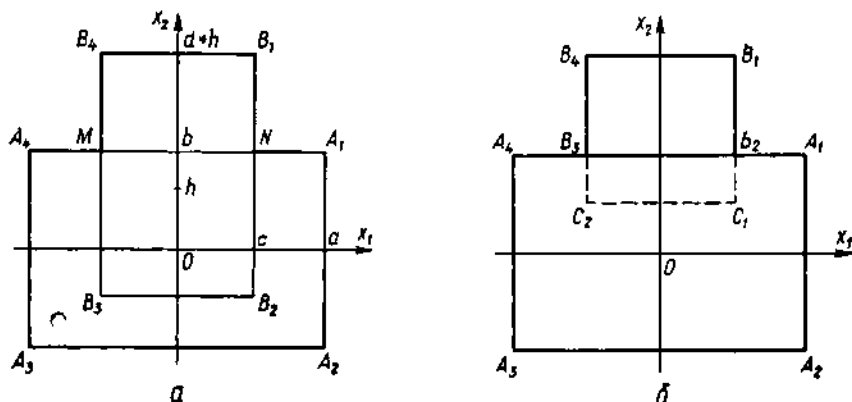


Рис. 45.

Чтобы уравнение поверхности параллелепипеда обладало требуемой симметрией, можно было бы воспользоваться одной из ассоциативных  $R$ -конъюнкций, однако те из них, которые нам известны, не обладают требуемым свойством двукратной дифференцируемости. Можно также получить уравнение поверхности параллелепипеда, используя множественную  $R$ -конъюнкцию (2.44).

**Пример 4.** Рассмотрим область  $\Omega$ , представляющую собой соединение прямоугольников  $\Omega_1 = A_1A_2A_3A_4$  и  $\Omega_2 = B_1B_2B_3B_4$  (рис. 45, а). Пусть первый прямоугольник симметричен относительно осей координат и имеет стороны  $2a$  и  $2b$ , центр прямоугольника  $B_1B_2B_3B_4$  — точка  $(0, h)$ , стороны, параллельные оси  $Ox_1$ , равны  $2c$ , а параллельные  $Ox_2$  —  $2d$ .

Как и в примере 1, каждый из названных прямоугольников можем задать соответствующим неравенством:

$$\Omega_1 = \{\omega_1 \equiv [(a^2 - x_1^2) \wedge_0 (b^2 - x_2^2)] \geq 0\};$$

$$\Omega_2 = \{\omega_2 \equiv [(c^2 - x_1^2) \wedge_0 [d^2 - (x_2 - h)^2]] \geq 0\}.$$

Тогда область  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  может быть задана неравенством

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\omega(x_1, x_2) \equiv \omega_1 \vee_0 \omega_2 \equiv \\ &\equiv [(a^2 - x_1^2) \wedge_0 (b^2 - x_2^2)] \vee_0 [(c^2 - x_1^2) \wedge_0 [d^2 - (x_2 - h)^2]] \geq 0\}. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Уравнение границы  $\partial\Omega = A_1A_2A_3A_4MB_4B_1NA_1$  (см. рис. 45, а) области  $\Omega$  получаем в виде

$$[(a^2 - x_1^2) \wedge_0 (b^2 - x_2^2)] \vee_0 [(c^2 - x_1^2) \wedge_0 [d^2 - (x_2 - h)^2]] = 0. \quad (2.143)$$

Исключение составляет случай, когда  $h = b + d$ ; при этом (2.143) является уравнением чертежа, который кроме границы  $\partial\Omega$  рассматриваемой области (рис. 45, б) включает также отрезок  $B_3B_2$ . Уравнение границы  $\partial\Omega$  в этом случае можно получить, взяв в качестве второго прямоугольника не  $B_1B_2B_3B_4$ , а  $C_1C_2B_4B_1$ , который накладывается на первый прямоугольник внахлестку. Возможность возникновения подобных ситуаций особенно необходимо предусматривать тогда, когда геометрические параметры чертежа заданы в буквенном виде, а построенное уравнение может использоваться многократно при различных сочетаниях их значений.

Пример 5. Напишем уравнение границы области  $\Omega$  (рис. 46, а). Область  $\Omega$  можно рассматривать как соединение прямоугольников  $\Omega_1 (A_1A_2A_3O)$  и  $\Omega_2 (B_1B_2B_3B_4)$ . Нетрудно видеть, что уравнение  $\omega_1 \vee^* \omega_2 = 0$  ( $\vee^*$  — та или

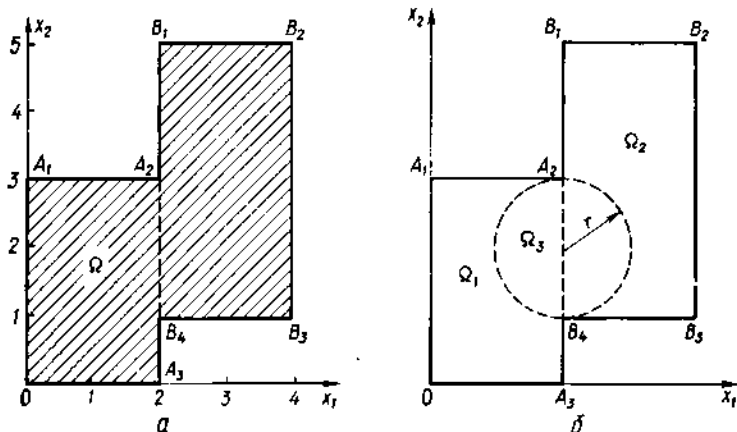


Рис. 46.

ная  $R$ -дизъюнкция) не является уравнением границы  $\partial\Omega = A_1A_2B_1B_2B_3B_4A_3OA_1$ , так как  $\omega = 0$  и в точках отрезка  $A_2B_4$ . Следовательно, в данном примере двух опорных прямоугольников  $\omega_1 \geq 0$  и  $\omega_2 \geq 0$  недостаточно для того, чтобы написать уравнение границы области  $\Omega$ . Выйти из этого положения можно, добавив к прямоугольникам  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  некоторую область  $\Omega_3 \subset \Omega$ , покрывающую отрезок  $A_2B_4$ . Можно, например, в качестве такой области взять круг (рис. 46, б), определяемый неравенством

$$\omega_3 \equiv 1 - (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 2)^2 \geq 0. \quad (2.144)$$

Напишем, следуя формуле (2.129), неравенства, определяющие прямоугольники  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ :

$$\omega_1 \equiv [1 - (x_1 - 1)^2] \wedge_0 [2,25 - (x_2 - 1,5)^2] \geq 0;$$

$$\omega_2 \equiv [1 - (x_1 - 3)^2] \wedge_0 [4 - (x_2 - 3)^2] \geq 0.$$

Тогда, учитывая, что  $\Omega_1 = (\Omega_1 \cup \Omega_2) \cup \Omega_3$ , для границы  $\partial\Omega$  получаем уравнение

$$\omega \equiv (\omega_1 \vee_0 \omega_2) \vee_0 \omega_3 \equiv \{([1 - (x_1 - 1)^2] \wedge [2,25 - (x_2 - 1,5)^2]) \vee_0 \vee_0 [1 - (x_1 - 3)^2] \wedge_0 [4 - (x_2 - 3)^2]\} \vee_0 [1 - (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 2)^2] = 0. \quad (2.145)$$

В примере 5 рассматриваемая область  $\Omega$  может быть представлена как соединение двух известных областей — прямоугольников  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Однако для построения уравнения ее границы пришлось ввести и третью область  $\Omega_3$  и рассматривать  $\Omega$  как соединение областей  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$ . Естественно, что с усложнением формы рассматриваемых областей вероятность появления подобных ситуаций возрастает.

Выявление таких ситуаций, особенно когда речь идет о распознавании их с помощью формальных алгоритмов, представляет собой, вообще, непростую задачу [111, 177]. Показателен в этом отношении следующий пример.

**Пример 6.** Написать уравнение границы области  $\Omega$  (рис. 47, а). Граница  $\partial\Omega$  в данном случае состоит из двух отрезков  $AB$  и  $ED$  прямых и двух дуг  $BCD$  и  $EFA$  окружностей. Исходя из формы области  $\Omega$ , в качестве опорных возьмем области:

$\Sigma_1 = (r^2 - x_2^2 \geq 0)$  (горизонтальная полоса, ограниченная прямыми  $x_2 = \pm r$ );

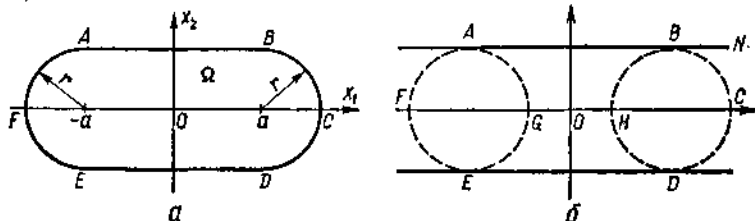


Рис. 47.

$\Sigma_2 = [r^2 - (x_1 - a)^2 - x_2^2 \geq 0]$  (круг радиуса  $r$  с центром  $(a, 0)$ );

$\Sigma_3 = [r^2 - (x_1 + a)^2 - x_2^2 \geq 0]$  (круг радиуса  $r$  с центром  $(-a, 0)$ ). Нетрудно, однако, заметить, что не существует такой функции алгебры логики  $F \in \mathfrak{F}(B_3^1)$ , чтобы  $\Omega = F(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ . Это следует, например, из того, что точки  $O$  и  $N$  (рис. 47, б) находятся в одинаковых состояниях принадлежности к областям  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_3$ , а именно в этих точках  $\Sigma_1 = 2$ ;  $\Sigma_2 = \Sigma_3 = 0$ . Между тем в точке  $O$   $\Omega = 2$ , а в точке  $N$   $\Omega = 0$ . Таким образом, необходимо ввести еще какую-то опорную область, которая отделила бы точку  $O$  (и все другие точки, находящиеся в той же конституентной области  $ABHDEGA$ ) от остальных точек полосы  $\Sigma_1$ , не принадлежащих  $\Omega$ . Очевидно, что проще всего это можно сделать, взяв в качестве дополнительной опорной области вертикальную полосу, ограниченную прямыми  $x_1 = \pm a$ :

$$\Sigma_4 = (a^2 - x_1^2 \geq 0).$$

Для области  $\Omega$  можно написать формулу

$$\Omega = (\Sigma_1 \wedge \Sigma_4) \vee (\Sigma_2 \vee \Sigma_3) \quad (2.146)$$

и получить уравнение границы  $\partial\Omega$  в виде

$$\omega \equiv [(r^2 - x_2^2) \wedge_0 (a^2 - x_1^2)] \vee_0 \{ [r^2 - (x_1 - a)^2 - x_2^2] \vee_0 \vee_0 [r^2 - (x_1 + a)^2 - x_2^2] \} = 0. \quad (2.147)$$

**Пример 7.** Напишем уравнение границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  (рис. 48, а заштрихованной). Возьмем в качестве опорных областей

$$\Sigma_1 = [R^2 - (x_1 - a)^2 - x_2^2 \geq 0]; \quad \Sigma_2 = [R^2 - (x_1 + a)^2 - x_2^2 \geq 0];$$

$$\Sigma_3 = (x_2 - h \geq 0).$$

Исходя из рис. 48, а логическую формулу для  $\Omega$  можем выбрать в виде  $\Omega = \Sigma_1 \vee \Sigma_2 \vee \Sigma_3$  и соответствующее уравнение  $\partial\Omega$  написать в виде

$$\omega \equiv \{ [R^2 - (x_1 - a)^2 - x_2^2] \vee_0 [R^2 - (x_1 + a)^2 - x_2^2] \} \vee_0 (x_2 - h) = 0. \quad (2.148)$$

Нетрудно, однако, заметить, что (2.148) будет уравнением  $\partial\Omega$  только при условии, что  $h < \sqrt{R^2 - a^2}$ . Если  $h = \sqrt{R^2 - a^2}$  (рис. 48, б), то уравнению (2.148), кроме точек границы  $\partial\Omega$ , будут удовлетворять также координаты точки  $A$ , а при  $h > \sqrt{R^2 - a^2}$  из области  $\Omega$  выпадет криволинейный треугольник  $ABC$  (рис. 48, в). Если все же необходимо, чтобы уравнение определяло линию  $MNPQS$  во всех случаях при  $h < R$ , можно взять дополнительную опорную область

$$\Sigma_1 = \left( x_2 - \frac{h}{a^2} x_1^2 \geq 0 \right),$$

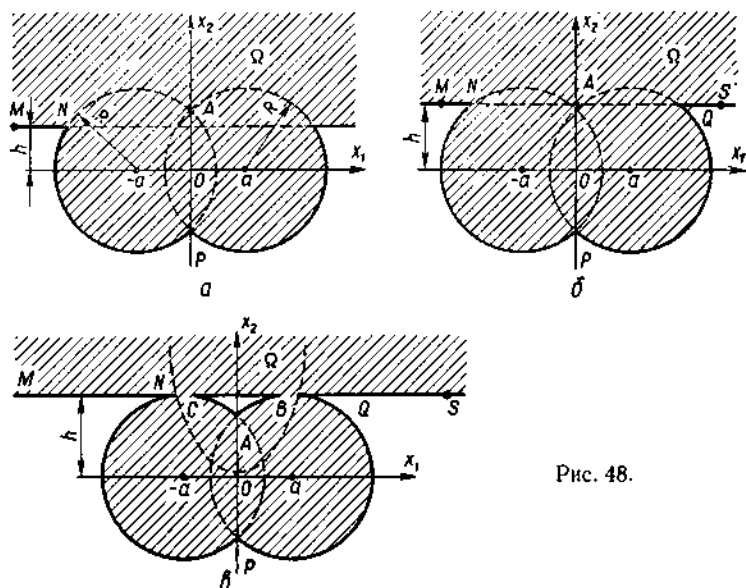


Рис. 48.

расположенную выше параболы  $x_2 = \frac{h}{a^2} x_1^2$ . Тогда  $\Omega = \Sigma_1 \vee \Sigma_2 \vee \Sigma_3 \vee \Omega_1$  и соответствующее уравнение  $\partial\Omega$  можно написать в виде

$$\omega \equiv \left[ [R^2 - (x_1 - a)^2 - x_2^2] \vee_0 [R^2 - (x_1 + a)^2 - x_2^2] \vee_0 \vee_0 \left[ (x_2 - h) \vee_0 \left( x_2 - \frac{h}{a^2} x_1^2 \right) \right] \right] = 0. \quad (2.149)$$

Говоря о технологии применения метода  $R$ -функций при написании уравнений границ областей, необходимо отметить и некоторые другие возможные ситуации, в которых могут быть допущены ошибки. Особенно это касается предельных ситуаций. Пример такого рода приведен ниже.

**Пример 8.** Построим уравнение контура области, заштрихованной на рис. 49. В качестве опорных возьмем области:

$\Sigma_1 = \{\sigma_1 \equiv x_2 - kx_1 \geq 0\}$  (полуплоскость, расположенная выше прямой  $x_2 = kx_1$ );

$\Sigma_2 = \{\sigma_2 \equiv x_2 + kx_1 \geq 0\}$  (полуплоскость, расположенная выше прямой  $x_2 = -kx_1$ );

$\Sigma_3 = \{\sigma_3 \equiv r^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0\}$  (круг радиуса  $r$  с центром в начале координат);

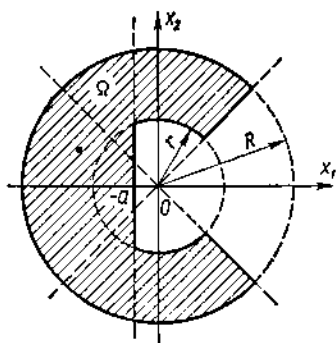


Рис. 49.

$\Sigma_4 = [\sigma_4 \equiv R^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0]$  (круг радиуса  $R$  с центром в начале координат);

$\Sigma_5 = [\sigma_5 \equiv a + x_1 \geq 0]$  (полуплоскость, расположенная правее прямой  $x_1 = -a$ ).

Рассматриваемая область может быть задана одной из следующих логических формул:

$$\Omega = [(\Sigma_4 \wedge \bar{\Sigma}_3) \vee (\Sigma_4 \wedge \bar{\Sigma}_5)] \wedge (\Sigma_1 \vee \bar{\Sigma}_2); \quad (2.150)$$

$$\Omega = [(\Sigma_4 \wedge \bar{\Sigma}_3) \wedge (\Sigma_1 \vee \bar{\Sigma}_2)] \vee (\Sigma_4 \wedge \bar{\Sigma}_5). \quad (2.151)$$

В итоге получаем два варианта уравнения контура  $\partial\Omega$ :

$$\omega_1 \equiv [(\sigma_4 \wedge_0 \bar{\sigma}_3) \vee_0 (\sigma_4 \wedge_0 \bar{\sigma}_5)] \wedge_0 (\sigma_1 \vee_0 \bar{\sigma}_2) = 0; \quad (2.152)$$

$$\omega_2 \equiv [(\sigma_4 \wedge_0 \bar{\sigma}_3) \wedge_0 (\sigma_1 \vee_0 \bar{\sigma}_2)] \vee_0 (\sigma_4 \wedge_0 \bar{\sigma}_5) = 0. \quad (2.153)$$

Несмотря на то что в построении  $\omega_1$  и  $\omega_2$  участвуют одни и те же опорные функции  $\sigma_1, \dots, \sigma_5$ , уравнения (2.152) и (2.153) существенно отличаются друг от друга. Дей-

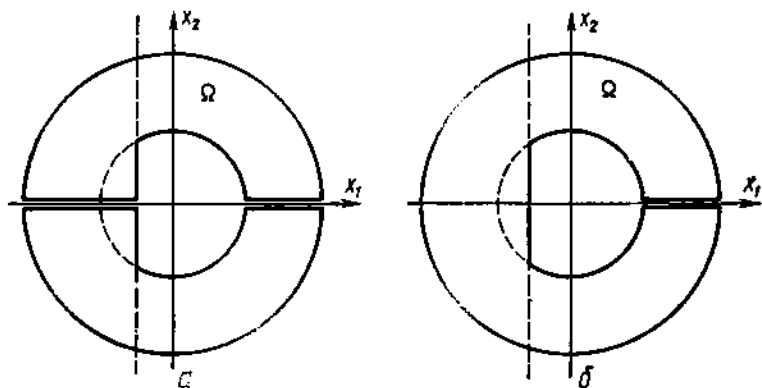


Рис. 50.

ствительно, при  $k = 0$  уравнения (2.152), (2.153) окажутся уравнениями различных чертежей (рис. 50, а и б соответственно). В заключение заметим, что уравнения (2.152) и (2.153) можно несколько упростить, если заметить, что в силу специфического расположения областей  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_4$  (а именно:  $\bar{\Sigma}_4 \wedge \Sigma_3 = \emptyset$ )  $S_3(\sigma_4 \wedge_0 \bar{\sigma}_3) \wedge_0 \bar{\sigma}_3 = S_3(\sigma_4 \bar{\sigma}_3)$ . Это позволяет в формулах (2.152) и (2.153) заменить  $\sigma_4 \wedge_0 \bar{\sigma}_3$  на  $\sigma_4 \bar{\sigma}_3$ .

**Упражнения и задачи.** 1. Написать уравнение  $\omega(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, x_1^3, x_2^3, x_1^4, x_2^4) = 0$  четырехугольника с вершинами в точках  $x_1^1, x_2^1, \dots, x_1^4, x_2^4$  (точки соединяются между собой в порядке их задания). Функция  $\omega \in C^m(\mathbb{R}^2)$  должна быть положительна внутри четырехугольника и отрицательна вне его.

2. Написать уравнение поверхности тела, изображенного на рис. 30.

## § 12. Уравнение произвольного чертежа. Алгоритмически полные системы функций

Покажем, что введенное в § 9 понятие алгоритмически полной системы средств аналитической геометрии тесно связано с введенным в § 4 понятием достаточно полной системы  $R$ -функций. Приведем также некоторые конструктивные формулы, с помощью которых можно осуществлять фактическое построение уравнений сложных чертежей. Пусть

$$H = \{x_1 + x_2; x_1 x_2; \varphi_i, i \in I; a \forall a \in \mathbb{R}\}, \quad (2.154)$$

где  $I$  — некоторое множество индексов, есть система функций, представляющая собой такое расширение систем  $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, a \forall a \in \mathbb{R}\}$ , что множество  $\mathfrak{M}(H)$   $H$ -реализуемых функций содержит некоторую достаточно полную систему  $R$ -функций из  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, S_3)$ . В частности, ввиду того что существуют достаточно полные системы элементарных  $R$ -функций, допустимо  $H = H_e$  (1.9).

В § 9 полу- $H$ -реализуемые чертежи были определены как объединения

$$L = \bigcup_{i=1}^{i=m} L_i, \quad (2.155)$$

$$L_i = \{x \in \mathbb{R}^n, \sigma_{ki}(x) \geq 0, \tau_{si}(x) = 0, \forall (k, s) \in I_1 \times I_2\}, \quad (2.156)$$

где  $\sigma_{ki}, \tau_{si} \in \mathfrak{M}(H)$ , а  $I_1, I_2$  — конечные (возможно, и пустые) множества индексов. Множество всех полу- $H$ -реализуемых чертежей было обозначено  $\mathfrak{M}_{1/2}(H)$ .

Чертежи  $L_i$ , определяемые конечными системами уравнений и неравенств (2.156), назовем *элементами* чертежа  $L$ .

Пусть  $\Sigma_{ki} = [\sigma_{ki}(x) \geq 0]$  — трехзначные характеристические функции соответствующих областей, а

$$\Sigma_i = \bigwedge_{k \in I_1} \Sigma_{ki}. \quad (2.157)$$

Тогда согласно формулам (2.157), (2.124) систему неравенств  $\{\sigma_{ki}(x) \geq 0\}$ ,  $k \in I_1$ , можно заменить одним неравенством

$$\sigma_i(x) \equiv \bigwedge_{k \in I_1} \sigma_k(x) \equiv (\dots (\sigma_{k_1 i}(x) \wedge \sigma_{k_2 i}(x)) \wedge \dots) \wedge \sigma_{k_m i}(x) \geq 0$$

$$\left( I_1 = \bigcup_{i=1}^m k_i \right), \quad (2.158)$$

где  $\wedge^{q_i}$  — символ какой-либо  $R$ -конъюнкции из  $\mathfrak{M}(H)$  (например,  $\wedge^{q_i} = \wedge_0, \wedge_0^m, \dots$ ).

Систему уравнений  $\tau_{si}(x) = 0, s \in I_2$ , также можно заменить одним неравенством

$$\tau_i(x) = - \sqrt{\sum_{s \in I_2} \tau_{si}^2(x)} \geq 0, \quad (2.159)$$

которое, очевидно, удовлетворяется тогда и только тогда, когда

$$x \in \bigcap_{s \in I_s} T_{st}, \quad T_{st} = \{\tau_{st}(x) = 0\}.$$

При этом если  $I_2 = \emptyset$ , то все слагаемые в (2.159) отсутствуют и  $\tau_i(x) \equiv 0$ . (Заметим, что в формуле (2.159) квадратный корень можно было бы и не писать. Он введен из соображений, касающихся нормализованности уравнений, о чем будет сказано далее.) Естественно, в этом случае добавляется условие, что  $\sqrt{x} (x \geq 0) \in \mathfrak{M}(H)$ . Таким образом, элемент  $L_1$  определяется двумя неравенствами  $\sigma_i(x) \geq 0$  и  $\tau_i(x) \geq 0$ , которые с помощью какой-либо из  $R$ -конъюнкций  $\wedge^*$  можно свернуть в одно:

$$l_i(x) \equiv \sigma_i(x) \wedge^* \tau_i(x) \geq 0. \quad (2.160)$$

Согласно (2.159) строгое неравенство  $\tau_i(x) > 0$  не выполняется ни в одной точке  $\mathbb{R}^n$ . Учитывая, что  $\sigma_i(x) \wedge^* \tau_i(x) > 0$  тогда и только тогда, когда  $\sigma_i > 0$  и  $\tau_i > 0$ , приходим к выводу о том, что в неравенстве (2.160) можно заменить знак  $\geq$  знаком  $=$ . В результате получаем уравнение элемента  $L_i$

$$l_i(x) \equiv \sigma_i(x) \wedge^* \tau_i(x) = 0. \quad (2.161)$$

При этом  $l_i(x) \leq 0$  вне  $L_i$ . Применяя к (2.161) операцию  $R$ -отрицания и формулу  $x_1 \wedge^* x_2 \equiv \overline{x_1} \vee^* \overline{x_2}$  (правило де Моргана), получаем

$$\omega_i \equiv \left( \sum_{s \in I_s} \tau_{st}^2(x) \right)^{1/2} \vee^* \overline{\sigma_i(x)} = 0, \quad (2.162)$$

где  $\vee^*$  — символ какой-либо  $R$ -дизъюнкции из  $\mathfrak{M}(H)$ . Отметим также уравнение

$$\omega_i \equiv \sqrt{\left( \sum_{s \in I_s} \tau_{st}^2(x) \right)^{1/2} \vee^* \overline{\sigma_i(x)}} = 0, \quad (2.163)$$

получаемое из уравнения (2.162) в результате извлечения из его неотрицательной левой части квадратного корня. Уравнение (2.163) обладает некоторыми выгодными свойствами дифференциального характера, которые будут отмечены ниже.

Иногда удобно для выделения областью ( $\sigma \geq 0$ ) элемента ( $\omega, = 0$ ) данного чертежа ( $\tau = 0$ ) использовать уравнения [126]

$$\omega_i = \sqrt{\tau^2(x) + \sigma^2(x)} - \sigma(x) = 0; \quad (2.164)$$

$$\omega_i = [\sqrt{\tau^2(x) + \sigma^2(x)} - \sigma(x)] [\tau^2(x) + \sigma^2(x)]^{m/2} = 0. \quad (2.165)$$

Выражение  $[\tau^2(x) + \sigma^2(x)]^{m/2}$  во втором уравнении повышает гладкость функции  $\omega_i$  в точках, где  $\tau$  и  $\sigma$  равны нулю одновременно.

Располагая уравнениями  $\omega_i(x) = 0$ ,  $\omega_i \in \mathfrak{M}(H)$ , элементов  $L$  полу- $H$ -реализуемого чертежа  $L$  и учитывая, что  $\omega_i(x) > 0$  вне  $L$ , уравнение всего чертежа  $L$  можно представить в виде

$$\omega(x) \equiv \bigwedge_{i=1}^{i=m} \omega_i(x) = 0. \quad (2.166)$$



Можно использовать также более простую формулу

$$\omega(x) \equiv \prod_{i=1}^{i=m} \omega_i(x) = 0. \quad (2.167)$$

Далее будет видно, что в некоторых случаях формула (2.166), несмотря на то что она с вычислительной точки зрения весьма громоздка, более предпочтительна.

Таким образом, если базисная система  $H$  (2.154) такова, что  $\mathfrak{M}(H)$  содержит какую-нибудь из достаточно полных систем  $R$ -функций, то всякий полу- $H$ -реализуемый чертеж является  $H$ -реализуемым.

Пусть  $T$  — группа преобразований-биекций вида  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  таких, что  $f^{-1}(x) \in \mathfrak{M}(H)$ . Тогда уравнение

$$\omega_1(x) \equiv \omega[f^{-1}(x)] = 0,$$

очевидно, уравнение образа  $L_1 = f(L)$  чертежа  $L = (\omega(x) = 0)$  при преобразовании  $f$  и при этом  $\omega_1 \in \mathfrak{M}(H)$ . Таким образом, если  $P \{ \mathfrak{M}_{1/2}(H), T \}$  — множество образов полу- $H$ -реализуемых чертежей, соответствующих преобразованиям из  $T$ , то для всякого  $L_1 \in P \{ \mathfrak{M}_{1/2}(H), T \}$  можно написать  $H$ -реализуемое уравнение  $\omega_1(x) = 0$ . Следовательно,  $P \{ \mathfrak{M}_{1/2}(H), T \} = \mathfrak{R}(H)$ . Таким образом, в соответствии с определением алгоритмически полной системы (см. § 9) приходим к следующей теореме.

**Теорема 1.** Если система  $H$  (2.154) такова, что множество  $H$ -реализуемых чертежей содержит какую-либо из достаточно полных систем  $R$ -функций (это означает, что  $\mathfrak{M}(H)$  имеет непустое пересечение с каждой ветвью множества  $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, S_3)$ ), то она алгоритмически полная. Если, кроме того,  $T$  есть множество биекций вида  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $f^{-1} \in \mathfrak{M}(H)$ , то система  $H$  является алгоритмически полной и относительно преобразований  $T$ .

**Следствие.** Базисная система  $H_e$  (1.9), состоящая из арифметических операций, основных элементарных функций и констант, алгоритмически полная. Это обусловлено существованием элементарных достаточно полных систем  $R$ -функций.

**Замечание 1.** Элементы  $L_i \in \mathfrak{M}_{1/2}(H)$  могут иметь любую размерность от 0 до  $n$ . Так, если  $I_2 = \emptyset$  и, следовательно,  $\tau_i(x) \equiv 0$ , а  $\sigma_i(x) \equiv \sigma(x)$ , то из формулы (2.161) получаем уравнение области  $\Sigma = \{\sigma(x) \geq 0\}$ :

$$l_i(x) \equiv 0 \wedge^* \sigma_i(x) = 0. \quad (2.168)$$

В частности, если  $\wedge^* = \wedge_0^m$ , уравнение (2.168) имеет вид

$$l_i(x) \equiv [\sigma(x) - |\sigma(x)|][\sigma(x)]^m = 0. \quad (2.169)$$

(Заметим, что при этом  $l_i(x) \in C^m(\mathbb{R}^n)$ .)

Уравнение элемента гиперповерхности (размерность  $n - 1$ )  $f = 0$ , выделяемого областью  $\varphi \geq 0$ , согласно (2.163) можно написать в

виде

$$\omega \equiv \sqrt{f^2 \vee^* \bar{\varphi}} = 0. \quad (2.170)$$

Формула (2.170) неоднократно будет использоваться далее при построении структур решений краевых задач.

*Замечание 2.* Если  $\sigma_{kl}, \tau_{st} \in \mathfrak{M}(H_0)$ , т. е. если  $L$  — полуалгебраический чертеж, то, использовав  $R$ -операции  $x_1 \bigwedge_C^m x_2, x_1 \bigvee_C^m x_2$  (2.42), получим кусочно-полиномиальное класса  $C^m(\mathbb{R}^n)$  уравнение (сплайн-уравнение)  $\omega(x) = 0$  чертежа  $L$ . При этом граница раздела областей полиномиальности функции  $\omega(x)$  будет формироваться автоматически в процессе построения  $\omega(x)$ . С прикладной точки зрения представляет интерес создание алгоритмов, по которым можно было бы находить «зоны полиномиальности» функции  $\omega(x)$ .

### § 13. Примеры построения уравнений элементарных чертежей

В предыдущем параграфе показано, что всякий полуэлементарный чертеж (т. е. чертеж, состоящий из конечного числа «кусков» элементарных чертежей) является в то же время и элементарным и, следовательно, для него можно написать уравнение вида  $\omega(x) = 0$ , где  $\omega(x)$  — элементарная функция. Рассмотрим методику построения уравнений чертежей на следующих примерах.

**Пример 1.** Напишем уравнение чертежа  $L$  (рис. 51), состоящего из двух полуокружностей  $ABC$  и  $OEC$  и отрезка  $OC$ . В качестве опорных возьмем области  $\Sigma_1 \equiv (\sigma_1 \equiv R^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0)$  (круг радиуса  $R$  с центром в начале координат);

$\Sigma_2 \equiv (\sigma_2 \equiv R^2/4 - (x_1 - R/2)^2 - x_2^2 \geq 0)$  (круг радиуса  $R/2$  с центром в точке  $(R/2, 0)$ );

$\Sigma_3 \equiv (\sigma_3 \equiv x_2 \geq 0)$  (верхняя полуплоскость).

Очевидно, что  $\sigma^* \equiv \sigma_1 \wedge_0 \bar{\sigma}_2 = 0$  есть уравнение двух соприкасающихся окружностей  $ABCD$  и  $OECF$ . Применяя формулу (2.162), уравнение соединения двух полуокружностей  $ABC$  и  $OEC$  можем написать в виде

$$l_1 \equiv \sigma^{* \vee} \vee_0 \bar{\sigma}_3 \equiv (\sigma_1 \wedge_0 \bar{\sigma}_2)^{\vee} \vee_0 \bar{\sigma}_3 = 0. \quad (2.171)$$

По той же формуле получаем уравнение отрезка  $OC$ :

$$l_2 \equiv \sigma_3^{\vee} \vee_0 \bar{\sigma}_2 = 0. \quad (2.172)$$

При этом  $l_1$  и  $l_2$  — неотрицательные функции, равные нулю только в точках соответствующих им чертежей. Согласно формуле (2.161) уравнение чертежа  $L$  можем написать в виде

$$\omega \equiv l_1 \wedge_0 l_2 \equiv [(\sigma_1 \wedge_0 \bar{\sigma}_2)^{\vee} \vee_0 \bar{\sigma}_3] \wedge_0 (\sigma_3^{\vee} \vee_0 \bar{\sigma}_2) = 0,$$

или

$$\omega \equiv \left\{ \left[ (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \wedge_0 \left[ -\frac{R^2}{4} + \left( x_1 - \frac{R}{2} \right)^2 + x_2^2 \right] \right]^{\vee} \vee_0 (-x_2) \right\} \wedge_0 \left\{ x_2^{\vee} \vee_0 \left[ -\frac{R^2}{4} + \left( x_1 - \frac{R}{2} \right)^2 + x_2^2 \right] \right\} = 0.$$

**Пример 2.** Напишем уравнение поверхности (рис. 52), имеющей форму лейки (Нижняя грань параллелепипеда расположена в плоскости  $x_1 O x_2$ , ось  $O x_3$  является осью цилиндра.)

В качестве опорных выберем следующие области  $\{$

$\Sigma_1 = (\sigma_1 \equiv a^2 - x_1^2 \geq 0)$  (слой, параллельный плоскости  $x_2 O x_3$ , заключенный между плоскостями  $x_1 = \pm a$ );

$\Sigma_2 = (\sigma_2 \equiv b^2 - x_2^2 \geq 0)$  (слой, параллельный плоскости  $x_1 O x_3$ , заключенный между плоскостями  $x_2 = \pm b$ );

$\Sigma_3 = (\sigma_3 \equiv x_3 \geq 0)$  (верхнее полупространство);

$\Sigma_4 = \{\sigma_4 \equiv (c - x_3)(x_3 + d) \geq 0\}$  (слой, параллельный плоскости  $x_1 O x_2$ , заключенный между плоскостями  $x_3 = c$  и  $x_3 = -d$ );

$\Sigma_5 = (\sigma_5 \equiv r^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0)$  (бесконечный цилиндр радиуса  $r$  с осью  $O x_3$ ).

Очевидно, что предикат  $\Sigma_1 \wedge \Sigma_2$  определяет бесконечное цилиндрическое тело прямоугольного поперечного сечения. Предикату  $(\Sigma_1 \wedge \Sigma_2) \wedge \Sigma_3$  соответствует верхняя половина этого тела. Предикату  $(\Sigma_1 \wedge \Sigma_2) \wedge \Sigma_3 \vee \Sigma_5$  будет соответствовать соединение последнего тела с бес-

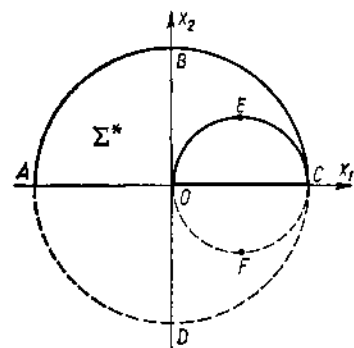


Рис. 51.

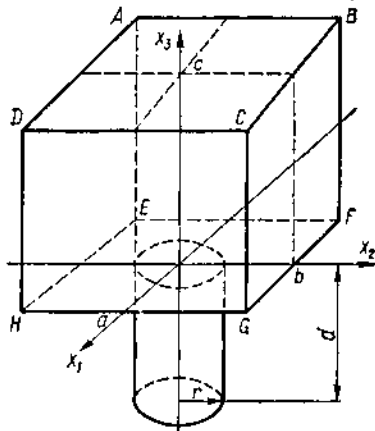


Рис. 52.

конечным цилиндром  $\Sigma_5$ . Следуя методике, описанной в § 10, уравнение поверхности этого тела можем написать в виде

$$\omega_1 \equiv \{(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \wedge \sigma_3\} \vee \sigma_5 = 0. \quad (2.173)$$

Интересующая нас поверхность определяется системой

$$\omega_1 = 0; \quad \sigma_4 \geq 0.$$

Согласно формуле (2.162) требуемое уравнение можно написать в виде

$$\omega \equiv \omega_1^2 \vee \sigma_4 \equiv \{[(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \wedge \sigma_3] \vee \sigma_5\}^2 \vee \sigma_4 = 0,$$

или

$$\omega \equiv \{[(a^2 - x_1^2) \wedge (b^2 - x_2^2)] \wedge \sigma_3\} \vee (r^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee \sigma_4 \vee (x_3 - c)(x_3 + d) = 0. \quad (2.174)$$

**Пример 3.** Пусть требуется написать дважды дифференцируемое уравнение чертежа, имеющего вид шахматной доски (рис. 53). Уравнение должно удовлетворяться в области всех зачерненных клеток, а также на контуре шахматной доски.

Примем ширину клетки равной единице. В качестве опорных выберем области:

$\Sigma_1 = (\sigma_1 \equiv \sin \pi x_1 \geq 0)$  (система вертикальных полос, заключенных между прямыми  $x_1 = 2k$  и  $x_1 = 2k + 1, k = 0, \pm 1, \dots$ );

$\Sigma_2 = (\sigma_2 \equiv \sin \pi x_2 \geq 0)$  (система горизонтальных полос, заключенных между прямыми  $x_2 = 2k$  и  $x_2 = 2k + 1, k = 0, \pm 1, \dots$ );

$\Sigma_3 = (\sigma_3 \equiv 16 - x_1^2 \geq 0)$  (вертикальная полоса, заключенная между прямыми  $x_1 = \pm 4$ );

$\Sigma_4 = (\sigma_4 \equiv 16 - x_2^2 \geq 0)$  (горизонтальная полоса, заключенная между прямыми  $x_2 = \pm 4$ ).

Интересующая нас область может быть задана предикатным неравенством

$$\Omega = [(\bar{\Sigma}_1 \wedge \Sigma_2) \vee (\Sigma_1 \wedge \bar{\Sigma}_2)] \wedge (\Sigma_3 \wedge \Sigma_4) \geq 1. \quad (2.175)$$

Так как  $(\bar{\Sigma}_1 \wedge \Sigma_2) \vee (\Sigma_1 \wedge \bar{\Sigma}_2) = \Sigma_1 \approx \Sigma_2$ , неравенство (2.175) можно заменить неравенством

$$\Omega = (\Sigma_1 \approx \Sigma_2) \wedge (\Sigma_3 \wedge \Sigma_4) \geq 0. \quad (2.176)$$

Используя систему  $R$ -операций (2.40) (при  $m = 2$ ), получаем неравенство

$$\sigma(x_1, x_2) \equiv (-\sin \pi x_1 \sin \pi x_2) \wedge_0^2 [(16 - x_1^2) \wedge_0^2 (16 - x_2^2)] \geq 0,$$

которое определяет рассматриваемый чертеж. Применяя затем (2.169), получаем требуемое уравнение в виде

$$\omega(x_1, x_2) \equiv \{(-\sin \pi x_1 \sin \pi x_2) \wedge_0^2 [(16 - x_1^2) \wedge_0^2 (16 - x_2^2)] - |(-\sin \pi x_1 \sin \pi x_2) \wedge_0^2 [(16 - x_1^2) \wedge_0^2 (16 - x_2^2)]| \} \times \{(-\sin \pi x_1 \sin \pi x_2) \wedge_0^2 [(16 - x_1^2) \wedge_0^2 (16 - x_2^2)]\}^2 = 0. \quad (2.177)$$

Другие примеры построения уравнений чертежей будут приведены далее по мере необходимости.

*Упражнения и задачи.* 1. Написать уравнения первых пяти букв алфавита.

2. Предложить простейший вариант уравнения поверхности Мёбиуса.

3. Чертеж  $L$ , определяемый уравнением  $\omega = 0$ , разрезан прямой  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 = 0$  на две части —  $L_1$  и  $L_2$ , которые затем отодвинуты по нормали к данной прямой на расстояния  $d_1$  и  $d_2$  соответственно. Написать уравнения полученных чертежей  $L_1$  и  $L_2$ .

4. Окружность радиуса  $e$  с центром в точке  $(a, b)$  выделяет некоторую часть  $L_e$  из данного чертежа  $L$  с известным уравнением  $\omega = 0$ . Затем окружность вместе с заключенной в ней частью  $L_e \subset L$  расширяется (при  $e > 1$  — сужается) и радиус ее становится равным единице. Центр окружности переносится в начало координат. Написать уравнение чертежа  $L_1$ , получаемого из  $L_e$  в результате описанной процедуры. Составить стандартную подпрограмму, решающую данную задачу.

5. Тело  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , определяемое неравенством  $\omega(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ , пересекается плоскостью  $L = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 = 0)$ . Затем плоскость  $L$  (вместе с «отпечатком»  $S$  на ней сечения тела  $\Omega$ ) вращается вокруг линии ее пересечения с плоскостью  $x_1 O x_2$  до совмещения с последней (если  $L \parallel x_1 O x_2$ , то  $L$  проектируется на  $x_1 O x_2$ ). Написать уравнение чертежа на плоскости  $x_1 O x_2$ , в который переходит «отпечаток»  $S$ . Составить стандартную программу решения данной задачи.

## § 14. Задача о построении уравнений чертежей и частичные функции алгебры логики

Пусть задана система областей  $\Sigma_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), определяемых неравенствами  $\sigma_i \geq 0$ ,  $\sigma_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $i = 1, \dots, m$ ). Предикатному уравнению (для простоты рассуждений — двузначному)

$$F[S_2(\sigma_1), \dots, S_2(\sigma_m)] = 1, \quad (2.178)$$

где  $S_2(t) = 1$  при  $t \geq 0$  и  $S_2(t) = 0$  при  $t < 0$ , в пространстве  $\mathbb{R}^n$  соответствует некоторая область  $\Omega$  (не обязательно замкнутая или открытая). Вполне может быть, что  $\Omega$  — пустое множество. При этом

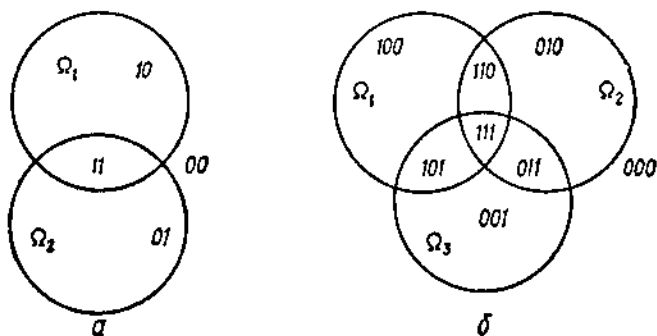


Рис. 54.

оказывается, что чем больше число опорных областей (предполагается, что они имеют не слишком сложную форму), тем, вообще, больше вероятность того, что наугад взятой булевой функции  $F$  согласно (2.178) будет соответствовать пустое множество. Поясним эту мысль на примере.

Пусть на плоскости  $x_1 O x_2$  каким-то образом расположены круги  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (рис. 54, а). Их границы могут разбить плоскость самое большее на четыре части (конституентные области). Каждой из этих областей можно поставить в соответствие определенный набор 00, 01, 10 или 11 в зависимости от принадлежности точек этих областей к кругам  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (см. рис. 54, а). Добавление к кругам  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  круга  $\Omega_3$  может привести к тому, что плоскость окажется разбитой на 8 областей (рис. 54, б), каждой из которых соответствует некоторый набор  $X_1 X_2 X_3$ , составленный из нулей и единиц. Таким образом, количество конституентных областей удвоилось. Однако если теперь добавить еще один круг, то при любом расположении четырех кругов на плоскости  $x_1 O x_2$  не удастся получить 16 конституентных областей, каждой из которых соответствует свой набор  $X_1 X_2 X_3 X_4$ ,  $X_i \in B_2 = \{0, 1\}$ . Если бы рассматриваемые опорные кривые были не кругами, то, возможно, и удалось бы получить 16 таких областей, но для кругов это невозможно. Можно подсчитать, что отношение этого количества к количеству максимально возможных конституентных областей, равному  $2^m$ , быстро стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ .

Это приводит к тому, что значения истинности булевой функции  $F(X_1, \dots, X_m)$  могут соответствовать наборам аргументов, которым не соответствует (посредством предикатного уравнения (2.178)) ни одна из упомянутых областей, с тем большей вероятностью, чем больше  $m$ . Приведенное выше рассуждение справедливо для опорных областей, являющихся кругами, но нетрудно видеть, что для получения  $2^m$  областей, даже при относительно небольшом количестве опорных областей (например, при  $m = 5$ ), пришлось бы выбирать области достаточно сложной формы. В то же время на практике при построении сложных геометрических объектов с помощью заданной системы опорных областей обычно не ставится цель получить максимально возможное количество областей, поэтому многие логически мыслимые варианты выпадают. Все это свидетельствует о том, что при достаточно большом количестве опорных областей количество наборов аргументов булевой функции  $F(X_1, \dots, X_m)$ , которым можно поставить в соответствие не пустое множество в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , существенно меньше общего количества  $2^m$  всех наборов. Очевидно, что если на наборах, которым соответствует пустое множество, произвольным образом изменять значение функции  $F$  и, таким образом, получать новые функции, то при замене этими функциями функции  $F$  в предикатном уравнении (2.178) соответствующий этому уравнению геометрический объект не изменится. Другими словами, функция  $F$  может считаться не заданной на таких наборах, т. е. быть так называемой *частичной булевой функцией*. Аналогично, если не упрощать ситуации, а рассматривать наборы из  $B_3^m$ , придем к частичным функциям трехзначной логики. В связи с этим возникает задача так доопределить рассматриваемую функцию алгебры логики, чтобы она допускала наиболее простую форму аналитического представления.

Если ограничиться рассмотрением только дизъюнктивных (или конъюнктивных) нормальных форм, то задача может быть сформулирована так: среди всех возможных функций алгебры логики, которые совпадают с заданной частичной функцией на тех наборах, на которых она определена, найти такую, которой соответствует минимальная из минимальных дизъюнктивных (конъюнктивных) нормальных форм. Аналогичная задача, естественно, может быть сформулирована и для функций трехзначной логики.

С точки зрения тех задач, которые рассматриваются в настоящей работе, главный интерес представляет не минимизация функций алгебры логики, а построение соответствующих им  $R$ -функций, по возможности имеющих простой вид, так как это в последующем приводит к более простым уравнениям чертежей. В общей постановке эта задача весьма сложна и трудноразрешима, как и вообще задача упрощения формул, записанных с помощью заданной системы функций (например, элементарных). Укажем лишь на одно частное обстоятельство. Поскольку операции равнозначности  $X_1 \sim X_2$  из  $\mathfrak{F}(B_3)$  можно поставить в соответствие  $R$ -равнозначность  $x_1 x_2$ , а отрицанию равнозначности  $X_1 \approx X_2$  —  $R$ -функцию  $(-x_1 x_2)$ , целесообразно

так доопределять заданную частичную булеву функцию, чтобы соответствующая ей формула могла быть преобразована к виду, содержащему операции  $X_1 \sim X_2$  и  $X_1 \approx X_2$  за счет уменьшения количества других двухместных операций ( $X_1 \wedge X_2$ ,  $X_1 \vee X_2$  и т. д.).

**Пример 1.** Напишем уравнение чертежа, приведенного на рис. 55. Область  $\Omega$  можно построить с помощью областей

$$\Sigma_1 = \{\sigma_1 \equiv (1 - x_1^2) \wedge_0 (1 - x_2^2) \geq 0\} \text{ (квадрат } ABCD);$$

$$\Sigma_2 = \{\sigma_2 \equiv (9 - x_1^2) \wedge_0 (4 - x_2^2) \geq 0\} \text{ (прямоугольник } EGHK);$$

$$\Sigma_3 = \{\sigma_3 \equiv [1 - (x_1 - 3)^2 - x_2^2] \geq 0\} \text{ (круг радиуса 1 с центром (3,0)).}$$

Для области  $\Omega$  нетрудно написать следующее предикатное неравенство:

$$[S_3(\bar{\sigma}_1) \wedge S_3(\sigma_2)] \vee S_3(\sigma_3) \geq 1.$$

Соответствующая функция трехзначной логики  $F = (X_1 \wedge X_2) \vee X_3$ , где  $X_1 = S_3(\bar{\sigma}_1)$ ,  $X_2 = S_3(\sigma_2)$ ,  $X_3 = S_3(\sigma_3)$ , определена не на всех наборах, так как внутренность квадрата  $ABCD$ , например, не имеет общих точек с внешностью прямоугольника  $EGHK$ . В связи с этим в рассматриваемом случае выражение  $\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2$  есть нуль. Поэтому можно написать  $F = (X_1 \wedge X_2) \vee (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2) \vee X_3$ . Учитывая, что

$(X_1 \wedge X_2) \vee (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2) \equiv X_1 \sim X_2$ , получаем  $F = (X_1 \sim X_2) \vee X_3$ . Следовательно, уравнение границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  можно записать в виде

$$\omega \equiv (\bar{\sigma}_1 \sigma_2) \vee_0 \sigma_3 \equiv [-(1 - x_1^2) \wedge_0 (1 - x_2^2)] [(9 - x_1^2) \wedge_0 \wedge_0 (4 - x_2^2)] \vee_0 [1 - (x_1 - 3)^2 - x_2^2] = 0. \quad (2.179)$$

**Упражнения и задачи.** 1. На какое максимальное число  $\gamma_n(m)$  конституентных областей можно  $\mathbb{R}^n$  разбить  $m$  гиперсферами? Изменится ли это число, если заменить гиперсферы другими выпуклыми телами?

2. Показать, что  $\gamma_m(m) 2^{-m} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ .

3. Область  $\Omega$  получена путем удаления из круга  $\Sigma_0 = (R^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0)$  внутренностей  $m$  кругов  $\Sigma_i = [r_i^2 - (x_1 - a_i)^2 - (x_2 - b_i)^2 \geq 0]$ , таких что  $a_i^2 + b_i^2 < (R - r_i)^2$  ( $i = 1, \dots, m$ )  $(a_i - a_j)^2 + (b_i - b_j)^2 < (r_i + r_j)^2$ ,  $\forall i \neq j$ . Подсчитать количество различных функций  $\Omega = F(\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_m) \in \mathfrak{F}(B_3^1)$ , которыми может быть задана область  $\Omega$ .

## § 15. Семейства выпуклых областей

Функцию  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называют выпуклой, если для любых двух точек  $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} [f(x^1) + f(x^2)] \leq f\left[\frac{1}{2}(x^1 + x^2)\right]. \quad (2.180)$$

Отметим некоторые свойства выпуклых функций.

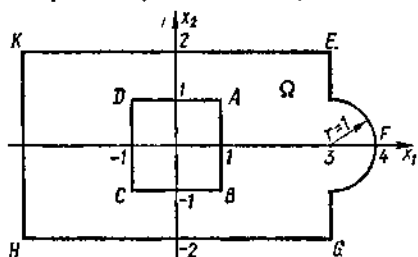


Рис. 55.

1°. Всякая выпуклая функция непрерывна.

2°. Если  $f$  — выпуклая функция, то  $f + C$  ( $C = \text{const}$ ) также выпуклая функция.

3°. Сумма выпуклых функций есть выпуклая функция.

4°. Если  $f$  — выпуклая функция, а  $C > 0$  — постоянная, то  $Cf$  — выпуклая функция.

5°. Условие (2.180) выпуклости эквивалентно требованию, чтобы для всякой пары точек  $x^1$  и  $x^2$  и для любой постоянной  $\lambda \in (0, 1)$  выполнялось неравенство

$$\frac{1}{1+\lambda} [f(x^1) + \lambda f(x^2)] \leq f\left(\frac{x^1 + \lambda x^2}{1+\lambda}\right). \quad (2.181)$$

6°. Если  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial l^2} \leq 0$  везде в  $\mathbb{R}^n$ , каково бы ни было направление  $l$ , то  $f$  — выпуклая функция.

Понятие выпуклой функции тесно связано с понятием выпуклой области. Выпуклой областью в  $\mathbb{R}^n$  называется область, обладающая тем свойством, что если две точки принадлежат ей, то ей принадлежит и отрезок прямой, соединяющий эти точки.

**Теорема 1.** Область  $\Omega$ , определяемая неравенством  $\omega \geq 0$ , где  $\omega$  — выпуклая функция, является выпуклой областью.

**Доказательство.** Действительно, если область  $\Omega$  не выпуклая, то найдется такая пара точек  $x^1, x^2 \in \Omega$ , что некоторая точка  $x^0$  отрезка  $x^1 x^2$  не принадлежит  $\Omega$ . Пусть точка  $x^0$  делит отрезок  $x^1 x^2$  в отношении  $\|x^1 - x^0\| \|x^0 - x^2\|^{-1} = \lambda$ . Тогда из неравенства (2.181) следует, что функция  $\omega$  в точке  $x^0$  неотрицательна и, следовательно, точка  $x^0$  принадлежит области  $\Omega$ . Приходим к противоречию. Теорема доказана.

**Следствие 1.** Область, определяемая неравенством  $\omega \geq C$ , где  $\omega$  — выпуклая функция, а  $C$  — произвольная постоянная, является выпуклой областью. Справедливость этого следствия вытекает из свойства 2°.

Условием называть границу выпуклой области выпуклым чертежом. Из следствия 1 вытекает, что если  $\omega$  — выпуклая функция, то уравнение  $\omega = C = \text{const}$  есть уравнение семейства выпуклых чертежей. (Пустое множество считается выпуклым по определению.) Пусть  $x_1 \wedge^* x_2$  —  $R$ -конъюнкция, удовлетворяющая условиям теоремы 8 § 6. Тогда если  $\omega_1(x), \omega_2(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$  есть функции, удовлетворяющие везде в  $\mathbb{R}^n$  и для всякого направления  $l$  неравенствам

$$\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial l^2} \leq 0 \quad (i = 1, 2), \quad (2.182)$$

то будет выполняться неравенство

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2} (\omega_1 \wedge^* \omega_2) \leq 0. \quad (2.183)$$

Из свойства 6° следует, что при выполнении условий (2.182) функции  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — выпуклые, тогда в силу неравенства (2.183) выпуклые и



функции  $\omega_1 \wedge^* \omega_2$ . Следовательно, в этом случае семейство чертежей  $\omega_1 \wedge^* \omega_2 = C$  будет выпуклым семейством.

(Доказанное свойство использовано в замечании 3 § 11.) Легко заметить, что неравенство (2.183) может быть обобщено на любое число функций  $\omega_i$ , удовлетворяющих условиям (2.182), т. е. если  $\wedge^{\alpha_i}$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ) —  $R$ -конъюнкции, удовлетворяющие условиям теоремы 8 § 6, а  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) удовлетворяют условиям (2.182), то

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2} ((\dots ((\omega_1 \wedge^{\alpha_1} \omega_2) \wedge^{\alpha_2} \omega_3) \wedge^{\alpha_3} \dots) \wedge^{\alpha_{m-1}} \omega_m) \leq 0.$$

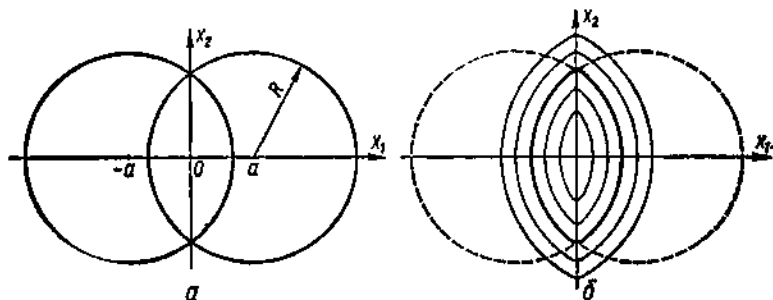


Рис. 56.

Таким образом, семейство  $(\dots (\omega_1 \wedge^{\alpha_1} \omega_2) \wedge^{\alpha_2} \dots) \wedge^{\alpha_{m-1}} \omega_m = C$  также есть семейство выпуклых чертежей.

*Замечание.* Функция  $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется выпуклой в односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , если условие выпуклости (2.180) выполняется для всякой пары точек  $x_1, x_2$  во всякой выпуклой подобласти  $\Omega' \subset \Omega$ . В соответствии с этим сказанное выше может оказаться справедливым не для всего пространства, а для области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , в которой условия (2.182) выполняются. Кроме того, если функция  $\omega(x)$  — выпуклая в односвязной области  $\Omega$ , то существует такая выпуклая в  $\mathbb{R}^n$  функция  $\omega^*$ , что  $\omega^* \equiv \omega$  в  $\Omega$ .

*Пример.* Пусть  $\Sigma_1 = [\sigma_1 \equiv R^2 - (x_1 - a)^2 - x_2^2 \geq 0]$ ,  $\Sigma_2 = [\sigma_2 \equiv R^2 - (x_1 + a)^2 - x_2^2 \geq 0]$  (рис. 56, а). Тогда уравнение

$$\begin{aligned} \sigma_1 \wedge_0 \sigma_2 &\equiv [R^2 - (x_1 - a)^2 - x_2^2] \wedge_0 [R^2 - (x_1 + a)^2 - x_2^2] \equiv \\ &\equiv 2R^2 - 2x_1^2 - 2a^2 - 2x_2^2 - \\ &- \sqrt{[R^2 - (x_1 - a)^2 - x_2^2]^2 + [R^2 - (x_1 + a)^2 - x_2^2]^2} = C \end{aligned}$$

является уравнением семейства выпуклых поверхностей, изображенного на рис. 56, б.

*Упражнения и задачи.* 1. Построить уравнение  $\omega = \text{const}$  выпуклого семейства, включающего при  $C = 0$  данный куб. Можно ли

построить это уравнение так, чтобы везде в  $\mathbb{R}^3$  выполнялось условие  $\omega \in C^m(\mathbb{R}^3)$  ( $m \geq 1$ )?

2. Показать, что условие выпуклости функции  $\omega$  является достаточным, но не необходимым условием для того, чтобы семейство чертей  $\omega = C$  было выпуклым. (Привести примеры.)

3. Пусть  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^n$  — выпуклые функции. Верно ли, что  $\omega_1 \wedge^* \omega_2$  — выпуклая функция, если  $\wedge^*$  —  $\mathcal{R}$ -конъюнкция, удовлетворяющая условиям теоремы 8 § 6? Можно ли при этом заменить условие  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(x_1 \wedge^* x_2) \leq 0$  условием выпуклости  $x_1 \wedge^* x_2$ ?

## § 16. Области Дирихле

Пусть  $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n, k = 1, \dots, m$ , есть некоторые фиксированные точки, которые назовем *базовыми*. Разобьем пространство  $\mathbb{R}^n$  на  $m$  областей, придерживаясь следующего правила. К  $i$ -й области отнесем те точки  $\mathbb{R}^n$ , расстояние которых от точки  $x^{(i)}$  меньше ее расстояний от точек  $x^{(k)}$  ( $k \neq i$ ).

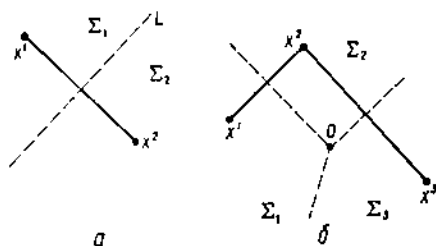


Рис. 57.

Полученную область принято называть *областью Дирихле* точки  $x^{(i)}$ . Задача о разбиении  $\mathbb{R}^n$  на области Дирихле состоит в отыскании границ областей Дирихле.

В простейшем случае, когда  $n = 2$  и даны лишь две точки  $x^1$  и  $x^2$ , областями Дирихле являются полуплоскости  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  (рис. 57, а). Разделяющая их прямая  $L$  перпендикулярна к отрезку  $x^1x^2$  и проходит через его середину. Если даны три точки  $x^1, x^2$  и  $x^3$  (рис. 57, б), то области Дирихле имеют форму секторов круга бесконечного радиуса с центром, совпадающим с центром описанной вокруг треугольника  $x^1x^2x^3$  окружности. С увеличением числа точек построение областей Дирихле (особенно при  $n > 2$ ) усложняется. Выпишем условия принадлежности точек  $x \in \mathbb{R}^n$  области Дирихле  $\Sigma_i$  точки  $x^i$ :

$$\tau_j(x) \equiv \|x - x^j\|^2 - \|x - x^i\|^2 > 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (i \neq j), \quad (2.184)$$

или

$$\begin{aligned} \tau_j(x) &= \tau_j(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{k=1}^n [(x_k - x_k^j)^2 - (x_k - x_k^i)^2] \equiv \\ &\equiv \sum_{k=1}^n [-2x_k(x_k^j - x_k^i) + (x_k^j)^2 - (x_k^i)^2] > 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (i \neq j). \end{aligned} \quad (2.185)$$

Таким образом, область  $\Sigma_i$  определяется системой  $m - 1$  линейных неравенств. Каждому из неравенств  $\tau_j(x) > 0$  соответствует определенное полупространство  $T_j$ . Следовательно, область  $\Sigma_i$  может быть определена предикатом

$$\Sigma_i = T_1 \wedge \dots \wedge T_{i-1} \wedge T_{i+1} \wedge \dots \wedge T_m. \quad (2.186)$$

В соответствии с результатами § 10 уравнение границы  $\partial\Sigma_i$  области  $\Sigma_i$  может быть написано в виде

$$\sigma_i(x) \equiv (\dots (\tau_1 \wedge^* \tau_2) \wedge^* \dots) \wedge^* \tau_m = 0, \quad (2.187)$$

где  $\tau_j$  опущено, а  $\wedge^*$  — символ  $R$ -конъюнкции. Заметим, что  $\frac{\partial^2 \tau_k}{\partial l^2} \equiv 0$ , каково бы ни было направление  $l$ , поэтому (см. § 15)

$\frac{\partial^2}{\partial l^2} \sigma_i \leq 0$  и семейство  $\sigma_i(x) = C$  есть семейство выпуклых чертежей (гиперповерхностей), включающее при  $C = 0$  границу  $\partial\Sigma_i$  области Дирихле. Заметим, что область  $\Sigma_i$ , являясь пересечением  $m - 1$  полупространств, представляет собой выпуклую область.

Рассмотрим вопрос об областях Дирихле в случае, когда базовых точек  $x^i$  бесконечно много, например если эти точки составляют некоторый чертеж. Задача может быть сформулирована следующим образом.

Дан чертеж  $L$  и произвольная точка  $x^1 \in L$ . Требуется выделить в  $\mathbb{R}^n$  множество точек, расстояние которых от  $x^1$  не превосходит их расстояний от других точек  $L$ .

**Пример 1.** Найдем области Дирихле точек  $x^1, x^2, x^3, x^4$  и  $x^5$ , принадлежащих чертежу  $L \subset \mathbb{R}^2$  (рис. 58). Точке  $x^1$  соответствует область  $\Sigma_1$ , ограниченная прямыми  $CD, DM$  и  $MB$ , а точке  $x^5$  — область  $\Sigma_5$ , ограниченная прямыми  $CD, DE$  и  $EF$ . Точке  $x^2$  соответствует луч  $x^2A$ , исходящий из точки  $x^2$ . Точке  $x^3$  соответствует  $GH$ , проходящий через  $x^3$ , при этом расстояние от точки  $G$  до отрезка  $x^4x^2$  равно расстоянию от  $G$  до  $x^3$ . Область Дирихле, соответствующая точке  $x^4$ , состоит из одной точки  $x^4$ .

Приведенный пример показывает, что области Дирихле точек данного чертежа могут иметь различную размерность от 0 до  $n$ . Так, область Дирихле, соответствующая точке  $x^4$ , имеет размерность 0, области, соответствующие  $x^1$  и  $x^5$ , имеют размерность 2, а точкам  $x^2$  и  $x^3$  соответствуют области размерности 1. Нетрудно заметить, что размерность области Дирихле данной точки чертежа до некоторой степени характеризует сам чертеж в окрестности данной точки. Так, если в приведенном примере размерность области Дирихле равна двум, то соответствующая точка является угловой точкой чертежа; если размерность равна нулю, то в данной точке сходится не менее трех линий чертежа и т. д. Остановимся на этом вопросе несколько подробнее.

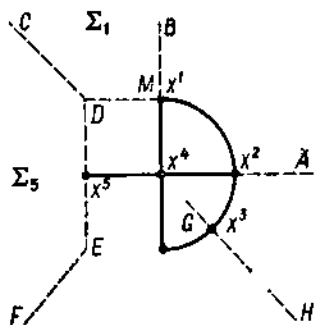


Рис. 58.

Пусть чертеж  $L$  (замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$ ) состоит из конечного числа непересекающихся элементов  $L_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ), которые являются дифференцируемыми  $k_i$ -мерными ( $k_i = \dim L_i$ ) многообразиями в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $k_i \in [0, n]$ . (Изолированные точки по определению считаем 0-мерными дифференцируемыми многообразиями.) Будем предполагать, что  $L_i$  есть «самые крупные» дифференцируемые многообразия, на которые разбит чертеж  $L$ , имея в виду, что никакие из элементов  $L_i$  нельзя соединить так, чтобы получилось новое дифференцируемое многообразие. Пусть  $x^0 \in L_i$ ,  $T_{x^0}$  — касательное к  $L_i$  в точке  $x^0$  ( $k_i$ -мерное) подпространство, а  $N_{x^0}$  — ортогональное к  $T_{x^0}$  подпространство, размерность которого, очевидно, равна  $n - k_i$ . Если в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x^0$  нет точек других элементов  $L_j$  ( $j \neq i$ ), то очевидно, что пересечение  $\varepsilon/2$ -окрестности точки  $x^0$  с  $N_{x^0}$  будет входить в область Дирихле точки  $x^0$  и таким образом размерность этой области будет не меньше, чем  $n - k_i$ . Но она не может быть больше  $n - k_i$ , так как  $\dim T_{x^0} + \dim N_{x^0} = n$ . Поэтому в данном случае размерность области Дирихле равна  $n - k_i$ . В других случаях размерность этой области может только уменьшиться, поскольку наличие в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x^0$  других точек чертежа  $L$  приводит только к сужению ее области Дирихле.

Если во всякой сколь угодно малой окрестности точки  $x^0$  есть точки не только элемента  $L_i$ , но еще и точки элемента  $L_j$  ( $i \neq j$ ) и точку  $x^0$  можно включить также и в элемент  $L_j$  размерности  $k_j$  (например, как точку  $x^4$  в примере 1), то область Дирихле окажется пересечением областей  $N_{x^0}^i$  и  $N_{x^0}^j$ . Аналогичная картина наблюдается, если  $x^0 \in L_{\alpha_s}$  ( $s = 1, \dots, k$ ), где  $L_{\alpha_s}$  — некоторая система упомянутых элементов. В общем случае этот вопрос нуждается в более глубоком исследовании. Отметим, что такое исследование, хотя и имеет чисто геометрический характер, является предпосылкой для успеха в других исследованиях по качественной теории физико-механических полей в окрестности особых точек чертежей, на которых заданы те или иные граничные условия.

Введем понятие расстояния от точки до чертежа.

**Определение 1.** Расстоянием от точки  $x \in \mathbb{R}^n$  до чертежа  $L \subset \subset \mathbb{R}^n$  называется величина

$$\rho(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\| = \inf \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.188)$$

Другими словами,  $\rho(x, L)$  есть кратчайшее расстояние от  $x$  до  $L$ . Так как чертеж представляет собой замкнутое множество, найдется по крайней мере одна точка  $y$ , принадлежащая чертежу, такая, что  $\|x - y\| = \rho(x, L)$ .

**Определение 2.** Точки чертежа  $L$ , расстояние которых от данной точки  $x$  равно  $\rho(x, L)$ , называются точками противостояния, соответствующими точке  $x$ .

Очевидно, что совокупность точек  $\mathbb{R}^n$ , которым соответствует одна и та же точка противостояния  $x^1$ , образует область Дирихле точки  $x^1$ .

**Определение 3.** Точки, которым соответствует только одна точка противостояния, назовем точками Дирихле, а точки, которым соответствует не менее двух точек противостояния, — точками раздела.

Замыкание совокупности точек раздела будем называть *чертежом раздела*. Чертеж раздела для чертежа  $L$  будем обозначать  $L^p$ . Совокупность точек Дирихле, имеющих общую точку противостояния, назовем *областью Дирихле*.

**Теорема 1.** Область Дирихле, соответствующая всякой точке чертежа, выпуклая.

**Доказательство.**

Пусть  $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$ ;  $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$  ( $0 < \alpha < 1$ ). Вос-

пользуемся тождеством, справедливым для всякого  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|x - y\|^2 = (1 - \alpha)\|x^2 - y\|^2 + \alpha\|x^1 - y\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x^2 - x^1\|^2. \quad (2.189)$$

Пусть  $x^0 \in L$  — точка противостояния точек  $x^1$  и  $x^2$ , а  $y \in L$  — произвольная точка на  $L$ . Точка  $\|x^1 - x^0\| \leq \|x^1 - y\|$ ,  $\|x^2 - x^0\| \leq \|x^2 - y\|$ . В силу тождества (2.189) и этих неравенств имеем

$$\begin{aligned} \|x - x^0\|^2 &= (1 - \alpha)\|x^2 - x^0\|^2 + \alpha\|x^1 - x^0\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x^2 - x^1\|^2 \leq \\ &\leq (1 - \alpha)\|x^2 - y\|^2 + \alpha\|x^1 - y\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x^2 - x^1\|^2 = \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда  $\|x - x^0\| \leq \|x - y\|$ , т. е.  $x^0$  есть точка противостояния для  $x$ . Теорема доказана.

**Пример 2.** Пусть чертеж  $L$  представляет собой дугу окружности, с центром в точке  $O$ , изображенную на рис. 59, а. Легко убедиться, что линией раздела для этой дуги является положительная полуось  $Ox_1$ .

**Пример 3.** Линия раздела для прямоугольника показана на рис. 59, б штриховыми линиями. Вершинам  $A, B, C$  и  $D$  соответствуют области Дирихле размерности два; остальным точкам — размерности один.

**Упражнения и задачи.** 1. Чертеж  $\Omega$  есть тело в виде гиперкуба в  $\mathbb{R}^n$ . Показать, что его точкам соответствуют области Дирихле всех размерностей от нуля до  $n$ .

2. Показать, что чертеж раздела для чертежа  $\Omega$  из предыдущего примера содержится в  $\Omega$ .

3. Существует ли такой чертеж в  $\mathbb{R}^n$ , который подобен своему чертежу раздела?

4. Показать, что чертеж раздела не имеет внутренних точек.

5. Чертеж раздела для гиперсферы есть ее центр. Существуют ли другие чертежи (замкнутые множества) в  $\mathbb{R}^n$ , имеющие в качестве чертежа раздела точку?

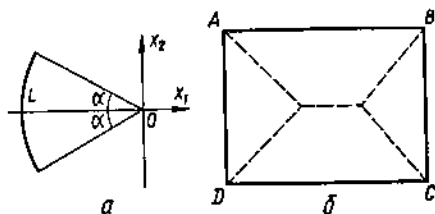


Рис. 59.

6. Можно ли построить на плоскости такой чертеж, имеющий среди своих элементов элементы ненулевой меры, мера которого равна мере его чертежа раздела?

7. Будем говорить, что чертежи  $L_1$  и  $L_2$  находятся в отношении  $\varphi$ , если  $L_1^p = L_2^p$ . Является ли это бинарное отношение отношением эквивалентности?

8. Для каких чертежей в  $\mathbb{R}^n$   $(L^p)^p = L$ ?

### § 17. Нормальное уравнение чертежа

1. Как уже отмечалось, один и тот же чертеж в  $\mathbb{R}^n$  может иметь бесчисленное множество различных уравнений. Это соответствует бесчисленному множеству графиков функций  $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$  в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ , которые могут пересекаться с пространством  $\mathbb{R}^n$  аргументов  $x_1, \dots, x_n$  по одному и тому же чертежу  $L$ . Согласно упоминавшейся в § 9 теореме Уитни, среди этих функций есть функции различной степени гладкости от непрерывных до бесконечно дифференцируемых функций. В частности, было введено понятие нормального уравнения  $y(x) \equiv \inf \|x - y\| = 0$ , единственного для всякого чертежа. Функция  $y(x)$  в дальнейшем будет называться нормальной функцией чертежа  $L$ .

Термин «нормальное уравнение» выбран по аналогии с термином «нормальное уравнение прямой», которому соответствует следующая форма уравнения прямой:

$$x_1 \cos \alpha_1 + x_2 \cos \alpha_2 - p = 0,$$

где  $p$  — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а  $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2$  — его направляющие косинусы. Расстояние  $\rho(x, L)$  от произвольной точки  $x = (x_1, x_2)$  до прямой  $L$  можно найти по формуле

$$\rho = |x_1 \cos \alpha_1 + x_2 \cos \alpha_2 - p|. \quad (2.190)$$

Таким образом, следуя данному выше определению, нормальным уравнением прямой на плоскости будем считать уравнение

$$|x_1 \cos \alpha_1 + x_2 \cos \alpha_2 - p| = 0. \quad (2.191)$$

Аналогично нормальное уравнение гиперплоскости в  $\mathbb{R}^n$  имеет вид

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \cos \alpha_i - p \right| = 0, \quad (2.192)$$

где, как и ранее,  $p$  — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на гиперплоскость, а  $\cos \alpha_i$  — его направляющие косинусы. Легко также написать нормальное уравнение гиперсферы радиуса  $R$  с центром в точке  $a = (a_1, \dots, a_n)$ :

$$\left| \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} - R \right| = 0. \quad (2.193)$$

Отсюда, в частности, полагая  $R = 0$ , получаем нормальное уравнение точки  $a$ :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} = 0. \quad (2.194)$$

2. Чтобы представить себе те трудности, которые могут возникнуть при построении нормальных уравнений в других случаях, рассмотрим задачу о построении нормального уравнения эллипса в  $\mathbb{R}^2$ . Пусть  $x$  — произвольная точка  $\mathbb{R}^2$ , а  $x^1$  — соответствующая ей точка противостояния на эллипсе (рис. 60). Угловым коэффициентом касательной, проведенной к эллипсу в точке  $x^1$ , определяется по формуле

$$k = -\frac{b^2 x_1^1}{a^2 x_2^1}. \quad (2.195)$$

Следовательно, уравнение нормали  $xx^1$  имеет вид

$$x_2 - x_2^1 = \frac{a^2 x_2^1}{b^2 x_1^1} (x_1 - x_1^1). \quad (2.196)$$

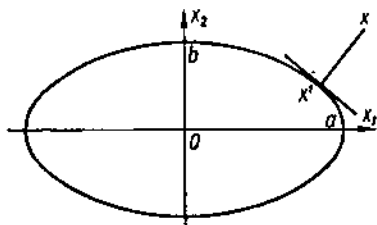


Рис. 60.

Координаты точки  $x^1$  удовлетворяют также уравнению эллипса

$$\frac{x_1^{1^2}}{a^2} + \frac{x_2^{1^2}}{b^2} = 1. \quad (2.197)$$

Из уравнений (2.196) и (2.197) находим

$$\begin{aligned} x_1 - x_1^1 &= \frac{x_2 a^2 - \lambda x_1 b^2}{\lambda (a^2 - b^2)}; \\ x_2 - x_2^1 &= \frac{x_2 a^2 - \lambda x_1 b^2}{a^2 - b^2}, \end{aligned} \quad (2.198)$$

где  $\lambda = \lambda(x_1, x_2)$  есть решение уравнения

$$(\lambda x_1 - x_2)^2 (a^2 + \lambda^2 b^2) - \lambda^2 (a^2 - b^2) = 0. \quad (2.199)$$

Тогда расстояние  $\rho = \|x - x^1\|$  определяется формулой

$$\rho(x_1, x_2) = \left| \frac{x_2 a^2 - \lambda x_1 b^2}{a^2 - b^2} \right| \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + 1}. \quad (2.200)$$

Следовательно, нормальное уравнение эллипса имеет вид

$$\left| \frac{x_2 a^2 - \lambda x_1 b^2}{a^2 - b^2} \right| \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + 1} = 0. \quad (2.201)$$

Входящая в это уравнение функция  $\lambda = \lambda(x_1, x_2)$ , которая в принципе может быть выражена в радикалах, является тем действительным корнем уравнения (2.199), которому соответствует наименьшее значение нормальной функции (2.200). Это уравнение всегда имеет два действительных корня. Таким образом, задача построения

нормального уравнения эллипса связана с решением (и исследованием решения) уравнения четвертой степени. Аналогичное явление наблюдается и для других линий или поверхностей второго порядка. (В случаях вырождения, когда уравнение второго порядка описывает две параллельные или пересекающиеся прямые, эллипс вырождается в отрезок, как показано далее, нормальные уравнения могут быть выписаны явно.) Для таких линий, как, например, графики логарифмической или показательной функций, синусоиды и другие, построение нормальных уравнений связано с решением трансцендентных уравнений.

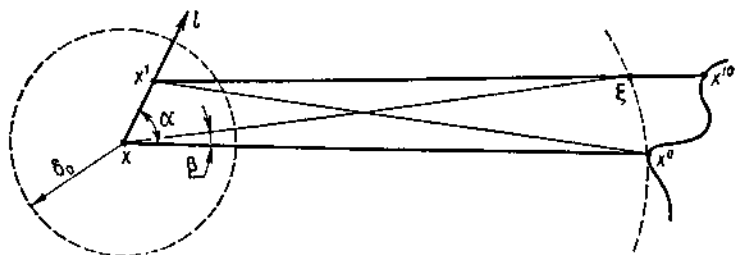


Рис. 61.

Ниже будет показано, что, несмотря на кажущуюся сложность, задача построения нормального уравнения может быть решена в явной форме для чертежа, который с заданной точностью аппроксимируется конечным числом дуг окружностей и отрезков прямых.

3. Перейдем к установлению свойств нормальных функций чертежей.

Прежде всего заметим, что нормальная функция любого чертежа определена, непрерывна и неотрицательна везде в  $\mathbb{R}^n$ . Следующая теорема дает представление о дифференцируемости нормальной функции.

**Теорема 1.** Если  $x \notin L \subset \mathbb{R}^n$  и  $x \notin L^p$ , где  $L^p$  — чертеж раздела чертежа  $L$ , то в точке  $x$  нормальная функция чертежа  $L$  дифференцируема.

**Доказательство.** Пусть  $x$  — произвольная точка  $\mathbb{R}^n$ , удовлетворяющая условиям теоремы, а  $x^0$  — соответствующая ей точка противостояния (рис. 61).

Из условий теоремы следует, что точку  $x$  можно окружить такой  $\delta_0$ -окрестностью, которая целиком состоит из точек Дирихле и не содержит точек чертежа  $L$ . Из точки  $x$  в произвольном направлении проведем луч  $l$  и на этом луче возьмем точку  $x^1$ , принадлежащую  $\delta_0$ -окрестности точки  $x$ . Пусть  $\|x - x^1\| = \delta < \delta_0$ . Обозначим  $x^{10}$  точку противостояния, соответствующую точке  $x^1$ . Так как

$$\|x - x^0\| = \inf_{y \in L} \rho(x, y), \quad (2.202)$$

внутри шара радиуса  $\|x - x^0\|$  с центром в точке  $x$  нет точек данного чертежа  $L$ . Следовательно, отрезок  $x^1x^{10}$  пересекается с границей



этого шара в некоторой точке  $\xi$  и справедливо неравенство

$$\|x^1 - x^0\| \geq \|x^1 - x^{10}\| \geq \|x^1 - \xi\|. \quad (2.203)$$

При стремлении точки  $x^1$  к  $x$  точка  $x^{10}$  стремится к  $x^0$ , так как в противном случае точка  $x$  оказалась бы точкой раздела чертежа  $L$ . Поэтому угол  $\angle x x^1 \xi = \beta$  стремится к нулю при  $x^1 \rightarrow x$ . Из треугольника  $x x^1 \xi$  находим

$$\|x^1 - \xi\| = \sqrt{\rho^2 + \delta^2 - 2\rho\delta \cos(\alpha - \beta)}, \quad (2.204)$$

где  $\rho = \|x - x^0\|$ ,  $\delta = \|x - x^1\|$ ,  $\alpha = \angle x^1 x x^0$ . Аналогично из треугольника  $x^0 x x^1$  получаем

$$\|x^1 - x^0\| = \sqrt{\rho^2 + \delta^2 - 2\rho\delta \cos \alpha}. \quad (2.205)$$

Тогда неравенство (2.203) приобретает вид

$$\sqrt{\rho^2 + \delta^2 - 2\rho\delta \cos \alpha} \geq \|x^1 - x^0\| \geq \sqrt{\rho^2 + \delta^2 - 2\rho\delta \cos(\alpha - \beta)}. \quad (2.206)$$

Из каждой части последних неравенств вычитаем величину  $\|x - x^0\| = f(x)$ , затем делим полученные части на  $\Delta l = \delta$ . В результате получаем

$$\Delta f = \|x^1 - x^0\| - \|x - x^0\| = -\Delta l \cos \alpha + o(\Delta l). \quad (2.207)$$

Отсюда следует дифференцируемость нормальной функции в точке  $x$ . Величина  $(-\cos \alpha)$  есть непрерывная функция точки  $x$  внутри рассматриваемой окрестности, а это означает, что  $\frac{\partial f}{\partial l}$  — непрерывна в той же окрестности.

4. Отметим также некоторые другие свойства нормальной функции чертежа.

1°. Если  $f(x)$  — нормальная функция чертежа  $L \in \mathbb{R}^n$ , а  $x^1 = \varphi(x)$  — композиция преобразований переноса, поворота и зеркального отображения относительно гиперплоскости, то  $f[\varphi(x)]$  есть нормальная функция чертежа  $\varphi(L)$  — образа чертежа  $L$ . Справедливость этого свойства следует из инвариантности расстояния между точками относительно названных выше преобразований.

2°. Нормальная функция чертежа  $L_1$ , полученного из чертежа  $L$  в результате преобразования подобия с началом координат в качестве центра подобия и коэффициентом подобия  $\gamma$ , имеет вид

$$f_1(x) = \frac{1}{\gamma} f(\gamma x), \quad (2.208)$$

где  $f(x)$  — нормальная функция чертежа  $L$ .

Приведенное ниже свойство позволяет составить нормальное уравнение чертежа по известным нормальным функциям его частей.

3°. Если  $f_i(x)$  нормальные функции чертежей  $L_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), то функция

$$\varphi(x) = f_1(x) \wedge_1 f_2(x) \wedge_1 \dots \wedge_1 f_m(x) \quad (2.209)$$

есть нормальная функция соединения чертежей  $L_i$ .

Действительно, так как  $x_1 \wedge_1 x_2 = \min(x_1, x_2)$ , имеем  $\varphi(x) = \min(f_1, \dots, f_m) = \rho(x, L)$ , где  $L = L_1 \cup \dots \cup L_m$ .

**Пример 1.** Напишем нормальное уравнение чертежа  $L$ , состоящего из двух соприкасающихся окружностей (рис. 62). Согласно формуле (2.193) нормальные уравнения этих окружностей имеют вид

$$f_1 \equiv \left| \sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2} - a \right| = 0; \quad f_2 \equiv \left| \sqrt{(x_1 + b)^2 + x_2^2} - b \right| = 0.$$

Тогда нормальное уравнение соприкасающихся окружностей будет

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2} - a \right| \wedge_1 \left| \sqrt{(x_1 + b)^2 + x_2^2} - b \right| \equiv \\ & \equiv \frac{1}{2} \left\{ \left| \sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2} - a \right| + \left| \sqrt{(x_1 + b)^2 + x_2^2} - b \right| - \right. \\ & \left. - \left| \left| \sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2} - a \right| - \left| \sqrt{(x_1 + b)^2 + x_2^2} - b \right| \right| \right\} = 0. \quad (2.210) \end{aligned}$$

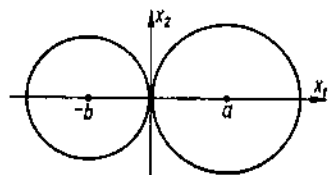


Рис. 62.

**Пример 2.** Нормальная функция чертежа, состоящего из двух точек  $x^1$  и  $x^2$ , имеет вид

$$\|x - x^1\| \wedge_1 \|x - x^2\|. \quad (2.211)$$

5. Пусть  $f_1(x)$  — нормальная функция чертежа  $L_1$ , являющегося отрезком с концами в точках  $x^1$  и  $x^2$ , а  $f_2(x)$  — нормальная функция чертежа  $L_2$ , представляющего собой соединение точек  $x^1$  и  $x^2$ .

Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Во всех точках  $\mathbb{R}^n$ , кроме точек отрезка  $x^1x^2$ , выполнимо равенство

$$\lim_{x^1 \rightarrow x^2} \frac{f_1(x) - f_2(x)}{\|x^1 - x^2\|} = 0, \quad (2.212)$$

т. е. разность между нормальной функцией отрезка  $f_1$  и нормальной функцией его концов  $f_2$  есть бесконечно малая более высокого порядка, чем длина рассматриваемого отрезка.

**Доказательство.** Через точки  $x^1$  и  $x^2$  проведем гиперплоскости, перпендикулярные к отрезку  $x^1x^2$ . Очевидно, что вне слоя, заключенного между этими прямыми, функции  $f_1$  и  $f_2$  совпадают. Следовательно, в точках, расположенных вне указанного слоя, равенство (2.212) выполняется. Пусть точка  $x$  лежит в названном слое. Тогда соответствующая ей точка противостояния  $x^0$  чертежа  $L_1$  будет заключена между точками  $x^1$  и  $x^2$ . Примем для простоты, что ближайший к точке  $x$  конец отрезка  $x^1x^2$  — точка  $x^1$ . Тогда

$$\begin{aligned} |f_2(x) - f_1(x)| &= \|x - x^1\| - \|x - x^0\| = \frac{\|x - x^1\|^2 - \|x - x^0\|^2}{\|x - x^1\| + \|x - x^0\|} = \\ &= \frac{\|x^1 - x^0\|^2}{\|x - x^1\| + \|x - x^0\|} \leq \frac{\|x^1 - x^2\|^2}{4(\|x - x^1\| + \|x - x^0\|)}. \quad (2.213) \end{aligned}$$

Отсюда следует формула (2.212). Если  $x$  есть точка отрезка  $x^1x^2$ , то вместо (2.212) получаем

$$|f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{1}{2} \|x^1 - x^2\|. \quad (2.214)$$

Теорема 2 может быть использована для аппроксимации нормальной функции произвольного чертежа, который с достаточной точностью можно приблизить системой мелких отрезков. Однако такой метод аппроксимации громоздок. Ниже будет приведено точное выражение для нормальной функции дуги окружности произвольного радиуса и, в частности, для отрезка прямой. Затем с помощью свойства 3<sup>с</sup> можно будет строить нормальные функции чертежей, состоящих из дуг окружностей и отрезков прямых.

6. Пусть  $x^1 x^2$  — отрезок в  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  — произвольная точка (рис. 63), а  $x^0$  — ближайшая к  $x$  точка на прямой, проходящей через точки  $x^1$  и  $x^2$ . Через точки  $x^1$  и  $x^2$  проведем гиперплоскости  $L_1$  и  $L_2$ , перпендикулярные к прямой  $x^1 x^2$ , что приведет к разбиению  $\mathbb{R}^n$  на три области:  $\Omega$  — слой, заключенный между гиперплоскостями  $L_1$  и  $L_2$ , полупространства  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , ограниченные этими гиперплоскостями и не содержащими  $\Omega$  (рис. 63). Если  $x \in \Sigma_i$ , то нормальная функция  $f(x) \equiv \|x - x^i\|$  ( $i = 1, 2$ ). Рассмотрим общий случай. Нетрудно подсчитать, что

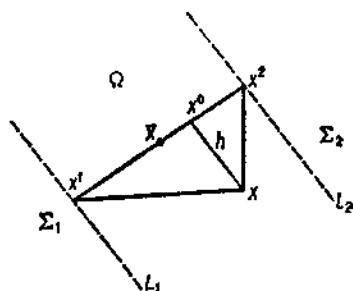


Рис. 63.

$$q \equiv \|x^0 - \bar{x}\| = \left| \frac{\|x^1 - x\|^2 - \|x^2 - x\|^2}{2\|x^1 - x^2\|} \right|; \quad (2.215)$$

$$h^2 = \|x - x^0\|^2 = \frac{[\|x^1 - x^2\|^2 - (\|x - x^2\| - \|x - x^1\|)^2][(\|x - x^2\| + \|x - x^1\|)^2 - \|x^1 - x^2\|^2]}{4\|x^1 - x^2\|^2}. \quad (2.216)$$

Очевидно, что в области  $\Omega$   $f(x) = h$ . Тогда

$$\sqrt{h^2 + \frac{1}{8} (\|x^2 - x^1\| - 2q)^2 \left[ 1 - \operatorname{sign} \left( 1 - \frac{4q^2}{\|x^2 - x^1\|^2} \right) \right]} = \begin{cases} h & \forall x \in \Omega; \\ \|x - x^i\| & \forall x \in \Sigma_i \quad (i = 1, 2). \end{cases} \quad (2.217)$$

Следовательно, нормальное уравнение отрезка  $x^1 x^2$  в  $\mathbb{R}^n$  можно написать в виде

$$f_n(x^1, x^2, x) \equiv \left\{ \frac{[\|x^1 - x^2\|^2 - (\|x - x^2\| - \|x - x^1\|)^2][(\|x - x^2\| + \|x - x^1\|)^2 - \|x^1 - x^2\|^2]}{4\|x^1 - x^2\|^2} + \frac{1}{8} \left( \|x^1 - x^2\|^2 - \frac{|\|x^1 - x\|^2 - \|x^2 - x\|^2|}{\|x^1 - x^2\|} \right)^2 \left[ 1 - \operatorname{sign} \left[ 1 - \frac{(\|x^1 - x\|^2 - \|x^2 - x\|^2)}{\|x^1 - x^2\|^2} \right] \right] \right\} = 0. \quad (2.218)$$

В частности, нормальное уравнение отрезка, соединяющего точки  $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$  и  $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$  на плоскости, получаем в виде

$$\begin{aligned} \nabla(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) \equiv & \frac{1}{2l} \left\{ [(2x_1 - x_1^1 - x_1^2)(x_2^2 - x_2^1) - \right. \\ & - (2x_2 - x_2^1 - x_2^2)(x_1^2 - x_1^1)]^2 + \frac{1}{2} [l^2 - 2|(2x_1 - x_1^1 - x_1^2)(x_1^2 - x_1^1) + \\ & + (2x_2 - x_2^1 - x_2^2)(x_2^2 - x_2^1)|]^2 \left[ 1 - \text{sign} \left( 1 - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{[(2x_1 - x_1^1 - x_1^2)(x_1^2 - x_1^1) + (2x_2 - x_2^1 - x_2^2)(x_2^2 - x_2^1)]^2}{l^2} \right) \right] \right\}^{1/4} = 0, \quad (2.219) \end{aligned}$$

где  $l = \|x^1 - x^2\|$ . Символ  $\nabla(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2)$  примем в качестве стандартного для обозначения нормальной функции отрезка с концами в точках  $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$  и  $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$ .

**Пример 3.** Пусть требуется написать нормальное уравнение отрезка  $[0, N]$  оси абсцисс. Полагая в (2.219)  $x_1^1 = x_2^1 = 0$ ,  $x_1^2 = N$ ,  $x_2^2 = 0$ ,  $l = N$ , получаем

$$\begin{aligned} \nabla(x_1, x_2, 0, 0, N, 0) \equiv \\ \equiv \frac{1}{2} \sqrt{4x_2^2 + \frac{1}{2}(N - |2x_1 - N|)^2 \left[ 1 - \text{sign} \frac{4x_1}{N} \left( 1 - \frac{x_1}{N} \right) \right]} = 0. \quad (2.220) \end{aligned}$$

Положительный множитель  $4/N$  под знаком  $\text{sign}$  можно опустить. Тогда

$$\begin{aligned} \nabla(x_1, x_2, 0, 0, N, 0) \equiv \\ \equiv \frac{1}{2} \sqrt{4x_2^2 + \frac{1}{2}(N - |2x_1 - N|)^2 \left[ 1 - \text{sign} x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{N} \right) \right]} = 0. \quad (2.221) \end{aligned}$$

**Пример 4.** Если в формуле (2.221)  $N \rightarrow \infty$ , получаем нормальное уравнение положительной полуоси  $Ox_1$ :

$$\nabla(x_1, x_2, 0, 0, \infty, 0) \equiv \frac{1}{2} \sqrt{4x_2^2 + 2x_1^2 (1 - \text{sign} x_1)} = 0.$$

**Пример 5.** Напишем нормальное уравнение ломаной на плоскости с вершинами в точках  $x^i = (x_1^i, x_2^i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ . На основании свойства  $3^\circ$  получаем требуемое уравнение в виде

$$\bigwedge_{i=1}^{i=m} \nabla(x_1, x_2, x_1^{i-1}, x_2^{i-1}, x_1^i, x_2^i) = 0, \quad (2.222)$$

где  $\bigwedge_1$  — символ  $R$ -конъюнкции  $x_1 \bigwedge_1 x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|)$ .

Из сказанного видно, что для всякого чертежа в  $\mathbb{R}^n$ , представляющего соединение конечного числа отрезков прямых, нормальное уравнение может быть написано точно с помощью базисной системы  $H = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, \sqrt{x_1} (x_1 \geq 0)\}$ , а  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

*Упражнения и задачи.* 1. Написать нормальное уравнение  $k$ -мерной гиперплоскости ( $k < n - 1$ ) в  $\mathbb{R}^n$ .

2. Написать нормальное уравнение кругового цилиндра в  $\mathbb{R}^3$  с осью  $Ox_2$ .

3. Написать нормальное уравнение  $m$  плоскостей в  $\mathbb{R}^3$ .

4. Показать, что уравнение  $\frac{1}{\pi} (\arcsin \sin \pi x_1) \wedge_1 \frac{1}{\pi} \times \times (\arcsin \sin \pi x_2) = 0$  есть нормальное уравнение бесконечной решетки на плоскости  $x_1 O x_2$  с узлами в точках с целочисленными координатами.

5. Написать нормальное уравнение бесконечной решетки с треугольными ячейками.

6. Пусть  $L \in \mathbb{R}^n$  — некоторый чертеж,  $L^p$  — чертеж раздела чертежа  $L$ ,  $L^{2p}$  — чертеж раздела чертежа  $L^p$  и т. д. Для каких чертежей  $L^{2p} = L$ ? Для всякого ли  $k \in \mathbb{N}$  существует такой чертеж, что  $L^{kp} = L$ ? Рассмотреть этот же вопрос, считая равными конгруэнтные между собой чертежи. Привести примеры чертежей в  $\mathbb{R}^n$  для которых  $L^p = L$ .

7. Для какого класса чертежей  $L^{kp} = \emptyset$ , начиная с некоторого  $k$ ?

8. Показать, что в областях, не содержащих точки чертежа и точки раздела, нормальная функция всякого чертежа является решением дифференциального уравнения

$$(\text{grad } f)^2 \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 = 1. \quad (2.223)$$

9. Пусть  $H$  — некоторая система функций,  $\mathfrak{M}(H)$  — множество  $H$ -реализуемых функций, а  $\mathfrak{R}(H)$  — множество  $H$ -реализуемых чертежей. Обозначим  $\mathfrak{M}_0(H)$  множество нормальных функций, соответствующих чертежам из  $\mathfrak{R}(H)$ . Существует ли такая система  $H$ , что  $\mathfrak{M}_0(H) \subset \mathfrak{M}(H)$ ? Удовлетворяет ли этому условию система  $H_1 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, \sqrt{x_1} \ (x_1 \geq 0)\}$ , а  $\forall a \in \mathbb{R}$ ?

10. Пусть  $L \subset \mathbb{R}^n$  — некоторый чертеж,  $L_0 = \text{int } L$  — множество его внутренних точек,  $L_1 = L \setminus L_0$ . Пусть  $f_1(x)$  — нормальная функция чертежа  $L_1$ ,  $L_0 = \{f_0(x) > 0\}$ . Показать, что нормальная функция чертежа  $L$  определяется формулой

$$f(x) = \frac{1}{2} f_1(x) [1 - \text{sign } f_0(x)].$$

### § 18. Нормальное уравнение произвольного чертежа на плоскости, состоящего из дуг окружностей и отрезков прямых

1. Установим некоторые полезные соотношения.

*Лемма 1. Справедливы тождества*

$$\begin{aligned} (a - x_1) \wedge_1 (a - x_2) &\equiv a - (x_1 \vee_1 x_2); \\ (a - x_1) \vee_1 (a - x_2) &\equiv a - (x_1 \wedge_1 x_2). \end{aligned} \quad (2.224)$$

Доказательство. В самом деле,

$$(a - x_1) \wedge_1 (a - x_2) \equiv \frac{1}{2} (a - x_1 + a - x_2 - |a - x_1 - a + x_2|) \equiv \\ \equiv a - \frac{1}{2} (x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|) \equiv a - (x_1 \vee_1 x_2).$$

Аналогично проверяется справедливость второй из формул (2.224). Формулы (2.224) являются обобщением правил де Моргана и выражают относительность выбора нулевой точки при разбиении множества действительных чисел на классы положительных и отрицательных чисел. С логической точки зрения можно было бы к одному классу относить числа, большие  $a$ , а к другому — меньшие  $a$ .

**Лемма 2.** Уравнение

$$(x \wedge_\alpha a) \vee_\beta (x - b) = 0 \quad (2.225)$$

имеет решение

$$x = \frac{b}{4} (3 - \text{sign } a - \text{sign } b - \text{sign } a \text{ sign } b). \quad (2.226)$$

Доказательство. Предположим вначале, что  $b \geq 0$ . Тогда:

а) при  $a > 0$  по формуле (2.226) получим  $x = 0$ . Подставив  $x = 0$  в левую часть уравнения (2.225), запишем

$$(0 \wedge_\alpha a) \vee_\beta (-b) = 0. \quad (2.227)$$

На основании известного свойства  $R$ -дизъюнкции получаем, что  $0 \wedge_\alpha a = 0$ . Тогда выражение (2.227) принимает вид  $0 \vee_\beta (-b) = 0$ ;

б) при  $a = 0$  по формуле (2.226) находим, что  $x = \frac{1}{2} b$ . Тогда левая часть уравнения (2.225) имеет вид

$$\left(\frac{b}{2} \wedge_\alpha 0\right) \wedge_\beta \left(-\frac{b}{2}\right)$$

и согласно известным свойствам  $R$ -конъюнкции и  $R$ -дизъюнкции равняется нулю;

в) при  $a < 0$  из (2.226) находим:  $x = b$ . Поскольку  $(b \wedge_\alpha a) < 0$ , имеем

$$(b \wedge_\alpha a) \vee_\beta 0 = 0. \quad (2.228)$$

Пусть  $b < 0$ . Тогда  $x = b$  и приходим к равенству  $(b \wedge_\alpha a) \vee_\beta 0 = 0$ .

В заключение отметим, что  $\alpha$  и  $\beta$  — величины, заключенные в интервале  $(-1, 1]$ . В приведенных рассуждениях нигде не было использовано, что  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные.

2. Дугу окружности на плоскости можно задать следующей строкой из пяти чисел:  $x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, \theta$ , где  $x = (x_1^1, x_2^1)$  — начальная точка дуги;  $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$  — конец дуги, а  $\theta$  — угол между касательной к дуге в точке  $x^1$  и хордой  $x^1 x^2$  (рис. 64, а). Условимся счи-

татель угол  $\theta$  положительным, если дуга окружности расположена по левую сторону от вектора  $x^1 x^2$ . Вначале рассмотрим дугу, изображенную на рис. 64, б. Примем, что концы дуги находятся в точках  $x^1 = \left(-\frac{1}{2}l, 0\right)$ ,  $x^2 = \left(\frac{1}{2}l, 0\right)$ , и построим линию  $L$ , точки которой отстоят от заданной дуги на расстоянии  $\rho$ . Эта линия состоит из четырех (или трех, если  $\rho$  больше радиуса дуги) дуг окружностей:  $EFG$ ,  $GHA$ ,  $ABC$  и  $CDE$ . Область  $\Omega$ , ограниченная линией  $L$ , может быть построена с помощью следующих опорных областей:

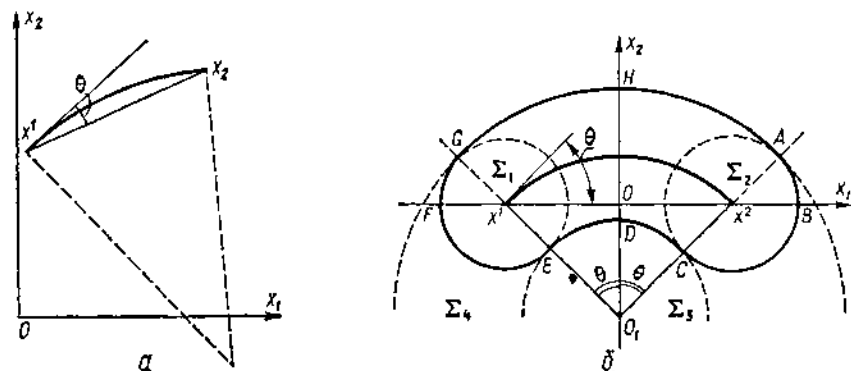


Рис. 64.

а) областей  $\Sigma_i$  ( $i = 1, 2$ ), представляющих собой внутренности кругов радиуса  $\rho$  с центрами в точках  $x^i = \left((-1)^i \frac{l}{2}, 0\right)$ ; эти области могут быть заданы неравенствами

$$\sigma_i \equiv \rho - \sqrt{\left[x_1 - (-1)^i \frac{l}{2}\right]^2 + x_2^2} \geq 0; \quad (2.229)$$

б) области  $\Sigma_3$  — внутренности круга радиуса  $R_1 = l(2 \sin \theta)^{-1} - \rho$  с центром в точке  $O_1 \left(0, -\frac{1}{2}l \operatorname{ctg} \theta\right)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_3 \equiv & -\rho + \frac{l}{2 \sin \theta} - \frac{1}{2 \sin \theta} \times \\ & \times \sqrt{4x_1^2 \sin^2 \theta + (2x_2 \sin \theta + l \cos \theta)^2} \geq 0; \quad (2.230) \end{aligned}$$

в) области  $\Sigma_4$  — внутренности круга радиуса  $R_2 = l(2 \sin \theta)^{-1} + \rho$  с центром в точке  $O_1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_4 \equiv & \rho + \frac{l}{2 \sin \theta} - \frac{1}{2 \sin \theta} \times \\ & \times \sqrt{4x_1^2 \sin^2 \theta + (2x_2 \sin \theta + l \cos \theta)^2} \geq 0; \quad (2.231) \end{aligned}$$

г) области  $\Sigma_5$ , представляющей собой клинообразную область, ограниченную прямыми  $GO_1$  и  $O_1A$ . Область  $\Sigma_5$  можно представить

как пересечение полуплоскостей  $\Sigma^1$  и  $\Sigma^2$ , ограниченных этими прямыми, т. е.  $\Sigma_5 = \Sigma^1 \wedge \Sigma^2$ . Поскольку области  $\Sigma^1$  и  $\Sigma^2$  определяются неравенствами

$$\sigma \equiv x_2 \sin \theta - x_1 \cos \theta + \frac{l}{2} \cos \theta \geq 0; \quad (2.232)$$

$$\sigma^2 \equiv x_2 \sin \theta + x_1 \cos \theta + \frac{l}{2} \cos \theta \geq 0, \quad (2.233)$$

область  $\Sigma_5$  определяется неравенством

$$\sigma_5 \equiv \sigma^1 \wedge_1 \sigma^2 \equiv \frac{l}{2} (2x_2 \sin \theta + l \cos \theta - 2|x_1| \cos \theta) \geq 0. \quad (2.234)$$

Логика построения области  $\Omega$ , ограниченной линией  $L$ , может быть задана формулой

$$\Omega = \Sigma_1 \vee \Sigma_2 \vee (\bar{\Sigma}_3 \wedge \Sigma_4 \wedge \Sigma_5). \quad (2.235)$$

Следовательно, уравнение линии  $L$  может быть записано в виде

$$\sigma_1 \vee_1 \sigma_2 \vee_1 (\bar{\sigma}_3 \wedge_1 \sigma_4 \wedge_1 \sigma_5) = 0. \quad (2.236)$$

(Заметим, что  $R$ -операции  $x_1 \wedge_1 x_2$  и  $x_1 \vee_1 x_2$  выбираются не только из соображений простоты записи формул, а и потому, что нормальные функции чертежей все равно имеют линии разрыва производных и брать более гладкие  $R$ -операции нет смысла.) Согласно неравенствам (2.229) находим

$$\begin{aligned} \sigma_1 \vee_1 \sigma_2 \equiv & \left[ \rho - \sqrt{\left(x_1 + \frac{1}{2}l\right)^2 + x_2^2} \right] \vee_1 \left[ \rho - \right. \\ & \left. - \sqrt{\left(x_1 - \frac{1}{2}l\right)^2 + x_2^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.237)$$

На основании леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1 \vee_1 \sigma_2 \equiv & \rho - \left[ \sqrt{\left(x_1 + \frac{1}{2}l\right)^2 + x_2^2} \right] \wedge_1 \\ & \wedge_1 \left[ \sqrt{\left(x_1 - \frac{1}{2}l\right)^2 + x_2^2} \right] = \rho - \sqrt{\left(|x_1| - \frac{1}{2}l\right)^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Согласно формулам (2.230) и (2.231) находим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_3 \wedge_1 \sigma_4 \equiv & \left[ \rho - \frac{l}{2 \sin \theta} + \frac{l}{2 \sin \theta} \times \right. \\ & \left. \times \sqrt{4x_1^2 \sin^2 \theta + (2x_2 \sin \theta + l \cos \theta)^2} \right] \wedge_1 \\ & \wedge_1 \left[ \rho + \frac{l}{2 \sin \theta} - \frac{l}{2 \sin \theta} \sqrt{4x_1^2 \sin^2 \theta + (2x_2 \sin \theta + l \cos \theta)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.238)$$



На основании леммы 1 получаем

$$\bar{\sigma}_3 \wedge_1 \sigma_4 \equiv \rho - \left| \frac{l}{2 \sin \theta} - \frac{l}{2 \sin \theta} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{4x_1^2 \sin^2 \theta + (2x_2 \sin \theta + l \cos \theta)^2} \right|. \quad (2.239)$$

Таким образом, уравнение (2.236) может быть записано в виде

$$(\rho - \xi) \vee_1 [(\rho - \eta) \wedge_1 \zeta] = 0, \quad (2.240)$$

где

$$\xi = \sqrt{\left( |x_1| - \frac{1}{2} l \right)^2 + x_2^2}; \\ \eta = \left| \frac{l}{2 \sin \theta} - \frac{l}{2 \sin \theta} \sqrt{4x_1^2 \sin^2 \theta + (2x_2 \sin \theta + l \cos \theta)^2} \right|; \quad (2.241) \\ \zeta = x_2 \sin \theta + \frac{1}{2} l \cos \theta - |x_1| \cos \theta.$$

Обозначив  $\rho - \eta = z$ , уравнение (2.240) перепишем так:

$$(z - \xi + \eta) \vee_1 (z \wedge_1 \zeta) = 0. \quad (2.242)$$

Согласно лемме 2 это уравнение имеет решение

$$z = \frac{\xi - \eta}{4} [3 - \text{sign}(\xi - \eta) - \text{sign} \zeta - \text{sign}(\xi - \eta) \text{sign} \zeta]. \quad (2.243)$$

Следовательно,

$$\rho = \eta + \frac{\xi - \eta}{4} [3 - \text{sign}(\xi - \eta) - \text{sign} \zeta - \text{sign}(\xi - \eta) \text{sign} \zeta]. \quad (2.244)$$

Учитывая, что выражение  $\xi - \eta$  можно привести к виду

$$\xi - \eta = [(2|x_1| - l) \cos \theta + 2x_2 \sin \theta]^2 l \{ [4|x_1| \sin^2 \theta - \\ - (4x_2 \sin \theta + 2l \cos \theta) \cos \theta + \\ + \sqrt{16x_1^2 \sin^2 \theta + (4x_2 \sin \theta + 2l \cos \theta)^2}] (\xi + \eta) \}^{-1}, \quad (2.245)$$

и замечая, что выполняются неравенства

$$\xi + \eta \geq 0;$$

$$\sqrt{16x_1^2 \sin^2 \theta + (4x_2 \sin \theta + 2l \cos \theta)^2} - (4x_2 \sin \theta + 2l \cos \theta) \cos \theta \geq 0, \quad (2.246)$$

приходим к выводу, что  $\xi - \eta \geq 0$ . Следовательно, формула (2.244) может быть переписана в виде

$$\rho(x_1, x_2) \equiv \eta(x_1, x_2) + \frac{\xi(x_1, x_2) - \eta(x_1, x_2)}{2} [1 - \text{sign} \zeta(x_1, x_2)]. \quad (2.247)$$

Выражение (2.247) представляет собой нормальную функцию дуги  $x^1 x^2$  (см. рис. 64, б), так как при подстановке в него координат какой-либо точки плоскости  $x_1 O x_2$  получаем расстояние  $\rho(x_1, x_2)$  от этой точки до дуги  $x^1 x^2$ .

Используя формулы переноса и поворота осей координат, можем написать нормальное уравнение дуги окружности, произвольно расположенной на плоскости:

$$\begin{aligned} \nabla(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, \theta) = \eta(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{1}{2} [\xi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - \\ - \eta(\bar{x}_1, \bar{x}_2)] [1 - \text{sign} \xi(\bar{x}_1, \bar{x}_2)], \end{aligned} \quad (2.248)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 = \frac{1}{2l} [(2x_1 - x_1^1 - x_1^2)(x_1^1 - x_1^2) + (2x_2 - x_2^1 - x_2^2)(x_2^1 - x_2^2)]; \\ \bar{x}_2 = -\frac{1}{2l} [(2x_1 - x_1^1 - x_1^2)(x_2^1 - x_2^2) - (2x_2 - x_2^1 - x_2^2)(x_1^1 - x_1^2)]; \end{aligned} \quad (2.249)$$

$$l = \|x^2 - x^1\| = \sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2}.$$

Символ  $\nabla(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, \theta)$  примем в качестве стандартного для обозначения нормальной функции дуги окружности на плоскости, имеющей начало в точке  $x_1 = (x_1^1, x_2^1)$ , конец в точке  $x_2 = (x_1^2, x_2^2)$  и угол, который составляет касательная к дуге в точке  $x^1$  с хордой, равный  $\theta$ . Легко убедиться в справедливости следующего тождества:

$$\nabla(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, \theta) \equiv \nabla(x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1^1, x_2^1, -\theta), \quad (2.250)$$

т. е. если считать точку  $x^2$  началом дуги, то следует изменить знак  $\theta$ .

Покажем, что при  $\theta \rightarrow 0$  нормальная функция дуги переходит в нормальную функцию хорды:

$$\nabla(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, 0) \equiv \nabla(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2). \quad (2.251)$$

При  $\theta \rightarrow 0$  получаем

$$\eta \rightarrow |x_2|; \quad \xi \rightarrow \frac{1}{2} l - |x_1|, \quad (2.252)$$

а величина  $\xi$  не зависит от  $\theta$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \nabla(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, 0) = |x_2| + \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\left(|x_1| - \frac{1}{2} l\right)^2 + x_2^2} - \right. \\ \left. - |x_2| \right] \left[ 1 - \text{sign} \left( \frac{1}{2} l - |x_1| \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.253)$$

Нетрудно убедиться, что выражение (2.253) тождественно совпадает с нормальной функцией отрезка (2.219), хотя внешне и отличается от него своей формой записи.

Располагая нормальными уравнениями отрезка и дуги окружности на плоскости, с помощью свойства 3° § 17 нетрудно написать нормальное уравнение произвольного чертежа, состоящего из дуг окружностей и отрезков прямых.

*Упражнения и задачи.* 1. Чертеж  $L \subset \mathbb{R}^2$  состоит из конечного числа прямых, дуг окружностей и отрезков прямых. Можно ли утверждать, что чертеж раздела  $L^p$  есть чертеж того же типа?

2. Предложить эффективный способ вычисления интегралов от нормальных функций чертежей на  $\mathbb{R}^2$ , состоящих из дуг окружностей и отрезков прямых. (Область интегрирования предполагается ограниченной также дугами окружностей и отрезками прямых.)

3. Рельеф местности имеет вид нормальной функции некоторого чертежа  $L$ . Предложить алгоритм поиска кратчайшего пути из точки  $x^1$  в точку  $x^2$ .

### § 19. Векторная нормальная функция чертежа

Определенный интерес представляет построение для данного чертежа  $L$  такой вектор-функции  $\vec{f}(x)$ , значение которой в произвольно взятой точке  $x \in \mathbb{R}^n$  представляет собой вектор, соединяющий точку  $x$  с соответствующей ей точкой противостояния. Очевидно, что каждой точке Дирихле соответствует единственный такой вектор, в то время как точке раздела может соответствовать несколько или даже бесконечно много таких векторов. Вектор-функцию  $\vec{f}(x)$  назовем *нормальной вектор-функцией* чертежа  $L$ , а уравнение  $\vec{f}(x) = 0$  — *нормальным векторным уравнением*.

Задача построения нормальной вектор-функции чертежа решается с помощью следующей теоремы.

*Теорема 1.* Если  $f(x)$  есть нормальная функция чертежа  $L$ , то во всех точках Дирихле справедливо равенство

$$\vec{f}(x) = -f(x) \operatorname{grad} f(x). \quad (2.254)$$

**Доказательство.** Из формулы (2.207) следует, что производная  $\frac{\partial f}{\partial l}$  принимает наибольшее значение, равное единице, если направление  $l$  противоположно направлению вектора  $\overrightarrow{xx^0}$ , т. е. если  $\alpha = \pi$ . Следовательно,

$$\operatorname{grad} f(x) = -\frac{\overrightarrow{xx^0}}{\|x - x^0\|} = -\frac{\overrightarrow{xx^0}}{f(x)} = -\frac{\vec{f}(x)}{f(x)}. \quad (2.255)$$

Другими словами,  $\operatorname{grad} f(x)$  есть единичный вектор, противоположный по направлению вектору  $\overrightarrow{xx^0}$ . Из формулы (2.255) следует (2.254).

**Пример.** Векторную нормальную функцию отрезка  $[-1, 1]$  оси  $Ox_1$  получим, если в формулу (2.254) подставим нормальную функцию этого отрезка:

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_2^2 + \frac{1 - |x_1|}{2} (1 - |x_1| - |1 - |x_1||)}. \quad (2.256)$$

Из этой формулы находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{1}{2} \left[ x_2^2 + \frac{1 - |x_1|}{2} (1 - |x_1| - |1 - |x_1||) \right]^{-1/2} \times \\ &\times \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{sign} x_1 (1 - |x_1| - |1 - |x_1||) + \frac{1 - |x_1|}{2} (-\operatorname{sign} x_1 + \operatorname{sign} x_1 \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \operatorname{sign}(1 - |x_1|) \Big] &= \frac{1}{2} \left[ x_2^2 + \frac{1 - |x_1|}{2} (1 - |x_1| - |1 - |x_1||) \right]^{-1/2} \times \\ &\times [-\operatorname{sign} x_1 (1 - |x_1| - |1 - |x_1||)]; \quad (2.257) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \left[ x_2^2 + \frac{1}{2} (1 - |x_1|) (1 - |x_1| - |1 - |x_1||) \right]^{-1/2} x_2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial x_1} i_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} i_2 = \left[ x_2^2 + \frac{1}{2} (1 - |x_1|) (1 - |x_1| - |1 - |x_1||) \right]^{-1/2} \times \\ &\times \left[ -\frac{1}{2} (1 - |x_1| - |1 - |x_1||) \operatorname{sign} x_1 \cdot i_1 + x_2 i_2 \right]. \end{aligned}$$

Согласно формуле (2.254) получаем

$$\overrightarrow{f(x_1, x_2)} = \frac{i_1}{2} (1 - |x_1| - |1 - |x_1||) \operatorname{sign} x_1 - x_2 i_2. \quad (2.258)$$

Нормальная вектор-функция чертежа позволяет легко решать следующую задачу. Чертеж  $L$  задан нормальным уравнением  $f(x) = 0$ . Требуется найти какую-нибудь точку, лежащую на  $L$  (т. е. требуется «попасть» в  $L$ ). Обычно, если  $f(x_1, x_2) = 0$  — какое-нибудь уравнение  $L$ , такая задача решается следующим образом: выбирается произвольное значение  $x_1$  или  $x_2$  и подставляется в уравнение  $f(x_1, x_2) = 0$ , которое затем решается относительно другой координаты. Если использовать формулу (2.254), то, подставив в нее координаты какой-либо точки, получим вектор, соединяющий эту точку с точкой чертежа, т. е. чертеж, для которого известна нормальная вектор-функция, легко может быть «обстрелян» точками.

*Упражнения и задачи.* 1. Построить нормальную вектор-функцию для двух соприкасающихся окружностей.

2. Чертеж в  $\mathbb{R}^n$  представляет собой соединение отрезков  $x^i x^{i+1}$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Построить его нормальную вектор-функцию. Найти координаты точки, ближайшей к началу координат.

## § 20. Верхняя нормальная функция

Введем понятие верхней нормальной функции чертежа, напоминающей в некотором смысле нормальную функцию, рассмотренную в предыдущих параграфах.

**Определение 1.** *Верхним расстоянием от точки  $x$  до чертежа  $L$  называется величина*

$$\rho_0(x, L) = \sup_{y \in L} \|x - y\|. \quad (2.259)$$

Другими словами,  $\rho_0(x, L)$  есть расстояние от точки  $x$  до самой удаленной от нее точки чертежа  $L$ .

Очевидно, что если чертеж  $L$  не ограничен, то верхнее расстояние в любой точке  $\mathbb{R}^n$  бесконечно велико. Поэтому в дальнейшем будем говорить об ограниченных чертежах.

Поскольку чертеж  $L$  (по принятому в § 9 определению) представляет собой замкнутое множество, всегда найдется такая точка  $x^0$ , что выполняется равенство

$$\|x - x^0\| = \rho_0(x, L).$$

Точку  $x^0$  назовем *точкой верхнего пропизостояния*, соответствующей точке  $x$ . Точки  $\mathbb{R}^n$ , которым соответствуют две или больше точек верхнего противостояния, будем называть *точками верхнего раздела*. Замыкание множества точек верхнего раздела чертежа  $L$  назовем *чертежом верхнего раздела* чертежа  $L$  и будем обозначать  $L^b$ .

**Пример 1.** Линией верхнего раздела дуги окружности (см. рис. 59, а) является отрицательная полуось абсцисс.

**Пример 2.** Линия верхнего раздела прямоугольника на плоскости состоит из осей его симметрии.

**Определение 2.** Функция

$$f(x) = \rho_0(x, L) = \sup_{y \in L} \|x - y\| \quad (2.260)$$

называется *верхней нормальной функцией* чертежа  $L$ .

Верхняя нормальная функция в произвольно взятой точке  $x$  принимает значение, равное радиусу наименьшей гиперсферы с центром в точке  $x$ , которая заключает чертеж  $L$ . В отличие от нормальной функции, которая в точках чертежа принимает нулевые значения, верхняя нормальная функция всякого чертежа, отличного от одной изолированной точки, строго положительна.

**Пример 3.** Верхняя нормальная функция сферы в  $\mathbb{R}^3$  с центром в точке  $a = (a_1, a_2, a_3)$  и радиусом  $R$  имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} + R. \quad (2.261)$$

Приведем некоторые свойства верхней нормальной функции.

1°. Если точку  $x$  можно окружить окрестностью, не содержащей точек верхнего раздела, то в точке  $x^0$  верхняя нормальная функция дифференцируема. При этом, если  $x^0$  есть точка верхнего противостояния, а  $\theta$  — угол между направлением  $l$  и вектором  $\vec{xx}^0$ , то

$$\frac{\partial f}{\partial l} = -\cos \theta. \quad (2.262)$$

2°. Если  $f_i(x)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — верхние нормальные функции чертежей  $L_i \subset \mathbb{R}^n$  ( $i = 1, \dots, m$ ), то верхняя нормальная функция чертежа  $L = \bigcup L_i$  определяется формулой

$$f(x) \equiv \bigvee_{i=1}^{i=m} f_i(x). \quad (2.263)$$

**Пример 4.** Верхняя нормальная функция чертежа, состоящего из двух точек  $x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$  и  $x^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)$ , имеет вид

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &\equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^1)^2} \vee_1 \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^2)^2} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^1)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left| \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^1)^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^2)^2} \right| \right). \end{aligned} \quad (2.264)$$

3°. Верхняя нормальная функция отрезка с концами в точках  $x^1$  и  $x^2$  определяется формулой (2.264) (т. е. совпадает с верхней нормальной функцией своих концов).

4°. Верхняя нормальная функция всякого чертежа везде вогнута. Действительно, пусть  $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^0 = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$  — середина отрезка  $x^1x^2$ , а  $x^0$  есть точка верхнего противостояния точки  $x^{12}$ . Очевидно, что (рис. 65)

$$\begin{aligned} f(x^1) &\geq \|x^1 - x^0\|; \\ f(x^2) &\geq \|x^2 - x^0\|. \end{aligned} \quad (2.265)$$

Из треугольников  $x^1x^0x^{12}$  и  $x^2x^0x^{12}$  находим

$$\begin{aligned} x^1x^0 &= \sqrt{l^2 + f^2(x^{12}) + 2lf(x^{12})\cos\theta}; \\ x^2x^0 &= \sqrt{l^2 + f^2(x^{12}) - 2lf(x^{12})\cos\theta}, \end{aligned} \quad (2.266)$$

где  $l = \|x^1 - x^2\|$ . Отсюда

$$\begin{aligned} x^1x^0 + x^2x^0 &= 2f(x^{12}) + [\sqrt{l^2 + f^2(x^{12}) + 2lf(x^{12})\cos\theta} - \\ &- \sqrt{l^2 + f^2(x^{12}) - 2lf(x^{12})\cos\theta}] \geq 2f(x^{12}). \end{aligned}$$

В силу неравенств (2.265) получаем

$$f(x^1) + f(x^2) \geq 2f(x^{12}),$$

что и требовалось доказать.

Из свойства 4°, в частности, следует, что наименьшее значение верхней нормальной функции можно найти, например, с помощью метода наискорейшего спуска [89, 190], взяв в качестве начальной произвольную точку  $x$ .

5°. Верхняя нормальная функция всякого ограниченного чертежа имеет единственную точку минимума.

Предположим противное. Пусть  $x^1$  и  $x^2$  — точки минимума  $f(x^1) = f(x^2) = R$ . Построим сферы радиуса  $R$  с центрами в точках  $x^1$  и  $x^2$ . Тогда чертеж  $L$  должен размещаться в области, представляющей собой пересечение упомянутых сфер. Но тогда чертеж  $L$  можно заключить в сферу мень-

шего радиуса и в ее центре значение верхней нормальной функции будет меньше  $R$ . Приходим к противоречию.

Точку минимума верхней нормальной функции назовем *геометрическим центром* чертежа, а значение функции в этой точке — *радиусом охвата* чертежа.

6°. Верхняя нормальная функция всякого чертежа совпадает с верхней нормальной функцией его выпуклой оболочки.

*Упражнения и задачи.* 1. Доказать свойство 6°.

2. Чертеж  $L$  состоит из  $m$  отрезков. Совпадает ли верхняя нормальная функция чертежа  $L$  с верхней нормальной функцией соединения концов указанных отрезков?

3. Для каких чертежей верхний чертеж раздела ограничен?

4. Пусть  $L$  — чертеж,  $L^b$  — верхний чертеж раздела  $L$ ,  $L^{2b}$  — верхний чертеж раздела чертежа  $L^b$  и т. д. Для каких чертежей  $L^{kb} = L$  ( $k \geq 1$ )? Для каких чертежей  $L^{kb} = \emptyset$ , начиная с некоторого  $k$ ?

5. Показать, что верхняя нормальная функция чертежа на плоскости, состоящего из конечного числа дуг окружностей и отрезков прямых, является  $H_1$ -реализуемой функцией, где  $H_1 = \{x_1 + x_2, x_1x_2, \sqrt{x_1} (x_1 \geq 0)\}$ , а  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

6. Пусть  $H$  — некоторая система функций,  $\mathfrak{M}(H)$  — множество  $H$ -реализуемых функций, а  $\mathfrak{N}(H)$  — множество  $H$ -реализуемых чертежей. Обозначим через  $\mathfrak{M}^0(H)$  множество верхних нормальных функций, соответствующих чертежам из  $\mathfrak{N}(H)$ . Существуют ли такие системы  $H$ , что  $\mathfrak{M}^0(H) \subset \mathfrak{M}(H)$ ? Удовлетворяет ли этому условию система  $H_1$  из упражнения 5?

## § 21. Нормализованные уравнения чертежей

1. Пусть в некоторой окрестности точки  $x^0 \in L$  чертеж  $L \subset \mathbb{R}^n$  представляет собой  $k$ -мерное дифференцируемое многообразие,  $T_{x^0}$  — касательное, а  $N_{x^0}$  — нормальное подпространства. Очевидно, что  $\dim T_{x^0} = k$ ,  $\dim N_{x^0} = n - k$ . Единичные векторы

$\tau_i \in T_{x^0}$ , начало которых отнесено к точке  $x^0$ , называется *касательными векторами* к  $L$  в точке  $x^0$ , а такие же векторы  $\nu_i \in N_{x^0}$  — *нормальными векторами*. Если  $\dim T_{x^0} = n - 1$ , то  $\dim N_{x^0} = 1$  и из точки  $x^0$  можно провести два единичных вектора  $\nu$  и  $\nu_1 = -\nu$ .

Кроме описанного выше обычного понятия нормали можно ввести и более общее понятие, не связанное с дифференциальными свойствами чертежа  $L$ . Достаточно лишь считать, что  $L$  — замкнутое множество.

Пусть  $x \in (\mathbb{R}^n \setminus L)$ ,  $\{x^i\}$  — множество точек противоположной точки  $x$  на чертеже  $L$ . Единичные векторы  $\nu_i = (x - x^i) \|x - x^i\|^{-1}$ , отнесенные к точкам  $x^i$ , назовем *нормальными* к  $L$ , соответствующими точке  $x$ . Нормали, соответствующие всем точкам  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , составляют *множество нормалей* к  $L$  по отношению к  $\Omega$ . (Если не оговаривается особо, считается, что  $\Omega = \mathbb{R}^n$ .) Прямые, содержащие нормали к  $L$ , будем называть *нормальными прямыми*. Точка  $x \in L$ , которой соответствует единственная нормальная прямая, называется *регулярной точкой* чертежа  $L$ .

Введенное понятие нормали к  $L$  совпадает с описанным в начале параграфа понятием нормали для точек чертежей, в окрестности которых последние являются дифференцируемыми многообразиями.

Если  $f(x)$  — нормальная функция чертежа  $L$ , то для нее справедливы равенства

$$f(x)|_L = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \nu}|_L = 1, \quad \frac{\partial^k f}{\partial \nu^k}|_L = 0 \quad (k = 2, 3, \dots), \quad (2.267)$$

где  $\nu$  — нормаль в указанном выше общем смысле.

**Определение 1.** Уравнение  $\omega(x) = 0$  чертежа  $L$  называется *нормализованным до  $m$ -го порядка уравнением  $L$* , если функция  $\omega(x)$  удовлетворяет условиям

$$\omega(x)|_L = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \nu}|_L = 1, \quad \frac{\partial^k \omega}{\partial \nu^k}|_L = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, m) \quad (2.268)$$

во всех регулярных точках чертежа  $L$ .

Если условия (2.268) выполняются во всех точках  $L$  в предположении, что  $\nu$  — нормаль во введенном выше общем смысле, то уравнение  $\omega(x) = 0$  будем называть *полностью нормализованным до  $m$ -го порядка* (или *нормализованным в обобщенном смысле*).

Очевидно, что нормальное уравнение чертежа в силу формул (2.267) является полностью нормализованным до любого порядка. Однако недостатком нормального уравнения  $f(x) = 0$  является то, что, как уже неоднократно отмечалось выше, функция  $f(x)$  вне чертежа  $L$  не обязательно дифференцируема. Между тем можно доказать, что для всякого чертежа существуют функции любой степени гладкости, удовлетворяющие условиям (2.267).

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\partial\Omega$  — кусочно-гладкая граница  $\Omega$ . Тогда существует функция  $\omega(x) \in C^\infty(\Omega \cup \partial\Omega)$

такая, что  $\omega(x) = 0$  есть нормализованное до бесконечного порядка уравнение  $\partial\Omega$  в каждой точке  $x^0 \in \partial\Omega$ , в окрестности которой  $\partial\Omega$  принадлежит классу  $C^1$ .

**Доказательство.** Пусть  $d(x) = \min_{y \in \partial\Omega} \|x - y\|$  — нормальная функция границы  $\partial\Omega$ , а  $\omega(x)$  — функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1 § 9. Тогда функция

$$\omega_1(x) = \begin{cases} \rho(x) \int_0^1 d(y) \operatorname{up}[n, \rho(x)(x-y)] dy & \text{при } x \in \Omega; \\ 0 & \text{при } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.269)$$

где

$$\rho(x) = \exp\left[\frac{1}{\omega^2(x)}\right], \quad \operatorname{up}(n, x) = \prod_{i=1}^n \operatorname{up}(x_i), \quad (2.270)$$

удовлетворяет условиям сформулированной теоремы. (О функции  $\operatorname{up}(x)$  см. § 16 гл. 4.)

Условия (2.268) означают, что вдоль нормали к  $L$  функция  $\omega(x)$  примерно равна расстоянию  $\rho$  точек этой нормали от чертежа  $L$ . Действительно, раскладывая функцию  $\omega$  в окрестности точки  $x^0 \in L$  по направлению нормали  $\nu$ , получаем

$$\omega(x) = \rho + \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} \omega(x^0 + \theta \rho \nu)}{\partial \nu^{n+1}} \rho^{n+1}, \quad (2.271)$$

где  $0 < \theta < 1$ ,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ ,  $\rho = \|x^0 - x\|$ .

2. Методика построения уравнений чертежей, описанная в § 21, позволяет обеспечить выполнение условия

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right|_L \neq 0. \quad (2.272)$$

Действительно, если  $\Sigma_i = [\sigma_i(x) \geq 0]$  и  $\frac{\partial \sigma_i}{\partial \nu_i} \neq 0$  на  $\partial \Sigma_i$  (это условие для опорных функций обычно легко выполнить), где  $\nu_i$  — нормаль к  $\partial \Sigma_i$ , то при использовании достаточно полных систем  $R$ -функций  $\mathfrak{R}_\alpha$ ,  $\mathfrak{R}$  и некоторых других, удовлетворяющих условиям соответствующих теорем § 6, в тех точках  $L$ , где одновременно  $\omega = 0$  и  $\sigma_i = 0$ , согласно формуле (2.272) получаем

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right|_L = \pm \left. \frac{\partial \sigma_i}{\partial \nu_i} \right|_L \neq 0. \quad (2.273)$$

Если принять, что нормаль  $\nu$  направлена в область, где  $\omega > 0$ , то условие (2.272) можно уточнить:  $\left. \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right|_L > 0$ . Располагая уравнением  $\omega_1 = 0$ , таким что  $\left. \frac{\partial \omega_1}{\partial \nu} \right|_L > 0$ , нетрудно построить уравнение  $\omega(x) = 0$  чертежа  $L$ , нормализованное до первого порядка.



**Теорема 2.** Если  $\omega_1(x) \in C^m(\mathbb{R}^n)$  удовлетворяет условиям  $\omega_1|_L = 0$  и  $\frac{\partial \omega_1}{\partial \nu}|_L > 0$ , то функция

$$\omega \equiv \omega_1 [\omega_1^2 + (\text{grad } \omega_1)^2]^{-\frac{1}{2}} \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n) \quad (2.274)$$

удовлетворяет условиям нормализованности до первого порядка во всех регулярных точках элементов чертежа  $L$ .

**Доказательство.** Из условия  $\omega_1|_L = 0$  следует, что на чертеже  $L$  функция  $\omega_1$  сохраняет постоянное значение, и тогда в силу условия  $\frac{\partial \omega_1}{\partial \nu}|_L > 0$  нормаль  $\nu$  имеет направление вектора  $\text{grad } \omega_1$ . Следовательно,  $\nu = \text{grad } \omega_1 |\text{grad } \omega_1|^{-1}$ ,  $\frac{\partial \omega_1}{\partial \nu} = |\text{grad } \omega_1|$ . Дифференцируя (2.274), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \nu}|_L &= \frac{\partial \omega_1}{\partial \nu} [\omega_1^2 + |\text{grad } \omega_1|^2]^{-1/2} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \nu} [\omega_1^2 + |\text{grad } \omega_1|^2]^{-1/2} \Big|_L = \\ &= \frac{\partial \omega_1}{\partial \nu} |\text{grad } \omega_1|^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Из доказательства этой теоремы следует, что выражение в квадратных скобках в формуле (2.274) можно заменить любым другим, не обращающимся в нуль выражением, совпадающим на  $L$  с  $|\text{grad } \omega_1|^{-1}$ . Это позволяет применять также следующую формулу:

$$\omega \equiv |\text{grad } \omega_1|^{-1} \Big|_L \omega_1 \quad (2.275)$$

в предположении, конечно, что  $|\text{grad } \omega_1| \neq 0$  и имеется простая возможность продолжить  $|\text{grad } \omega_1|_L$  внутрь области  $\Omega$ .

**Пример 1.** Используя (2.275), получаем нормализованные уравнения границ

а) для полупространства  $a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq 0$  в  $\mathbb{R}^n$

$$\omega(x) \equiv \frac{a_0}{\|a\|} - \sum_{i=1}^n \frac{a_i x_i}{\|a\|} = 0, \quad (2.276)$$

где  $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$  (это уравнение является нормализованным до бесконечного порядка);

б) для шара  $R^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \geq 0$  в  $\mathbb{R}^n$

$$\omega(x) \equiv \frac{1}{2R} \left[ R^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \right] = 0; \quad (2.277)$$

в) для слоя  $\left(-a_0 - \sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \left(b_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \geq 0$  между параллельными гиперплоскостями в  $\mathbb{R}^n$

$$\omega(x) \equiv -\frac{1}{2\|a_0 - b_0\| \|a\|} \left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \left(b_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \geq 0. \quad (2.278)$$

**Пример 2.** Для области  $\Sigma = (x_2 - \sin x_1 > 0)$  в  $\mathbb{R}^2$ , ограниченной синусоидой, нормализованное (до первого порядка) уравнение границы можем написать с помощью формулы (2.274) в виде

$$\partial\Sigma = \left( \frac{x_2 - \sin x_1}{\sqrt{1 + \cos^2 x_1}} = 0 \right). \quad (2.279)$$

Заметим, что для функций  $\omega(x)$  сложного вида непосредственное применение формул (2.274) и (2.275) сопряжено с трудностями вычислений. Поэтому на практике чаще применяется другой более экономный метод, базирующийся на свойствах некоторых систем  $R$ -операций, описанных в § 6.

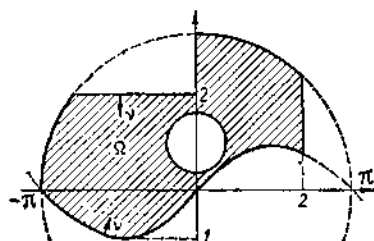


Рис. 66.

3. Приведенные выше примеры показывают, что для таких простых областей, как полуплоскость, полоса, слой, круг, сфера и многих других, нормализованные уравнения получаются путем введения простых нормировочных множителей. Оказывается, что применение некоторых достаточно полных систем  $R$ -функций позволяет перенести

это их свойство нормализованности и на случай сложных чертежей, для которых упомянутые простые области являются опорными. Пусть есть некоторая система областей  $\{\Sigma_i = (\sigma_i \geq 0)\}$ , уравнения  $\sigma_i = 0$  границ которых нормализованы до первого порядка:  $\frac{\partial\sigma_i}{\partial\nu_i} = 1$  на  $\partial\Sigma_i$ . Тогда при использовании систем  $R$ -функций  $\mathfrak{R}_\rho$ ,  $\mathfrak{R}$  и некоторых других (§ 4) для построения функций  $\omega = f(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$  получим  $\frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 1$  на  $\partial\Omega$ , где  $\nu$  — нормаль к  $\partial\Omega$ , направленная в область  $\Omega$ . Таким образом, если уравнения  $\sigma_i(x) = 0$  опорных областей нормализованы до первого порядка, то автоматически оказывается нормализованным (в регулярных точках) и уравнение  $\omega(x) = 0$  границы сложной области  $\Omega$ . Более того, если использовать систему  $\mathfrak{R}_\rho$  при  $\rho > m + 1$ , то из нормализованности опорных неравенств  $\sigma_i(x) \geq 0$  до порядка  $m$  следует нормализованность до порядка  $m$  и уравнения  $\omega(x) = 0$ . В частности, используя нормальные уравнения сторон многоугольника и систему  $R$ -операций  $x_1 \bigwedge_p x_2, x_1 \bigvee_p x_2$  ( $p > m + 1$ ) по описанным в § 18 гл. 1 алгоритмам, можем получить уравнение многоугольника, нормализованное до порядка  $m$ . Аналогично можно получать нормализованные до  $m$ -го порядка уравнения многогранников.

**Пример 3.** Пусть требуется написать нормализованное (в регулярных точках) уравнение границы области  $\Omega$ , изображенной на рис. 66.

В качестве опорных областей выберем области, предварительно нормализовав их уравнения по формулам (2.274) и (2.275):

$$\Sigma_1 = \left[ \frac{1}{2\pi} (\pi^2 - x_1^2 - x_2^2) \geq 0 \right] \text{ (круг радиуса } \pi \text{ с центром в начале координат);}$$

динат);

$\Sigma_2 = \left\{ \left[ \frac{1}{4} - x_1^2 - (x_2 - 1)^2 \right] \geq 0 \right\}$  (круг радиуса  $1/2$  с центром в точке  $(0, 1)$ );

$\Sigma_3 = \left\{ \frac{x_2 - \sin x_1}{\sqrt{1 + \cos^2 x_1}} \geq 0 \right\}$  (область выше синусоиды  $x_2 = \sin x_1$ );

$\Sigma_4 = (x_2 - 2 \geq 0)$  (полуплоскость выше прямой  $x_2 = 2$ );

$\Sigma_5 = (-x_1 \geq 0)$  (левая полуплоскость);

$\Sigma_6 = (x_1 - 2 \geq 0)$  (полуплоскость правее прямой  $x_1 = 2$ ).

Область  $\Omega$  можно задать логической формулой

$$\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_3 \wedge \bar{\Sigma}_2 \wedge \bar{\Sigma}_6 \wedge (\bar{\Sigma}_4 \wedge \bar{\Sigma}_5) = \Sigma_1 \wedge \Sigma_3 \wedge \bar{\Sigma}_2 \wedge \bar{\Sigma}_6 \wedge (\bar{\Sigma}_4 \vee \bar{\Sigma}_5). \quad (2.280)$$

Воспользуемся достаточно полной системой  $R$ -операций  $\mathfrak{R}_0$ . Нормализованное уравнение границы  $\partial\Omega$  получим в виде

$$\omega(x) \equiv \left\{ \left[ \frac{1}{2\pi} (\pi^2 - x_1^2 - x_2^2) \wedge_0 \frac{x_2 - \sin x_1}{\sqrt{1 + \cos^2 x_1}} \right] \wedge_0 \left[ x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - \frac{1}{4} \right] \wedge_0 (2 - x_1) \right\} \wedge_0 [(2 - x_2) \vee_0 x_1] = 0. \quad (2.281)$$

Очевидно,  $\omega(x)$  — обычная элементарная функция. Она равна нулю только в точках границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  и, кроме того, во всех гладких точках границы (т. е. там, где направление обычной нормали определено)  $\frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 1$ . Нетрудно представить, насколько сложнее получилось бы уравнение этой линии, если бы использовали формулу (2.274). (Заметим, что формулу (2.275) использовать в данном случае нельзя, так как всякое гладкое уравнение  $\omega_1 = 0$  границы  $\partial\Omega$  имеет градиент, обращающийся в нуль по крайней мере в одной внутренней точке  $\Omega$ ).

4. Описанная выше методика нормализации уравнений впервые была применена в работе [121] и с тех пор неоднократно использовалась многими авторами [128, 134, 135].

Рассмотрим вопрос о построении нормализованных до первого порядка уравнений элементов границ.

**Теорема 3.** Если  $\partial\Omega = (\omega = 0)$  — нормализованное до первого порядка уравнение границы  $\partial\Omega$ ,  $\Sigma = (\sigma \geq 0)$  — некоторая область, то

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\omega^2 \vee^* \bar{\sigma}} = 0, \quad (2.282)$$

где  $\vee^*$  есть  $\vee_\alpha$  ( $|\alpha| < 1$ ,  $\alpha \equiv \text{const}$ ),  $\vee_p$  ( $p \geq 2$ ),  $\vee_m^0$  ( $m > 1$ ) или другая  $R$ -дизъюнкция, удовлетворяющая условиям теоремы 2 § 6 гл. 2, является нормализованным (в регулярных точках) уравнением элемента  $\partial\Omega_1 = \partial\Omega \cap \Sigma$ .

**Доказательство.** Согласно (2.170) уравнение (2.282) есть уравнение  $\partial\Omega$ .

Пусть для определенности  $\vee^* = \vee_\alpha$ . Тогда при  $\sigma > 0$

$$\omega^2 \vee_\alpha \bar{\sigma} \equiv \frac{1}{1 + \alpha} (\omega^2 - \sigma + \sqrt{\omega^4 + \sigma^2 + 2\alpha\omega^2\sigma}) \equiv$$

$$\begin{aligned} &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left[ \omega^2 - \sigma + \sigma \left( 1 + \frac{2\alpha\omega^2\sigma + \omega^4}{\sigma^2} \right)^{1/2} \right] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left\{ \omega^2 - \sigma + \sigma \left[ 1 + \frac{2\alpha\omega^2}{\sigma} + o(\omega^2) \right] \right\} \equiv \omega^2 + o(\omega^2). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\omega_1 \equiv \sqrt{\omega^2 + o(\omega^2)} \equiv |\omega| + o(\omega)$ . Поэтому  $\frac{\partial \omega_1}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial v} \operatorname{sign} \omega + o(\omega)$ . Таким образом, учитывая, что  $\omega > 0$  в области  $\Omega$ , получаем  $\left( \frac{\partial \omega_1}{\partial v} \right) \Big|_{\omega=+0} = \pm \frac{\partial \omega}{\partial v} = \left| \frac{\partial \omega}{\partial v} \right| = 1$ , что и требовалось доказать.

*Замечание 1.* Если чертеж  $L$  есть соединение элементов  $L_i = \{\omega_i(x) = 0\}$ , а уравнения  $\omega_i(x) = 0$  нормализованы до первого порядка и  $\omega_i(x) > 0$  вне  $L_i$  (в интересующей нас области  $\Omega$ ), то нормализованное уравнение в регулярных точках элементов чертежа  $L$  может быть получено по формуле  $\bigwedge_{i=1}^m \omega_i(x) = 0$ . Отметим, что при использовании более простой формулы  $\prod_{i=1}^m \omega_i(x) = 0$  нормализованность уравнения  $L$  вообще нарушается.

**Пример 4.** Напишем нормализованное в регулярных точках уравнение пространственного чертежа  $L$ , изображенного на рис. 52. Предварительно, используя формулы (2.275), нормализуем неравенства, определяющие опорные области  $\Sigma_1 - \Sigma_5$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left[ \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2) \geq 0 \right]; \\ \Sigma_2 &= \left[ \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2) \geq 0 \right]; \\ \Sigma_3 &= (x_3 \geq 0); \\ \Sigma_4 &= \left[ -\frac{1}{c+d} (c - x_3)(x_3 + d) \geq 0 \right]; \\ \Sigma_5 &= \left[ \frac{1}{2r} (r^2 - x_1^2 - x_2^2) \geq 0 \right]. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая (2.173) и (2.174), получаем следующее нормализованное уравнение:

$$\begin{aligned} \omega(x) &\equiv \left\{ \left[ \left[ \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2) \wedge_0 \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2) \right] \wedge_0 x_3 \right] \vee_0 \right. \\ &\left. \vee_0 \left[ \frac{1}{2r} (r^2 - x_1^2 - x_2^2) \right] \right\}^2 \vee_0 \left[ \frac{1}{c+d} (x_3 - c)(x_3 + d) \right] = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение почти ничем не отличается (в смысле сложности формулы) от уравнения (2.174). Применение формулы (2.274) привело бы в этом случае к весьма сложным выкладкам.

5. Отметим некоторые результаты, касающиеся технологии использования теорем 1—7 § 6 и приведенных выше методик построения нормализованных уравнений. Пусть система  $R$ -операций

$$H = \{-1, \bar{x}, x_1 \wedge^* x_2, x_1 \vee^* x_2, x_1 \xrightarrow{*} x_2, x_1 \overset{*}{\sim} x_2, x_1 \nearrow^* x_2\} \quad (2.283)$$

удовлетворяет условиям (2.75) теоремы 7 § 6. Тогда справедлива теорема, некоторым образом обобщающая эту теорему.

**Теорема 4** [127]. Если  $\rho(x)$  есть суперпозиция системы  $H$  (2.74) такая, что каждый аргумент  $x_i$  имеет единственное вхождение в  $\rho(x)$ , а  $F(\rho) = \rho^\gamma + o(\rho^\gamma)$  ( $\gamma > 0$ ), то каковы бы ни были функции  $\varphi_j \in C^k$  ( $j = 1, \dots, m$ ), если выполняются условия

$$а) \varphi_i|_{x^0} \neq 0 \quad (i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m);$$

$$б) \varphi_i|_{x^0} = 0;$$

$$в) \rho(\varphi)|_{x^0} = 0,$$

то справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial^k}{\partial l_1 \dots \partial l_k} F[\rho(\varphi)]|_{x^0} = (-1)^s \frac{\partial^k F(\varphi)}{\partial l_1 \dots \partial l_k} \Big|_{x^0}, \quad (2.284)$$

где  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ ;  $l_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) — произвольные направления (не обязательно различные);  $s$  — некоторое целое число.

**Доказательство.** Используя формулы

$$x_1 \vee^* x_2 \equiv \overline{x_1 \wedge^* x_2}; \quad x_1 \xrightarrow{*} x_2 \equiv \overline{x_1 \wedge^* \bar{x}_2}; \quad x_1 \nearrow^* x_2 \equiv \overline{x_1 \wedge^* x_2},$$

исключим из суперпозиции  $\rho(x)$  операции  $x_1 \vee^* x_2$ ;  $x_1 \xrightarrow{*} x_2$ ;  $x_1 \nearrow^* x_2$ . Тогда функцию  $\rho(\varphi)$  можно представить в виде

$$\rho(\varphi) = (q_1 \xrightarrow{*} q_2)^{[k_1]} \wedge^* q_3^{[k_2]},$$

где  $q^{[k]} = (-1)^k q$ . Поскольку выполняется условие «в», в точке  $x^0$  либо  $q_3 = 0$ ,  $(q_1 \xrightarrow{*} q_2)^{[k_1]} > 0$ , либо  $q_1 \xrightarrow{*} q_2 = 0$ ,  $q_3^{[k_2]} > 0$ . В любом случае в силу теоремы 7 § 6 приходим к формуле  $\rho(\varphi) = \pm \varphi_j + O(\varphi_j^m)$ . Следовательно, справедлива формула (2.284).

6. Пусть  $\omega = 0$  — уравнение границы  $\partial\Omega$  некоторой области, а  $\sigma = 0$  — уравнение границы некоторой области  $\Sigma$ . Тогда для чертежа  $\partial\Omega \cap \Sigma$  справедливо уравнение (2.163), которое при  $\vee^* = \vee_\alpha$  имеет вид

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\omega^2 \vee_\alpha \sigma} = \sqrt{\frac{1}{1+\alpha} (\omega^2 - \sigma + \psi)}, \quad (2.285)$$

где  $\psi = \sqrt{\omega^2 + \sigma^2 + 2\alpha\omega\sigma}$ . В случае, когда  $\omega, \sigma \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , производная от  $\omega_1$  по произвольному направлению  $l$  имеет вид

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial l} = \frac{1}{2\sqrt{(1+\alpha)(\omega^2 - \sigma + \psi)}} \left[ \left( 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial l} - \frac{\partial \sigma}{\partial l} \right) \psi + 2\omega^3 \frac{\partial \omega}{\partial l} + \right. \\ \left. + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial l} + \alpha \left( 2\omega\sigma \frac{\partial \omega}{\partial l} + \omega^2 \frac{\partial \sigma}{\partial l} \right) \right]. \quad (2.286)$$

На  $\partial\Omega$  (при  $\omega = 0$  и при  $\sigma > 0$ ) в формуле (2.286) есть неопределенность типа  $0/0$ , затрудняющая ее численную реализацию. Поэтому ниже приводится формула, которая вне  $\Sigma$  позволяет использовать формулу (2.286), а внутри  $\Sigma$  — раскрывает упомянутую

неопределенность для производных

$$\rho = \frac{1}{2} (1 + \text{sign } \sigma) \rho^{(1)} + \frac{1}{2} (1 - \text{sign } \sigma) \rho^{(2)}, \quad (2.287)$$

где

$$\rho^{(1)} = \frac{\omega \text{ sign } \omega \sqrt{2\sigma}}{\sqrt{\psi - \omega^2 + \sigma}}; \quad (2.288)$$

$$\rho^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{1+\alpha} (\omega^2 - \sigma + \psi)}. \quad (2.289)$$

Непосредственным дифференцированием можно убедиться в том, что появляющаяся ранее особенность теперь отсутствует.

Теорема 4 дает возможность во многих случаях сократить затраты на вычисления при построении нормализованных уравнений чертежей. Так, вместо формулы

$$\omega \equiv \bigwedge_{i=1}^{i=m} \sqrt{\omega_i^2 \sqrt{\sigma_i}} = 0 \quad (2.290)$$

для нормализованного уравнения соединения чертежей  $\omega_i^2 \sqrt{\sigma_i} = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) можно использовать более простую формулу

$$\omega \equiv \sqrt{\bigwedge_{i=1}^{i=m} (\omega_i^2 \sqrt{\sigma_i})} = 0. \quad (2.291)$$

*Замечание 2.* Формулы, полученные в настоящем параграфе, позволяют получать уравнения самых сложных чертежей, нормализованные в регулярных точках чертежей. В точке стыка элементов, даже если эта точка является регулярной для чертежа  $L$ , нормализованность может и не выполняться. (Хотя во всех остальных точках чертежа, лежащих в малой окрестности такой точки, уравнение  $\omega = 0$  и будет нормализованным!)

**Пример 5.** Пусть  $\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2$ , где  $\Sigma_1 = \left( \frac{x_2 - x_1^3}{\sqrt{1 + 9x_1^2}} \geq 0 \right)$  — область, расположенная выше кубической параболы  $x_2 = x_1^3$ ;  $\Sigma_2 = (x_2 \geq 0)$  — верхняя полуплоскость.

Оба неравенства, определяющие области  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , — нормализованы (каждое на границе соответствующей ему области). Очевидно также, что граница  $\partial\Omega$  (рис. 67) гладкая. Уравнение  $\partial\Omega$  можем написать в виде

$$\omega \equiv \frac{x_2 - x_1^3}{\sqrt{1 + 9x_1^2}} \wedge_{\alpha} x_2 \equiv \frac{1}{1 + \alpha} \left[ \frac{x_2 - x_1^3}{\sqrt{1 + 9x_1^2}} + x_2 - \sqrt{\frac{(x_2 - x_1^3)^2}{1 + 9x_1^2} + x_2^2 - 2\alpha \frac{(x_2 - x_1^3) x_2}{\sqrt{1 + 9x_1^2}}} \right]. \quad (2.292)$$

Пусть  $x_1 = 0$ ;  $x_2 > 0$ , тогда

$$\omega(0, x_2) = \frac{1}{1 + \alpha} \left[ 2x_2 - \sqrt{2x_2^2 - 2\alpha x_2^2} \right] = \frac{x_2}{1 + \alpha} (2 - \sqrt{2 - 2\alpha}),$$

$$\frac{\partial \omega(0, x_2)}{\partial x_2} = \frac{2 - \sqrt{2 - 2\alpha}}{1 + \alpha}. \quad (2.293)$$

Таким образом, производная по нормали к  $\partial\Omega$  в точке  $(0, 0)$  будет равна единице, только если  $\alpha = 1$ . (Легко проверить, что в остальных точках  $\partial\Omega$  при любом  $\alpha \frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 1$ .) Это явление, на первый взгляд парадоксальное, — следствие того, что поверхность  $z = \omega(x)$  в окрестности точки  $(0, 0)$  имеет «морщину». Такие «дефекты» функции  $\omega(x)$ , если их своевременно не заметить и не принять меры к их устранению, могут причинить много неприятностей исследователю. Особенно это касается расчета физико-механических полей. В окрестности «морщинки», «излома» и другого «дефекта» может концентрироваться большая часть энергии (вследствие больших градиентов и кривизны) и аппроксимационные средства применяемого метода могут быть «израсходованы» на преодоление трудностей, которые с самого начала были созданы в результате неудачного построения функции  $\omega$  (или других функций, о которых речь пойдет далее).

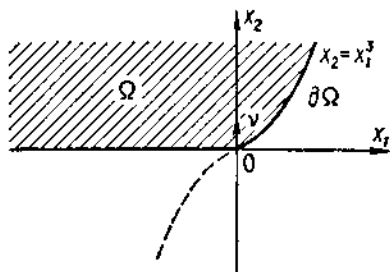


Рис. 67.

Покажем, как можно устранить отмеченный в примере 5 «дефект» функции.

Прежде всего можно было бы использовать  $R$ -конъюнкцию  $x_1 \wedge_1 x_2$ . Но хотя при этом и будет устранен дефект нормализованности в точке  $(0, 0)$ , функция  $\omega(x)$  окажется всего лишь непрерывной: появятся линии разрыва производных  $\omega(x)$ . Поэтому можно воспользоваться тем, что теорема 1 § 6 допускает возможность брать  $\alpha$  в виде некоторой функции, удовлетворяющей условию  $|\alpha| < 1$ . В данном случае удобно взять  $\alpha$  в виде

$$\alpha = [1 + (x_1^2 + x_2^2)^\gamma]^{-1}. \quad (2.294)$$

Тогда везде вне точки  $(0, 0)$   $\alpha < 1$ , а при стремлении  $\|x\| \rightarrow 0$   $\alpha \rightarrow 1$ , причем достаточно быстро, если  $\gamma$  достаточно велико. Вместо формулы (2.292) в этом случае получим

$$\omega + \frac{1 + (x_1^2 + x_2^2)^\gamma}{2 + (x_1^2 + x_2^2)^\gamma} \left\{ \frac{x_2 - x_1^3}{\sqrt{1 + 9x_1^2}} + x_2 - \sqrt{\frac{(x_2 - x_1^3)^2}{1 + 9x_1^2}} + x_2 - \frac{2(x_2 - x_1^3)x_2}{|1 + (x_1^2 + x_2^2)^\gamma| \sqrt{1 + 9x_1^2}} \right\}. \quad (2.295)$$

При  $x_1 = 0, x_2 > 0$  получим

$$\begin{aligned} \omega(0, x_2) &= \frac{1 + x_2^{2\gamma}}{2 + x_2^{2\gamma}} \left( 2x_2 - \sqrt{2x_2^2 - \frac{2x_2^2}{1 + x_2^{2\gamma}}} \right) = \\ &= \frac{1 + x_2^{2\gamma}}{2 + x_2^{2\gamma}} x_2 \left( 2 - \sqrt{2 - \frac{2}{1 + x_2^{2\gamma}}} \right). \end{aligned} \quad (2.296)$$

Тогда

$$\frac{\partial\omega(0, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1 + x_2^{2\gamma}}{2 + x_2^{2\gamma}} \left( 2 - \sqrt{2 - \frac{2}{1 + x_2^{2\gamma}}} \right) + O(x_2) \Big|_{x_2=0} = 1. \quad (2.297)$$

Нетрудно видеть, что в формуле (2.295) достаточно (и проще всего) взять  $\gamma = 1$ .

*Замечание 3.* Методика, примененная в примере 5 для нормализации уравнения чертежа в регулярной точке, являющейся точкой стыка элементов, не единственно возможная. Ценность описанной методики состоит в том, что она представляет собой регулярное правило (основанное на теореме § 6), гарантирующее требуемый эффект. В общем случае, если имеется  $s$  таких точек  $x^j$  ( $j = 1, \dots, s$ ), которые являются регулярными точками чертежа и в то же время находятся на стыке составляющих его элементов, можно применить ту же методику, взяв в качестве  $\alpha$  функцию

$$\alpha = \left[ 1 + \prod_{j=1}^s \|x - x^j\|^2 \right]^{-1}. \quad (2.298)$$

**Пример 6.** Написать нормализованное во всех регулярных точках границы уравнение чертежа  $\partial\Omega$  (рис. 68).

В качестве опорных областей выберем:

$$\Sigma_1 = \left\{ \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2) \geq 0 \right\} \text{ (вертикальная полоса, заключенная между прямыми } x_1 = \pm a);$$

$\Sigma_2 = (x_2 - b \geq 0)$  полуплоскость, расположенная выше прямой  $x_2 = b$ ;

$\Sigma_3 = (x_2 + c \geq 0)$  (полуплоскость, расположенная выше прямой  $x_2 = -c$ );

$\Sigma_4 = \left\{ \frac{1}{2d} (d^2 - x_1^2) \geq 0 \right\}$  (вертикальная полоса, заключенная между прямыми  $x_1 = \pm d$ );

$\Sigma_5 = \left\{ \frac{1}{2a} [a^2 - x_1^2 - (x_2 - b)^2] \geq 0 \right\}$  (круг радиуса  $a$  с центром в точке  $(0, b)$ );

$\Sigma_6 = \left\{ \frac{1}{2d} [d^2 - x_1^2 - (x_2 - b)^2] \geq 0 \right\}$  (круг радиуса  $d$  с центром в точке  $(0, b)$ );

$\Sigma_7 = (x_2 \geq 0)$  (верхняя полуплоскость).

Все выписанные неравенства нормализованы.

Логическую формулу для области  $\Omega$  возьмем в виде

$$\Omega = \{ (\Sigma_3 \wedge \bar{\Sigma}_2) \wedge \Sigma_4 \vee \Sigma_6 \wedge \{ (\Sigma_7 \wedge \bar{\Sigma}_2) \wedge \Sigma_1 \vee \Sigma_5 \}. \quad (2.299)$$

При переходе к обычному уравнению  $\omega(x) = 0$  границы  $\partial\Omega$  можно все символы  $\wedge$  в формуле (2.299) заменить символом  $\wedge_0$  простейшей  $R$ -конъюнкции и только символы  $\vee$  заменить на символы вида  $\vee_\alpha$ , выбирая  $\alpha$  переменным. А именно положим

$$\begin{aligned} \omega(x) \equiv & \left\{ \left\{ (x_2 + c) \wedge_0 (b - x_2) \right\} \wedge_0 \left[ \frac{1}{2d} (d^2 - x_1^2) \right] \right\} \vee_\alpha \\ & \vee_\alpha \left\{ \frac{1}{2d} [d^2 - x_1^2 - (x_2 - b)^2] \right\} \wedge_0 (-1) \left\{ \left[ x_2 \wedge_0 (b - x_2) \right] \wedge_0 \right. \\ & \left. \wedge_0 \left[ \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2) \right] \right\} \wedge_\beta \left\{ \frac{1}{2a} [a^2 - x_1^2 - (x_2 - b)^2] \right\} = 0, \quad (2.300) \end{aligned}$$

где

$$\alpha = (1 + [(x_1 + d)^2 + (x_2 - b)^2][(x_1 - d)^2 + (x_2 - b)^2])^{-1};$$

$$\beta = (1 + [(x_1 + a)^2 + (x_2 - b)^2][(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2])^{-1}. \quad (2.301)$$



*Замечание 4.* Вместо того чтобы выбирать  $R$ -операции с переменным  $\alpha$  в виде известной функции координат, иногда удобнее брать  $\alpha$  в формуле  $\omega_1 \wedge_\alpha \omega_2$  (или  $\omega_1 \vee_\alpha \omega_2$ ) зависящим от  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — выражения, содержащие опорные функции. Например, если принять

$$\alpha = [1 + \omega_1^2 + \omega_2^2]^{-1}, \quad (2.302)$$

то получим, что  $\alpha < 1$  везде, за исключением точки стыка элементов  $\omega_1 = 0$  и  $\omega_2 = 0$ . Выбор  $\alpha$  в виде (2.302) особенно удобен, если точки стыка заранее неизвестны или трудно определимы. Заметим, что с точки зрения вычислений использование формулы вида (2.302) не сложнее, чем использование формул, рассмотренных выше. Естественно, что вместо формулы (2.302) можно предложить много других конструкций функции  $\alpha$  с требуемыми свойствами. Их построение обычно не составляет труда.

*Замечание 5.* Остановимся на некоторых подходах, касающихся полной нормализации уравнений чертежей.

В тех случаях, когда удается построить нормальное уравнение чертежа, можно поступить следующим образом. Обычно нормальная функция  $f$  (например, для чертежа, состоящего из дуг окружностей и отрезков прямых, многогранников и др.) является  $H$ -реализуемой формулой, где  $H = \{x_1 + x_2; x_1 x_2; \sqrt{x}, x \geq 0; |x|; a \forall a \in \mathbb{R}\}$ , и недифференцируемой не только в точках чертежа  $L$ , но и в некоторых точках (на чертеже раздела) вне его. Пусть  $\omega = 0$ ,  $\omega \in C^m(\mathbb{R}^n)$  — какое-нибудь уравнение чертежа  $L$ . Возьмем базисную систему

$$H_1 = \{x_1 + x_2; x_1 x_2; \sqrt{x + \varepsilon \omega^{m+1}} \ (x \geq 0); \sqrt{x^2 + \varepsilon \omega^{2m+1}}; a \forall a \in \mathbb{R}\}, \quad (2.303)$$

где  $\varepsilon > 0$ , и в суперпозиции  $f$  произведем формальную замену  $\sqrt{x}$  на  $\sqrt{x + \varepsilon \omega^{m+1}}$ , а  $|x|$  заменим на  $\sqrt{x^2 + \varepsilon \omega^{2m+1}}$ . В результате получим функцию  $f_1 \in C^m(\mathbb{R}^n)$ . В то же время разность  $f - f_1$  в силу непрерывности функции  $f$  есть величина порядка  $\omega^{m+1}$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Поэтому на  $L$  будут выполняться условия нормализованности до  $m$ -го порядка, т. е.  $f_1 = 0$  есть нормализованное до  $m$ -го порядка уравнение  $L$ .

Заметим лишь, что необходим контроль за тем, чтобы вне  $L$  не появились нули у функции  $f_1$ . Устранить их можно, взяв  $\varepsilon$  достаточно малым (такая возможность следует из того, что вне  $L$   $f > 0$ ).

*Замечание 6.* Другой способ [117] полной нормализации до первого порядка опирается на некоторую модификацию формулы (2.282). Пусть  $\omega = 0$  — нормализованное уравнение чертежа  $L$ , а  $\Sigma = \{\sigma \geq 0\}$  — некоторая область, причем  $\sigma = 0$  — также нормализованное уравнение  $\partial\Sigma$ . Пусть  $L_1 = L \cap \Sigma$  и, кроме того,  $(\text{grad } \omega, \text{grad } \sigma) = 0$  в точках чертежа  $L \cap \partial\Sigma$ . Тогда формула

$$\omega_1 = \left\{ \left[ \frac{\sqrt{\sigma^2 + \omega^4} - \sigma}{2} \right]^2 + \omega^2 \right\}^{1/4} = 0 \quad (2.304)$$

представляет собой полностью нормализованное уравнение  $L_1$ . В справедливости этого можно убедиться путем непосредственного дифференцирования (2.304).

Т. И. Шейко [187] предложена более общая, чем (2.304), формула, позволяющая отказаться от предположения, что  $(\text{grad } \omega, \text{grad } \sigma) = 0$  на  $L \cap \partial \Sigma$ . А именно

$$\omega_1 \equiv \left\{ \left[ \frac{V \sigma_0^2 + \omega_0^4 - \sigma_0}{2} \right]^2 + \omega_0^2 \right\}^{1/2} = 0, \quad (2.305)$$

где

$$\sigma_0 = \sigma_1 - \omega_0 (\text{grad } \sigma_1, \text{grad } \omega_0); \quad (2.306)$$

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \lambda \omega^2}}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \mu \sigma^2}}. \quad (2.307)$$

Входящие в (2.307) постоянные  $\lambda > 0$  и  $\mu > 0$  используются как технологические постоянные. Сохраняется нормализованность соответствующих функций и, кроме того, при достаточно больших  $\lambda$  и  $\mu$  вычитаемое в формуле (2.306) мало и, следовательно, область  $\sigma_0 \geq 0$  будет мало отличаться от области  $\sigma > 0$ . Но главное, что обе эти области выделяют один и тот же элемент из чертежа  $\omega = 0$ , а условие  $(\text{grad } \sigma_0, \text{grad } \omega_0) = 0$  на  $L \cap \partial \Sigma$  выполняется автоматически. Действительно,

$$\begin{aligned} (\text{grad } \sigma_0, \text{grad } \omega_0) &= [\text{grad } \sigma_1 - \text{grad } \omega_0 (\text{grad } \sigma_1, \text{grad } \omega_0) + \\ &+ \omega_0 \text{grad } (\text{grad } \sigma_1, \text{grad } \omega_0)] \text{grad } \omega_0 \Big|_{\substack{\omega_0=0 \\ \sigma_1=0}} = \\ &= [(\text{grad } \sigma_1, \text{grad } \omega_0) - (\text{grad } \omega_0)^2 (\text{grad } \sigma_1, \text{grad } \omega_0)] \Big|_{\substack{\omega_0=0 \\ \sigma_1=0}} = 0. \end{aligned}$$

Ценность предложенной Т. И. Шейко формулы (2.305) состоит еще и в том, что впервые для построения уравнений привлекаются производные. Эта формула подсказывает нам, что есть еще какой-то неиспользованный аспект в решении обратной задачи аналитической геометрии. Другие моменты, касающиеся построения полностью нормализованных чертежей, включены в приведенные ниже упражнения.

*Упражнения.* 1. Написать нормализованные в регулярных точках уравнения чертежей, рассмотренных в примерах 1—10 § 11 и 1—3 § 13.

2. Доказать, что уравнение

$$\begin{aligned} \{2(x_1^2 + x_2^2 + 1) - [(x_1 - 1)^4 + (x_1 + 1)^4 + 2((x_1 - 1)^2 + \\ + (x_1 + 1)^2)x_2^2 + 2x_2^4]^{1/2}\}^{1/2} = 0 \end{aligned}$$

полностью нормализованное уравнение чертежа  $L$ , представляющего собой соединение точек  $(1, 0)$  и  $(-1, 0)$ .

3. Чертеж  $L \subset \mathbb{R}^n$  состоит из  $m$  точек  $x^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Написать полностью нормализованное уравнение  $L$ .

4. Участок синусоиды  $x_2 = \sin x_1$ , соответствующий интервалу  $[0, \pi]$ , продолжен влево и вправо касательными в точках  $(0, 0)$  и  $(\pi, 0)$  соответственно. Написать полностью нормализованное уравнение полученного чертежа.

5. Чертеж  $L \subset \mathbb{R}^n$  представляет собой соединение не пересекающихся между собой чертежей  $L_i = (\omega_i = 0)$  ( $i = 1, \dots, s$ ), где уравнения  $\omega_i = 0$  — полностью нормализованы до  $m$ -го порядка. Написать полностью нормализованное до  $m$ -го порядка уравнение чертежа  $L$ .

6. Пусть  $L_i = [f_i(x) = 0]$  ( $i = 1, 2$ ) — уравнения пересекающихся плоскостей в  $\mathbb{R}^3$ :

$$\varphi_i(x) = [f_1(x) + (-1)^i f_2(x)] \{ [f_1(e_1) + (-1)^i f_2(e_1) - f_1(0) - (-1)^i f_2(0)]^2 + [f_1(e_2) + (-1)^i f_2(e_2) - f_1(0) - (-1)^i f_2(0)]^2 + [f_1(e_3) + (-1)^i f_2(e_3) - f_1(0) - (-1)^i f_2(0)]^2 \}^{-1/2} \quad (x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3), \quad (2.308)$$

где  $i = 1, 2$ . Показать, что полностью нормализованным до любого порядка уравнением линии пересечения плоскостей  $L_1$  и  $L_2$  является уравнение

$$\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} = 0. \quad (2.309)$$

## § 22. Полиномиальные уравнения чертежей, близких к полуалгебраическим чертежам

В § 12 показано, что базисная система  $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, a \forall a \in \mathbb{R}\}$  не является алгоритмически полной. Это означает, например, что для такого чертежа, как многоугольник или многогранник, не существует точного уравнения  $\omega = 0$ , где  $\omega$  — целая рациональная функция (полином). В то же время представляет некоторый интерес задача построения полиномиальных уравнений  $P_m(x) = 0$  для чертежей, близких к заданным полуалгебраическим чертежам. Для двумерного пространства такая задача решается сравнительно просто, например, есть теоремы, касающиеся возможности аппроксимировать любую замкнутую кривую лемикаской [150]. Однако даже в этом случае алгоритмическая сторона вопроса остается весьма трудной. В трехмерном случае задача представлялась настолько сложной, что по настоящему фактически не ставилась. Конечно, из известной теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций полиномами легко получить как следствие существования сколь угодно хороших полиномиальных уравнений для поверхностей, близких к многогранникам. Но как практически осуществить построение таких уравнений, — ответа на этот вопрос по существу не было.

Между тем описанная в предыдущих параграфах методика точного построения уравнений чертежей, составленных из элементов элементарных чертежей, вполне может быть использована для решения поставленной задачи, если использовать полиномиальные аппроксимации  $R$ -функций. При этом не имеет значения размерность пространства, в котором рассматривается данный геометрический объект.

Пусть  $\Sigma_i = [\sigma_i(x) \geq 0]$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — система опорных алгебраических областей в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $\text{grad } \sigma_i(x) \neq 0$  при  $\sigma_i(x) = 0$ , а  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область, сформированная из областей  $\Sigma_i$  в соответствии с логической (трехзначной) формулой  $\Omega = F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m)$ , где  $F \in \mathcal{S}_3^1$ . Не нарушая общности рассуждений,

можно считать, что  $F$  есть суперпозиция системы  $H^* = \{X, X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2, 0\}$ . Пусть  $d$  — диаметр области  $\Omega$ . Функции  $\sigma_i(x)$  умножим на нормировочные положительные константы

$$\gamma_i = \frac{1}{d} \max_{x \in \Omega} \sigma_i(x).$$

Тогда получим неравенства для опорных областей в виде

$$\Sigma_i = [\sigma_i^*(x) = \gamma_i \sigma_i(x) \geq 0] \quad (i = 1, \dots, m).$$

Произведем согласно методике § 10 формальную замену в формуле  $F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m)$  символов  $\Sigma_i$  формулами  $\sigma_i^*(x)$ , а символов системы  $H^*$  соответствующими символами достаточно полной системы  $R$   $\{-1, 1\}$ -функций (2.107). Поскольку каждая из функций  $\sigma_i^*$ , входящих в полученную формулу, в рассматриваемой области  $\Omega$  не превосходит по абсолютному значению единицы и как следствие этого же значения не превосходит результат каждой из операций (2.107), в итоге эти операции будут «срабатывать» как полиномиальные  $R$ -операции. Получается функция  $\omega_\epsilon(x)$  (где  $\omega_\epsilon(x)$  — полином) такая, что уравнение  $\omega_\epsilon(x) = 0$  есть уравнение чертежа  $L_\epsilon$ , который тем меньше отличается от  $\partial\Omega$ , чем меньше  $\epsilon$ , т. е.  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} L_\epsilon = \partial\Omega$ .

Описанный подход к построению полиномиальных аппроксимаций уравнений сложных чертежей, впрочем, как и вопрос о построении полиномиальных аппроксимаций  $R$ -функций, мало исследован. Можно сформулировать ряд вопросов оптимизации: о построении при заданной точности аппроксимации чертежа (в том или ином смысле) полиномиальных уравнений наименьшего порядка; о наилучшей аппроксимации чертежа при фиксированной степени полинома и т. д.

В заключение обратим внимание на замечание 2 § 12, свидетельствующее о возможности точного построения для полуалгебраических чертежей уравнений  $\omega = 0$  класса  $C^m(\mathbb{R}^n)$ , где  $\omega$  — полиномиальный сплайн.

*Упражнение.* 1. Написать с точностью до 0,1% полиномиальное уравнение границы области, представляющей соединение двух кругов единичного радиуса, расстояние между центрами которых равно единице.

2. Предложить алгоритм и составить программу построения полиномиальных уравнений границ областей в  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) с заданной точностью  $\epsilon$ . В качестве погрешности аппроксимации взять величину  $\max \|x - x^0\|$ , где  $x \in L_\epsilon$ ,  $x^0 \in L$  и  $x^0$  есть точка противостояния точки  $x$  на данном чертеже  $L$ .

### § 23. Автоматическое построение уравнений чертежей

Описанная выше методика построения уравнений чертежей, в том числе нормализованных до первого порядка, представляет собой хорошую теоретическую (и технологическую) основу для автоматизации самого процесса составления этих уравнений. В дальнейшем будет показано, что во многих случаях требуется не только построение самих уравнений  $\omega(x) = 0$  чертежей, но и нахождение одновременно частных производных от функции  $\omega(x)$  до заданного порядка, и нет смысла разделять эту задачу на две части — построение уравнений и их дифференцирование. Однако в настоящем параграфе для простоты изложения удобно отвлечься от второй проблемы и рассматривать лишь автоматическое построение уравнений чертежей.

Из результатов § 10 и 12 следует, что автоматизировать фактически нужно лишь процесс построения предикатных уравнений, так как переход от этих уравнений к обычным уравнениям чертежей выполняется формально заменой символов функций логики соответствующими символами  $R$ -функций, а символов областей — левыми частями соответствующих им неравенств.

Входной информацией для алгоритма, автоматизирующего процесс построения уравнения чертежа (из некоторого множества), должен быть тот или иной код чертежа. От выбора способа кодирования часто зависит сложность алгоритма, поэтому этот вопрос имеет важное значение в задаче построения уравнений сложных геометрических объектов. И, конечно, способ кодирования существенно зависит от того, какое множество чертежей рассматривается.

Например, если рассматриваются чертежи, состоящие из конечного числа отрезков прямых, то естественно выписать последовательность строк  $x^i$ ,  $x^{i2}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), где  $x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$ , а  $m$  — общее количество отрезков. Если множество рассматриваемых чертежей есть множество многоугольников на плоскости  $\mathbb{R}^2$  и необходимо построить такую функцию  $\omega(x)$ , которая была бы строго положительной внутри многоугольника, отрицательной вне его и равной нулю на его границе, то естественно задать последовательность координат вершин многоугольника с соблюдением левого (или правого) его обхода. Для чертежей, состоящих из дуг окружностей, достаточно задавать по три точки каждой дуги (включая ее концы), для дуг парабол — по четыре точки и т. д.

Заметим, что переход от числового кода чертежа к его предикатному уравнению осуществить не всегда легко, особенно если речь идет об автоматизации процесса на ЭВМ (см. § 18 гл. 1). Здесь рассмотрим некоторые практически важные примеры чертежей, для которых такая автоматизация сравнительно просто реализуется.

**1. Уравнения многоугольников.** В § 18 гл. 1 описан алгоритм построения предикатных уравнений многоугольников. Оказалось, что для написания предикатного уравнения многоугольника достаточно использовать функции  $X_1 \wedge X_2$  и  $X_1 \vee X_2$  трехзначной логики. Предикатное уравнение многоугольника имеет вид

$$F \{S_3(\omega_1), \dots, S_3(\omega_m)\} = \delta, \quad (2.310)$$

где  $F$  — суперпозиция  $X_1 \wedge X_2$  и  $X_1 \vee X_2$ , а  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — левые части так называемых ориентированных уравнений прямых, которым принадлежат соответствующие стороны многоугольника;  $\delta$  равно двум, нулю или единице в зависимости от того, требуется получить внутреннюю или внешнюю области многоугольника или его границу.

Переход от предикатного уравнения к уравнению многоугольника в том смысле, какой принят в аналитической геометрии (§ 9), можно осуществить следующим образом: заменить символы  $\wedge$  и  $\vee$  символами  $\wedge_0$  и  $\vee_0$  (или символами других таких же  $R$ -операций), а вместо  $S_3(\omega_i)$  писать  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Если полученное выражение

$\omega(x)$  приравнять нулю, получим уравнение границы  $\omega(x) = 0$  рассматриваемого многоугольника, а неравенства  $\omega(x) > 0$  и  $\omega(x) < 0$  будут определять соответственно его внутренность и внешность. Отметим некоторые особые случаи построения уравнений.

Пусть, например, необходимо написать уравнение четырехугольника  $ABCD$  с разрезом  $EF$  (рис. 69, а). Этот четырехугольник можно рассматривать как предельный случай многоугольника  $AEFE_1BCD$  (рис. 69, б), когда точка  $E_1$  стремится к точке  $E$ . Однако

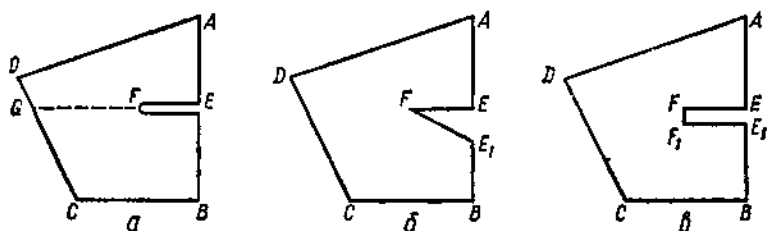


Рис. 69.

если написать уравнение этого многоугольника, воспользовавшись описанным выше методом, то, устремив точку  $E_1$ , к точке  $E$ , получим уравнение четырехугольника с разрезом  $EG$ , а не  $EF$ . Уравнение четырехугольника с требуемым разрезом можно получить, если рассматривать его как предел многоугольника  $AEFF_1E_1BCD$  (рис. 69, в), когда точка  $F_1$  стремится к точке  $F$ , а точка  $E_1$  — к точке  $E$ . При этом, конечно, необходимо соблюдать определенную осторожность, так как при стремлении точки  $F_1$  к точке  $F$  ориентированное уравнение прямой  $FF_1$ , написанное по формуле (1.174), превращается в тождество  $0 \equiv 0$ . Чтобы избежать этого, можно использовать нормальное ориентированное уравнение прямой  $FF_1$  (1.178). В этом уравнении коэффициенты при текущих координатах  $x_1$  и  $x_2$  и свободный член не будут изменяться, если точка  $F_1$  стремится к точке  $F$  вдоль прямой, положение которой фиксировано.

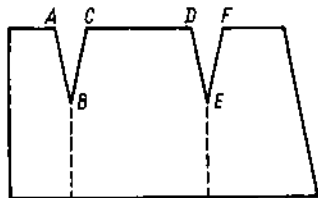


Рис. 70.

Выберем направление прямой  $F_1F$  перпендикулярным к отрезку  $FE$ . Тогда уравнение этой прямой не будет изменяться при перемещении вдоль нее точки  $F_1$ , а в предельном случае, когда точка  $F_1$  совпадет с  $F$ , а также  $E_1$  с  $E$ , разрез вдоль отрезка  $GF$  не появится. Подобную процедуру корректировки уравнения многоугольника целесообразно применять не только тогда, когда рассматривается многоугольник с разрезами, но и в том случае, когда многоугольник имеет узкие врезы (рис. 70).

Если  $\omega(x) = 0$  есть уравнение такого многоугольника, построенное по обычной методике, то ввиду непрерывной зависимости функции  $\omega$  от координат вершин многоугольника при достаточно

малых углах врезов ее значения будут достаточно малы в точках, лежащих на продолжениях биссектрис углов  $ABC$  и  $DEF$  (штриховые линии на рис. 70). Такое поведение функции  $\omega$  может оказаться по тем или иным причинам нежелательным. Чтобы устранить этот недостаток, можно добавить в точках  $B$  и  $E$  перпендикуляры (или близкие к ним прямые) к соответствующим биссектрисам и включить их в обычную схему построения уравнения многоугольника, считая, что на этих прямых лежат соответственно отрезки  $BB$  и  $EE$ , выродившиеся в точки.

**Пример 1.** Написать уравнение треугольника  $ABC$  с разрезом  $AO$  (рис. 71).

Нормальные ориентированные уравнения сторон  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ ,  $AO$  и  $OA$  соответственно такие:

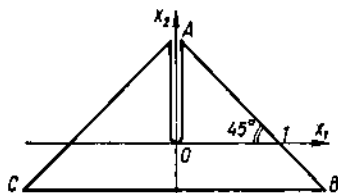


Рис. 71.

$$\omega_1 \equiv -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \sqrt{2} = 0;$$

$$\omega_2 \equiv \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \sqrt{2} = 0; \quad \omega_3 \equiv x_2 + 1 = 0; \quad \omega_4 \equiv x_1 = 0;$$

$$\omega_5 \equiv -x_1 = 0. \quad (2.311)$$

Добавим к уравнениям (2.311) уравнение прямой, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно к разрезу  $AO$ . В данном случае это ось абсцисс, ориентированное уравнение которой следующее:

$$\omega_6 \equiv -x_2 = 0. \quad (2.312)$$

Действуя согласно методу, описанному в § 18 гл. I, предикатное уравнение рассматриваемого многоугольника получим в виде

$$S_3(\omega_2) \wedge S_3(\omega_3) \wedge S_3(\omega_1) \wedge [S_3(\omega_4) \vee S_3(\omega_5) \vee S_3(\omega_6)] = 1. \quad (2.313)$$

Обычное уравнение имеет вид

$$\{(\omega_2 \wedge_0 \omega_3) \wedge_0 \omega_1\} \wedge_0 \{(\omega_4 \vee_0 \omega_5) \vee_0 \omega_6\} = 0$$

или

$$\omega \equiv \left\{ \left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \sqrt{2} \right) \wedge_0 (x_2 + 1) \right] \wedge_0 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \sqrt{2} \right) \right\} \wedge_0 \{ [x_1 \vee_0 (-x_2)] \vee_0 (-x_1) \} = 0. \quad (2.314)$$

Заметим, что полученная таким путем функция  $\omega$  (2.314) не будет обладать симметрией относительно оси  $Ox_2$  (т. е.  $\omega(-x_1, x_2) \neq \omega(x_1, x_2)$ ), несмотря на симметрию самого чертежа. Функцию  $\omega$  можно сделать симметричной в указанном смысле, если вместо  $R$ -операций  $x_1 \wedge_0 x_2$ ,  $x_1 \vee_0 x_2$  взять соответствующие ассоциативные  $R$ -операции. Другой путь обеспечить симметрию уравнения состоит в том, что сохраняются в уравнении (2.314)  $R$ -операции  $\wedge_0$ ,  $\vee_0$ , но по другому расставляются скобки. А именно

$$\omega \equiv \left\{ \left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \sqrt{2} \right) \wedge_0 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \sqrt{2} \right) \right] \wedge_0 \wedge_0 (x_2 + 1) \right\} \wedge_0 \{ [x_1 \vee_0 (-x_1)] \vee_0 x_2 \} = 0. \quad (2.315)$$

Симметричное вхождение компонент в формулу (2.316) обеспечивает требуемую симметрию функции  $\omega$ .

**Пример 2.** Написать уравнение семиугольника  $ABCDOFE$  (рис. 72), если угол  $DOF = 2\alpha$  мал и необходимо, чтобы при  $\alpha \rightarrow 0$  семиугольник вырождался в квадрат с разрезом вдоль отрезка  $[0, 1]$  оси  $Ox_1$ .

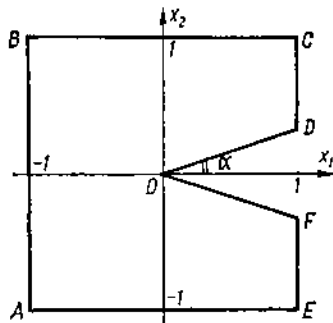


Рис. 72.

Ориентированные уравнения сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DO$ ,  $OF$ ,  $FE$  и  $EA$  семиугольника имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}\omega_1 &\equiv x_1 + 1 = 0; & \omega_2 &\equiv -x_2 + 1 = 0; \\ \omega_3 &\equiv -x_1 + 1 = 0; & \omega_4 &\equiv x_2 - x_1 \operatorname{tg} \alpha = 0; \\ & & \omega_5 &\equiv -x_2 - x_1 \operatorname{tg} \alpha = 0; \\ \omega_6 &\equiv -x_1 + 1 = 0; & \omega_7 &\equiv x_2 + 1 = 0.\end{aligned}$$

Кроме того, добавим ориентированное уравнение  $\omega_8 \equiv -x_1 = 0$  перпендикуляра к биссектрисе угла  $FOD$ . Поступая так же, как и в предыдущем примере, требуемое уравнение получаем в виде

$$\begin{aligned}\omega(x_1, x_2) &\equiv \{[(x_1 + 1) \wedge_0 (-x_2 + 1) \wedge_0 (-x_1 + 1)] \wedge_0 [(x_2 - x_1 \operatorname{tg} \alpha) \vee_0 (-x_1)] \vee_0 (-x_2 - x_1 \operatorname{tg} \alpha)\} \wedge_0 \\ &\wedge_0 [(-x_1 + 1) \wedge_0 (x_2 + 1)] = 0.\end{aligned}\quad (2.316)$$

**2. Уравнение чертежа, состоящего из отрезков прямых.** При построении уравнения  $\omega(x) = 0$  многоугольника  $\Omega$  на плоскости необходимо было заботиться о том, чтобы функция  $\omega(x)$  была положительна внутри  $\Omega$  и отрицательна вне  $\Omega$ . Если требуется, чтобы функция  $\omega(x)$  была равна нулю в тех (и только тех) точках, которые принадлежат границе многоугольника, то задача существенно упрощается. Более того, как будет показано ниже, в этом случае безразлично, рассматривается ли многоугольник или любой другой чертеж, состоящий из отрезков прямых. Кроме того, такой чертеж может рассматриваться в пространстве любой размерности.

Пусть  $x^1 x^2$  — отрезок в  $\mathbb{R}^n$ . Согласно (1.178) уравнение (нормальное) прямой, проходящей через точки  $x^1$  и  $x^2$ , будет

$$h_i(x) \equiv \frac{1}{2l} \{(\|x - x^1\|^2 - (l - \|x - x^2\|)^2) [(l + \|x - x^2\|)^2 - \|x - x^1\|^2]\}^{\frac{1}{2}}.\quad (2.317)$$

Отрезок  $x^1 x^2$  может быть выделен из прямой (2.317) гипершаром

$$\sigma_i \equiv \left\{ \frac{l}{l} \left[ \frac{l^2}{4} - \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_k)^2 \right] \geq 0 \right\} \quad (l = \|x^1 - x^2\|),$$

где  $\bar{x} = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$ . Тогда согласно (2.304) полностью нормализованное уравнение отрезка  $x^1 x^2$  будет

$$\omega(x) \equiv \sqrt{\left( \frac{\sqrt{\sigma^2 + h^4} - \sigma}{2} \right)^2 + h^2} = 0.$$



Пусть  $L$  есть соединение отрезков  $x^i x^2, (i = 1, \dots, m)$ , а  $\xi_k (k = 1, \dots, s)$  — множество точек, общих хотя бы для одной из пар указанных отрезков. Положим что

$$\alpha(x) = \left[ 1 + \prod_{k=1}^s \|x - \xi_k\|^2 \right]^{-1},$$

и для построения уравнения чертежа  $L$  применим формулу (2.291), используя  $R$ -конъюнкцию  $x_1 \wedge_{\alpha} x_2$ . В результате получим полностью нормализованное уравнение чертежа  $L$ . Другой подход к построению такого уравнения описан в замечании 5 § 21.

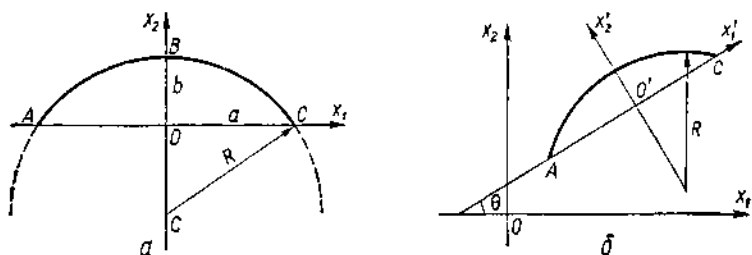


Рис. 73.

Заметим, что вместо применения операции  $x_1 \wedge_{\alpha} x_2$  можно было бы воспользоваться обычным умножением и написать уравнение чертежа  $L$  в виде

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^m \omega_i(x). \quad (2.318)$$

Однако при этом нарушилась бы нормализованность и, кроме того, в точках, удаленных от чертежа  $L$ , приходилось бы находить произведение  $m$  сомножителей, больших по своему значению, и при большом  $m$  получать астрономические величины. Применение же операции  $x_1 \wedge_{\alpha} x_2$  в силу очевидного неравенства

$$\begin{aligned} x_1 \wedge_{\alpha} x_2 &< x_1 \wedge_1 x_2 + \frac{1-\alpha}{2(1+\alpha)} (x_1 + x_2) = \\ &= \min(x_1, x_2) + \frac{1-\alpha}{2(1+\alpha)} (x_1 + x_2) \end{aligned}$$

не приводит к существенному росту функции  $\omega(x)$  при удалении от чертежа  $L$ .

**3. Уравнение чертежа на плоскости, состоящего из дуг окружностей.** Дуга окружности вполне определяется заданием координат ее концов и координат какой-либо промежуточной точки (например, средней). Рассмотрим вначале дугу  $ABC$  (рис. 73, а). Радиус и ординату  $c$  центра окружности находим по формулам

$$R = \frac{a^2 + b^2}{2b}; \quad c = \frac{b^2 - a^2}{2b}. \quad (2.319)$$

Дугу  $ABC$  будем рассматривать как элемент, выделяемый из чертежа, описываемого уравнением

$$\omega_1 \equiv \frac{1}{2R} [R^2 - x_1^2 - (x_2 - c)^2] = 0, \quad (2.320)$$

областью  $\sigma \equiv x_2 \geq 0$ . Согласно (2.164) уравнение дуги  $ABC$  получаем в виде

$$\psi(x, a, b) \equiv \sqrt{\frac{1}{4R^2} [R^2 - x_1^2 - (x_2 - c)^2]^2 + x_2^2} - x_2 = 0. \quad (2.321)$$

(Заметим, что применение формулы (2.304) обеспечило бы полную нормализованность уравнения дуги  $ABC$ .)

Рассмотрим дугу  $ABC$ , произвольно расположенную на плоскости  $x_1Ox_2$ . Уравнение (2.321) можно рассматривать как уравнение дуги  $ABC$  в подвижной системе координат  $x'_1O'x'_2$  (рис. 73, б), положение которой относительно неподвижной системы определяется параметрами  $x'_1, x'_2, \theta$  ( $O'$  ( $x'_1, x'_2$ )). Координаты  $x'_1, x'_2$  точек в подвижной системе связаны с координатами  $x_1, x_2$  в неподвижной системе формулами

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \end{pmatrix}. \quad (2.322)$$

Пусть заданы координаты относительно неподвижных осей координат концов  $A$  ( $x_1^1, x_2^1$ ),  $C$  ( $x_1^3, x_2^3$ ) и середины  $B$  ( $x_1^2, x_2^2$ ) дуги  $ABC$ . Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \frac{x_1^1 + x_1^3}{2}; & x_2^0 &= \frac{x_2^1 + x_2^3}{2}; & \cos \theta &= \frac{x_1^3 - x_1^1}{\|x^3 - x^1\|}; \\ \sin \theta &= \frac{x_2^3 - x_2^1}{\|x^3 - x^1\|}; & a &= \frac{1}{2} \|x^3 - x^1\|; & b &= \|x^2 - x^0\|. \end{aligned} \quad (2.323)$$

Заменяя в уравнении (2.321)  $x_1$  и  $x_2$  соответствующими правыми частями формул (2.322) и используя (2.323), получаем уравнение вида

$$\psi(x, x^1, x^2, x^3) = 0, \quad (2.324)$$

которое будет уравнением дуги  $ABC$ , произвольно расположенной на плоскости  $x_1Ox_2$ . Приняв формулу (2.324) в качестве стандартной для любой дуги на плоскости, можем написать уравнение произвольного чертежа  $L$ , представляющего собой соединение дуг, заданных точками  $A_i$  ( $x_1^{1i}, x_2^{1i}$ ),  $B_i$  ( $x_1^{2i}, x_2^{2i}$ ),  $C_i$  ( $x_1^{3i}, x_2^{3i}$ ). При этом можно использовать формулу (2.166) или (2.167). (Замечание, сделанное в предыдущем пункте относительно нормализованности полученного уравнения, сохраняется.)

4. *Метод стандартных элементов.* Описанный в пунктах 2 и 3 метод назовем *методом стандартных элементов*. Он применим для автоматизации построения уравнений не только чертежей,

состоящих из дуг окружностей и отрезков прямых, но и для чертежей, составленных из элементов другой природы (дуги парабол и гипербол, элементы поверхностей и т. п.), для которых удастся написать уравнение общего вида, определяемое числовым кодом элемента. Нетрудно, например, автоматизировать построение уравнений чертежей в трехмерном пространстве, составленных из плоских элементов многоугольной формы. Действительно, располагая алгоритмом построения уравнений многоугольников (с распознаванием их внутренней и внешней области), легко получить уравнение пластинки многоугольной формы на плоскости  $x_1Ox_2$ , которое затем можно преобразовать с помощью переноса и поворота осей координат в уравнение многоугольной «пластинки» произвольного расположения в пространстве. После этого по описанной выше методике можно получить уравнение чертежа, состоящего из  $m$  «пластинок».

В заключение отметим, что если ставится задача автоматизации построения уравнений границ областей и необходимо различать внешнюю область от внутренней, то нельзя механически использовать метод, применявшийся выше для многоугольных областей. Дело в том, что, как уже отмечалось в § 11, для немногочисленных областей может оказаться недостаточно тех областей, которые соответствуют элементам границы, и необходимо введение каких-то дополнительных опорных областей. А это в принципе процесс трудно формализуемый. Ряд результатов в этом направлении получен в работах [33, 177, 188].

*Упражнения и задачи.* 1. Предложить алгоритм построения нормализованных уравнений многогранников.

2. Предложить алгоритм построения полностью нормализованных уравнений чертежей на плоскости, состоящих из конечного числа дуг кривых второго порядка.

#### § 24. Учет симметрии чертежей при построении их уравнений

В физике твердого тела, электродинамике, строительной механике, теплофизике, биологии встречаются геометрические формы, обладающие той или иной симметрией. Учет симметрии во многих случаях приводит к значительному упрощению проблем исследования, а иногда позволяет получать точные результаты, вытекающие из общих свойств явлений и не связанных с конкретной моделью. В этом отношении достаточно упомянуть такие хорошо известные области, как теория кристаллического поля, расчеты спектров в электронике и др.

Понятие симметрии для чертежей можно ввести следующим образом. Пусть  $L$  — некоторый чертеж в  $\mathbb{R}^n$ , а  $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — преобразование, определяемое формулой

$$x' = Qx = Ax + b, \quad (2.325)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$ ;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.326)$$

есть линейное преобразование координат, сохраняющее модуль всякого вектора:

$$\|Ax - Ay\| = \|x - y\|. \quad (2.327)$$

(В трехмерном пространстве, например, такое преобразование можно представить в виде последовательности перемещений чертежа  $L$  как жесткого целого и зеркальных отражений его в некоторых плоскостях.)

Пусть  $\{Q_i\}$  — множество всех преобразований указанного выше вида. Относительно операции композиции  $Q_1 \circ Q_2$  (или короче  $Q_1 Q_2$ ) множество  $\{Q_i\}$  является группой. Ассоциативный закон  $Q_1(Q_2 Q_3) = (Q_1 Q_2) Q_3$  следует из ассоциативного закона для умножения матриц. Единицей этой группы является единичная матрица  $I$ :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель  $\det A$  матрицы  $A$  представляет собой меру  $n$ -мерного параллелепипеда, построенного на векторах  $e_i = A e_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), где  $e_i$  — единичные векторы осей координат. Поскольку при выполнении преобразований из  $\{Q_i\}$  сохраняются расстояния, имеем  $|\det A| = 1$ . Очевидно также, что и для транспонированной матрицы  $A'$  имеем  $|\det A'| = 1$ . Тогда из условия  $\det(AB) = \det A \det B$  следует, что транспонированная матрица  $A'$  является противоположным элементом  $A$ :

$$AA' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = I. \quad (2.328)$$

**Определение 1.** Чертеж  $L \subset \mathbb{R}^n$  обладает некоторым типом симметрии, если существует хотя бы одно такое преобразование  $Q \in \{Q_i\}$ , отличное от единичного преобразования  $I$ , что  $QL = L$  ( $QL$  — образ  $L$  при преобразовании  $Q$ ).

Преобразования симметрии, сохраняющие неподвижной хотя бы одну точку пространства, принято называть *точечными*. Очевидно, что всякое точечное преобразование имеет вид  $x' = Ax$ . В противном случае говорят о симметрии *трансляционного типа*.

С точки зрения рассматриваемой в настоящей главе задачи построения уравнений чертежей, необходимо также ввести понятие *симметричного уравнения* для чертежа, обладающего симметрией.

**Определение 2.** Пусть  $\omega = 0$  есть уравнение чертежа  $L$ , симметричного относительно преобразования  $Q$ . Будем считать, что уравнение  $\omega = 0$  обладает тем же типом симметрии (т. е.  $\omega = 0$  симметрично относительно  $Q$ ), если  $\omega(Qx) = \omega(x)$ .

Уравнение  $\omega = 0$  будем называть *кососимметричным* относительно  $Q$ , если

$$\omega(Qx) = -\omega(x).$$

**Пример 1.** Уравнение окружности  $\omega(x_1, x_2) \equiv R^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$  на плоскости является симметричным относительно преобразования

$$x' = Ax, \quad (2.329)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.330)$$

Уравнение  $\omega(x_1, x_2) = x_1(R^2 - x_1^2 - x_2^2) = 0$  чертежа, представляющего соединение упомянутой окружности с осью  $Ox_2$ , кососимметрично относительно преобразований, определяемых матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.331)$$

**Замечание 1.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — область, симметричная относительно преобразования  $Q$ , а  $L \subset \mathbb{R}^n$  — некоторый чертеж, который указанной симметрией может и не обладать. Будем считать, что  $L$  симметричен в  $\Sigma$  чертеж относительно  $Q$ , если чертеж  $L \cap \Sigma$  симметричен относительно  $Q$ .

Аналогичное понятие будем использовать для уравнений чертежей. (Поведение функции  $\omega(x)$  вне области  $\Sigma$  по тем или иным причинам нас может и не интересовать.)

Основываясь на введенных выше понятиях, рассмотрим задачу построения симметричных (и кососимметричных) уравнений для симметричных чертежей. В дальнейшем для простоты в основном ограничимся симметрией в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ . Кроме того, без специальных оговорок будем иметь в виду построение  $H$ -реализуемых уравнений, рассматривая, в частности, и тот случай, когда  $\mathfrak{M}(H)$  есть множество элементарных функций.

#### Точечные типы симметрии.

**А. Симметрия относительно точки.** Такой симметрией обладает, например, тело  $\Omega$  (рис. 74). Очевидно, если уравнение  $\partial\Omega = \{\omega(x_1, x_2, x_3) = 0\}$  — уравнение поверхности, то уравнение

$$\omega(-x_1, -x_2, -x_3) = 0$$

также уравнение  $\partial\Omega$  (начало координат в центре тела).

Если  $\omega_1(x_1, x_2, x_3) = 0$  — какое-нибудь уравнение чертежа  $L$ , обладающего симметрией относительно преобразования  $x' =$

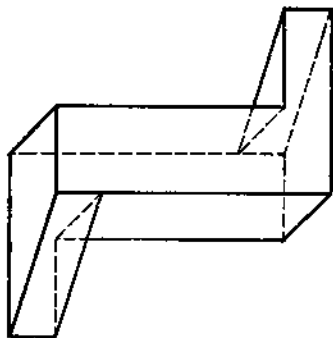


Рис. 74.

$= Ax$ , где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

но само уравнение не симметрично относительно этого преобразования, то можно написать уравнение  $L$

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} [\omega_1(x_1, x_2, x_3) + \omega_1(-x_1, -x_2, -x_3)] = 0, \quad (2.332)$$

обладающее требуемым типом симметрии. Коэффициент  $1/2$  в формуле (2.332) в принципе не обязателен, но, если  $\omega_1 = 0$  — нормализованное уравнение  $L$ , уравнение (2.332), в котором этот коэффициент сохранен, также будет нормализованным.

Другой подход к построению симметричного относительно точки  $O$  уравнения состоит в следующем. Пусть  $\Omega_1 = (\omega_1 \geq 0)$  — некоторая область, вообще, не симметричная. Для удобства предположим, что начало координат находится в области  $\Omega_1$ . Пусть

$l = 0$  — некоторая плоскость, проходящая через начало координат, а  $\Sigma_1 = (l \geq 0)$ . Пусть  $\Omega_2 = [\omega_1(-x_1, -x_2, -x_3) \geq 0]$ ,  $\Sigma_2 = [(-l) \geq 0]$ . Тогда область, определяемая формулой

$$\Omega = [(\Omega_1 \cap \Sigma_1) \cup (\Omega_2 \cap \Sigma_2)] \cup (\Omega_1 \cap \Omega_2), \quad (2.333)$$

обладает требуемой симметрией и симметричное уравнение поверхности  $\partial\Omega$  имеет вид

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \{[\omega_1(x_1, x_2, x_3) \wedge^* l] \vee^* [\omega_1(-x_1, -x_2, -x_3) \wedge^* (-l)] \vee^* [\omega_1(x_1, x_2, x_3) \wedge^* \omega_1(-x_1, -x_2, -x_3)]\} = 0. \quad (2.334)$$

**Б. Симметрия инверсии.** Симметрии такого типа соответствуют преобразования  $x' = Ax$  с матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.335)$$

Симметрией инверсии с матрицей  $A_3$  обладает, например, прямая пирамида (рис. 75) с параллелограммом в основании.

Пусть  $\omega(x) \equiv \omega_1(x_1, x_2, x_3) = 0$  — уравнение чертежа  $L$ , обладающего симметрией в смысле его инвариантности относительно преобразования  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (2.335). При этом само уравнение  $\omega(x) = 0$  относительно преобразования  $A_i$  может быть и не симметричным. Нетрудно понять, что уравнение  $\omega(x_1, -x_2, -x_3) = 0$  также будет уравнением  $L$  при  $i = 1$ ,  $\omega(-x_1, x_2, -x_3) = 0$  при  $i = 2$  и  $\omega(-x_1, -x_2, x_3) = 0$  при  $i = 3$ . Тогда симметричные уравнения для  $A_1, A_2$  и  $A_3$  соответственно можно получить в виде

$$\begin{aligned}\omega_1(x_1, x_2, x_3) &\equiv \frac{1}{2} [\omega(x_1, x_2, x_3) + \omega(x_1, -x_2, -x_3)] = 0; \\ \omega_2(x_1, x_2, x_3) &\equiv \frac{1}{2} [\omega(x_1, x_2, x_3) + \omega(-x_1, x_2, -x_3)] = 0; \\ \omega_3(x_1, x_2, x_3) &\equiv \frac{1}{2} [\omega(x_1, x_2, x_3) + \omega(-x_1, -x_2, x_3)] = 0.\end{aligned}\quad (2.336)$$

(Множитель  $1/2$  перед квадратными скобками поставлен для сохранения нормализованности получаемых функций, если таковой обладают слагаемые в квадратных скобках.)

Заметим, что вместо операции сложения в формулах (2.332) и (2.336) можно использовать какую-либо из операций  $R$ -конъюнкции или  $R$ -дизъюнкции (коммутативных). Например, для преобразования  $A_1$  можно написать уравнения

$$\begin{aligned}\omega_{11}(x_1, x_2, x_3) &\equiv \omega(x_1, x_2, x_3) \wedge^* \omega(x_1, -x_2, -x_3); \\ \omega_{12}(x_1, x_2, x_3) &\equiv \omega(x_1, x_2, x_3) \vee^* \omega(x_1, -x_2, -x_3).\end{aligned}\quad (2.337)$$

Особенностью формул (2.337) является то, что области  $\omega(x_1, x_2, x_3) \geq 0$  и  $\omega(x_1, -x_2, -x_3) \geq 0$  могут и не совпадать между собой, а область  $\Omega = [\omega^*(x_1, x_2, x_3) \geq 0]$ , представляющая собой их пересечение или соединение, будет симметричной относительно  $A_1$  и такого же типа симметрией будет обладать уравнение  $\omega^* = 0$  чертежа  $\partial\Omega$ . (При использовании систем  $R$ -операций  $\mathfrak{R}_\alpha, \mathfrak{R}$  в последнем случае нормализованность уравнений (2.337) также сохраняется.)

**Пример 2.** Напишем уравнение поверхности пирамиды, изображенной на рис. 75, считая, что заданы координаты ее вершин:  $S(0, 0, h)$ ,  $A(a, b, 0)$ ,  $B(c, d, 0)$ ,  $C(-a, -b, 0)$ ,  $D(-c, -d, 0)$ . В качестве опорных областей выберем

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= [\sigma_1(x_1, x_2, x_3) \equiv x_3 \geq 0] \text{ — верхнее полупространство;} \\ \Sigma_2 &= [\sigma_2(x_1, x_2, x_3) \equiv h(ad - cb) - x_1h(d - b) - x_2h(a - c) - x_3(ad - cb) \geq 0] \text{ — полупространство, расположенное ниже плоскости, содержащей грань } ASB; \\ \Sigma_3 &= [\sigma_3(x_1, x_2, x_3) \equiv h(ad - cb) - x_1h(b + d) + x_2h(a + c) - x_3(ad - cb) \geq 0] \text{ — полупространство, расположенное ниже плоскости, содержащей грань } DSA.\end{aligned}$$

Пусть  $A_3\Sigma_2$  и  $A_3\Sigma_3$  — образы областей  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_3$  при преобразовании  $A_3$ . Для них получаем неравенства

$$\begin{aligned}A_3\Sigma_2 &= [\sigma_2(-x_1, -x_2, x_3) \geq 0]; \\ A_3\Sigma_3 &= [\sigma_3(-x_1, -x_2, x_3) \geq 0].\end{aligned}\quad (2.338)$$

Пирамиду  $\Omega$  зададим логической формулой

$$\Omega = \Sigma_1 \wedge [\Sigma_2 \wedge \Sigma_3] \wedge [A_3\Sigma_2 \wedge A_3\Sigma_3]$$

и соответствующее уравнение  $\partial\Omega$  получим в виде

$$\omega \equiv x_3 \wedge^* \{[\sigma_2(x_1, x_2, x_3) \wedge^* \sigma_3(x_1, x_2, x_3)] \wedge^* \wedge^* \{[\sigma_2(-x_1, -x_2, x_3) \wedge^* \sigma_3(-x_1, -x_2, x_3)]\} = 0, \quad (2.339)$$

где  $\wedge^* = \wedge_0, \wedge_\alpha, \wedge, \dots$ . Взяв для определенности  $\wedge^* = \wedge_0$  и учтя формулы для  $\sigma_i$ , симметричного относительно преобразования  $A_3$  уравнение поверхности пирамиды получим в виде

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv x_3 \wedge_0 \{ \{ [h(ad - cb) - x_1h(d - b) - x_2h(a - c) - x_3(ad - cb)] \wedge_0 [h(ad - cb) - x_1h(b + d) + x_2h(a + c) - x_3(ad - cb)] \} \wedge_0 \{ [h(ad - cb) + x_1h(d - b) + x_2h(a - c) - x_3(ad - cb)] \wedge_0 [h(ad - cb) + x_1h(b + d) - x_2h(a + c) - x_3(ad - cb)] \} \} = 0. \quad (2.340)$$

**В. Симметрия относительно плоскости.** Предположим, что чертеж  $\Omega$  обладает симметрией относительно плоскости  $x_1Ox_2$ . Тогда матрица преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Методика, описанная в пунктах А и Б, полностью переносится и на этот тип симметрии (и, в принципе, является общим приемом, который можно использовать в большинстве случаев). Однако она не достаточно экономна в вычислительном отношении и часто приводит к громоздким формулам. Поэтому в дальнейшем основное внимание будет уделено другим, возможно и менее общим, приемам построения симметричных уравнений.

В частности, рассмотрим, как можно построить симметричное уравнение чертежа, симметричного относительно плоскости  $x_1Ox_2$ .

Пусть  $\Omega_1 = [\omega_1(x_1, x_2, x_3) \geq 0]$ . Очевидно, что  $\Omega_2 = [\omega_1(x_1, x_2, -x_3) \geq 0]$  есть область, симметричная области  $\Omega_1$  относительно плоскости  $x_1Ox_2$ .

Пусть  $\Sigma_1 = \Omega_1 \cap (x_3 \geq 0)$  — часть области  $\Omega_1$ , расположенная выше плоскости  $x_1Ox_2$ , а  $\Sigma_2 = \Omega_2 \cap (-x_3 \geq 0)$  — часть области  $\Omega_2$ , расположенная ниже плоскости  $x_1Ox_2$ . Очевидно, что область

$$\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = [\Omega_1 \cap (x_3 \geq 0)] \cup [\Omega_2 \cap (-x_3 \geq 0)] \quad (2.341)$$

будет обладать симметрией относительно плоскости  $x_1Ox_2$ . Однако соответствующее уравнение, полученное по известным формальным правилам:

$$[\omega_1(x_1, x_2, x_3) \wedge^* x_3] \vee^* [\omega_1(x_1, x_2, -x_3) \wedge^* (-x_3)] = 0,$$

не будет уравнением границы  $\partial\Omega$ , так как ему будут также удовлетворять точки, лежащие на плоскости  $x_1Ox_2$  внутри  $\Omega$ . Исправить положение можно, взяв за основу вместо формулы (2.341) формулу

$$\Omega = (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cup (\Omega_1 \cap \Omega_2). \quad (2.342)$$

Тогда при переходе к трехзначному предикату

$$\Omega = (\Sigma_1 \vee \Sigma_2) \vee (\Omega_1 \wedge \Omega_2) \quad (2.343)$$



уравнение с требуемой симметрией  $\partial\Omega$  получаем в виде

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \{[\omega_1(x_1, x_2, x_3) \wedge^* x_3] \vee^* [\omega_1(x_1, x_2, -x_3) \wedge^* \wedge^*(-x_3)]\} \vee^* \{[\omega_1(x_1, x_2, x_3) \wedge^* \omega_1(x_1, x_2, -x_3)]\} = 0. \quad (2.344)$$

Как и рассмотренные формулы, формула (2.344) при использовании  $R$ -операций  $\mathfrak{R}_\omega$ ,  $\mathfrak{R}_\alpha$ ,  $\mathfrak{R}_\rho$  и некоторых других сохраняет нормализованность функции  $\omega_1(x_1, x_2, x_3)$ .

Приведем некоторые частные случаи, в которых уравнение границы  $\partial\Omega$ , симметричной относительно плоскости, можно получить в более простой форме. (Не нарушая общности рассуждений, можно, как и выше, считать плоскостью симметрии плоскость  $x_1 O x_2$ ).

1. Если область  $\Omega_1 \cap (x_3 \geq 0)$  — часть области  $\Omega_2$  (рис. 76), то граница области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  может быть задана уравнением

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \omega_1(x_1, x_2, x_3) \vee^* \vee^* \omega_1(x_1, x_2, -x_3) = 0. \quad (2.345)$$

2. Если область  $\Omega_1 \cap (-x_3 \geq 0)$  содержит в себе область  $\Sigma_2 = \Omega_2 \cap (-x_3 \geq 0)$ , то граница области  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$  может быть задана уравнением

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \omega_1(x_1, x_2, x_3) \wedge^* \omega_1(x_1, x_2, -x_3) = 0. \quad (2.346)$$

3. Если  $\text{int}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \emptyset$ , то область  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  может быть определена логической формулой  $\Omega = \Omega_1 \approx \Omega_2$  и ее уравнение получаем в виде

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \omega_1(x_1, x_2, x_3) \overset{*}{\approx} \omega_1(x_1, x_2, -x_3) = 0. \quad (2.347)$$

В частности,

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv -\omega_1(x_1, x_2, x_3) \omega_1(x_1, x_2, -x_3) = 0. \quad (2.348)$$

(Знак « $\rightarrow$ » в формуле (2.348) написан для того, чтобы согласно принятой в данной работе условности функция  $\omega$  была положительной внутри  $\Omega$ .) Заметим, что в отличие от уравнения  $\omega_1 \vee^* \omega_2 = 0$  уравнение (2.348) не сохраняет свойство нормализованности.

4. Если не требуется, чтобы функция  $\omega$  была положительна внутри области  $\Omega$  и отрицательна вне  $\Omega$ , то можно написать уравнение  $\partial\Omega$  в одной из таких форм:

$$\omega \equiv \sqrt{\omega_1^2(x_1, x_2, x_3) \vee^* (-x_3) \wedge^* \sqrt{\omega_1^2(x_1, x_2, -x_3) \vee^* x_3}} = 0, \quad (2.349)$$

$$\omega \equiv (\sqrt{\omega_1^2(x_1, x_2, x_3) + x_3^2} - x_3) (\sqrt{\omega_1^2(x_1, x_2, -x_3) + x_3^2} + x_3) = 0. \quad (2.350)$$

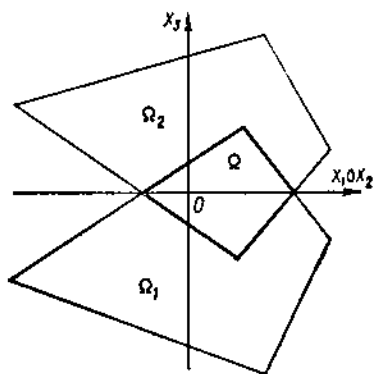


Рис. 76.

Первая из этих формул при надлежащем выборе  $R$ -операций  $\wedge^*$ ,  $\vee^*$  будет сохранять нормализованность функции  $\omega$  (если такая имела).  
 5. Область и уравнение, симметричные относительно плоскости  $x_1Ox_2$ , можно построить, выбирая в качестве опорных области, которые обладают требуемой симметрией. Такой подход — один из наиболее употребительных на практике.

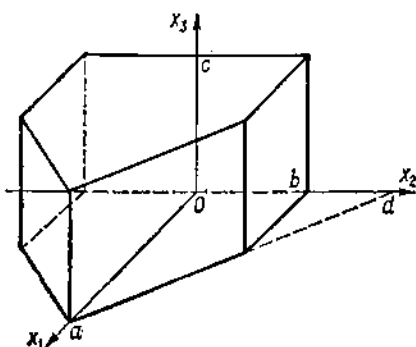


Рис. 77.

**Пример 3.** Пусть требуется написать уравнение поверхности призмы (рис. 77). В качестве опорных возьмем области:

$\Sigma_1 = \left[ \frac{1}{c} (c - x_3) x_3 \geq 0 \right]$  (горизонтальный слой, заключенный между плоскостями  $x_3 = 0$  и  $x_3 = c$ );

$\Sigma_2 = (b - x_2 \geq 0)$  (полупространство, расположенное левее плоскости  $x_2 = b$ );

$\Sigma_3 = (x_1 \geq 0)$  (полупространство, расположенное перед плоскостью  $x_2Ox_3$ );

$\Sigma_4 = \left[ \frac{ad}{\sqrt{a^2 + d^2}} \left( 1 - \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{d} \right) \geq 0 \right]$  (полупространство, расположенное за плоскостью, параллельной оси  $Ox_3$  и отсекающей по осям  $x_1$  и  $x_2$  отрезки  $a$  и  $d$  соответственно).

Все приведенные неравенства нормализованы до любого порядка.

Пусть  $\Omega_1 = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \cap \Sigma_4$ . Область может быть задана неравенством

$$\Omega_1 = \left\{ \omega_1(x_1, x_2, x_3) \equiv \left[ \frac{1}{c} (c - x_3) x_3 \wedge^* (b - x_2) \right] \wedge^* \right. \\ \left. \wedge^* \left[ x_1 \wedge^* \frac{ad}{\sqrt{a^2 + d^2}} \left( 1 - \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{d} \right) \right] \geq 0 \right\}. \quad (2.351)$$

Тогда область  $\Omega_2$ , симметричная  $\Omega_1$  относительно плоскости  $x_1Ox_3$ , будет определяться неравенством

$$\Omega_2 = \left\{ \omega_1(x_1, -x_2, x_3) \equiv \left[ \frac{1}{c} (c - x_3) x_3 \wedge^* (b + x_2) \right] \wedge^* \right. \\ \left. \wedge^* \left[ x_1 \wedge^* \frac{ad}{\sqrt{a^2 + d^2}} \left( 1 - \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{d} \right) \right] \geq 0 \right\}. \quad (2.352)$$

Так как в данном случае выполняется отмеченное выше условие 2, уравнение границы  $\partial\Omega$ , взяв для определенности  $\wedge^* = \wedge_0$ , можем написать в виде

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \left\{ \left[ \frac{1}{c} (c - x_3) x_3 \wedge_0 (b - x_2) \right] \wedge_0 \left[ x_1 \wedge_0 \right. \right. \\ \left. \left. \frac{ad}{\sqrt{a^2 + d^2}} \left( 1 - \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{d} \right) \right] \right\} \wedge_0 \left\{ \left[ \frac{1}{c} (c - x_3) x_3 \wedge_0 (b + x_2) \right] \wedge_0 \right. \\ \left. \wedge_0 \left[ x_1 \wedge_0 \frac{ad}{\sqrt{a^2 + d^2}} \left( 1 - \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{d} \right) \right] \right\} = 0. \quad (2.353)$$

При этом в силу теорем 1 и 2 § 6 это уравнение является нормализованным до первого порядка. Если в этом уравнении заменить  $\Lambda_0$  на  $\Lambda$  ( $p > m$ ), то уравнение (2.353) станет нормализованным до  $m$ -го порядка (в регулярных точках границы).

**Замечание 2.** Для области  $\Omega$ , имеющей две или более плоскостей симметрии, уравнение границы  $\partial\Omega$ , обладающее такой же симметрией, можно получить, написав сначала по описанной выше методике уравнение границы некоторой области, симметричной относительно одной из плоскостей, затем, используя его, написать уравнение, симметричное относительно другой плоскости, и т. д.

**Пример 4.** Пусть требуется написать уравнение поверхности  $\partial\Omega$ , симметричной относительно плоскостей  $x_1Ox_3$  и  $x_2Ox_3$  пирамиды (рис. 78), где  $e = ac(c-b)^{-1}$ ,  $A(a, 0, 0)$ ,  $C(0, c, 0)$ ,  $F(e, 0, 0)$ ,  $G(0, b, 0)$ . В качестве опорных выбираем области

$$\Sigma_1 = \{x_3 \geq 0\} \text{ — верхнее полупространство;}$$

$$\Sigma_2 = \left[ \frac{x_1 d(c-b) + adx_2 + acx_3 - acd}{\sqrt{d^2(b-c)^2 + a^2d^2 + a^2c^2}} \geq 0 \right] \text{ — полупространство, расположенное}$$

$$\text{справа от плоскости, которая содержит грань } CSB; \Sigma_3 = \left[ \frac{ad}{\sqrt{a^2 + d^2}} \left( 1 - \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} - \frac{x_3}{d} \right) \geq 0 \right] \text{ — полупространство,}$$

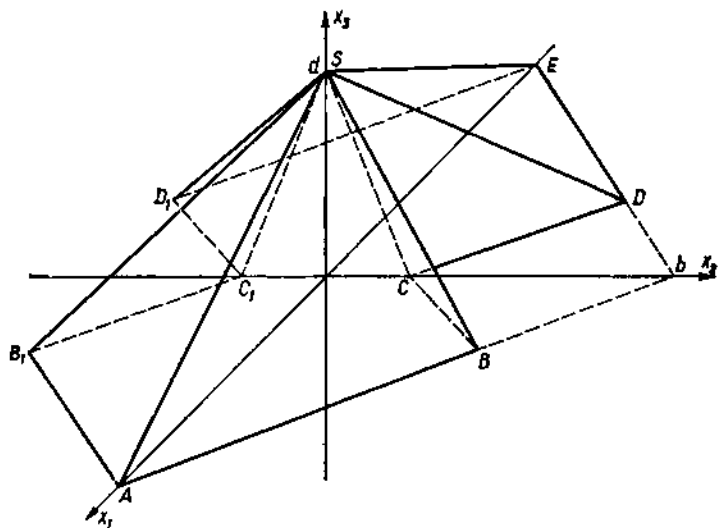


Рис. 78.

расположенное за плоскостью, содержащей грань  $ASB$ . (Все неравенства нормализованы.)

Пусть  $\Omega_1 = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3$ . Соответствующее  $\Omega_1$  неравенство получаем в виде

$$\Omega_1 = \left\{ \omega_1(x_1, x_2, x_3) \equiv x_3 \wedge^* \left[ \frac{acd - x_1 d(c-b) - adx_2 - acx_3}{\sqrt{d^2(b-c)^2 + a^2d^2 + a^2c^2}} \wedge^* \right. \right. \\ \left. \left. \wedge^* \frac{ad}{\sqrt{a^2 + d^2}} \left( 1 - \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} - \frac{x_3}{d} \right) \right] \geq 0 \right\}. \quad (2.354)$$

Область  $\Omega_2$ , симметричная  $\Omega_1$  относительно плоскости  $x_1Ox_3$ , определяется неравенством  $\Omega_2 = [\omega_1(x_1, -x_2, x_3) \geq 0]$ . Аналогично  $\Omega_3 = [\omega_1(-x_1, x_2, x_3) \geq 0]$  и  $\Omega_4 = [\omega_1(-x_1, -x_2, x_3) \geq 0]$ . Данный пример не подходит ни к одному из упомянутых выше упрощающих случаев, поэтому для интересующей нас области  $\Omega$  будем использовать формулу

$$\Omega = \{ \{ [\Omega_1 \wedge (x_1 \geq 0)] \vee [\Omega_3 \wedge (-x_1 \geq 0)] \} \wedge (x_2 \geq 0) \} \vee \{ \{ [\Omega_2 \wedge (x_1 \geq 0)] \vee [\Omega_4 \wedge (-x_1 \geq 0)] \} \wedge (-x_2 \geq 0) \} \vee \{ [\Omega_1 \wedge \Omega_3] \wedge [\Omega_2 \wedge \Omega_4] \}.$$

Следовательно, уравнение поверхности  $\partial\Omega$ , симметричное относительно плоскостей  $x_1Ox_3$  и  $x_2Ox_3$ , получаем в виде

$$\omega \equiv \{ \{ [\omega_1(x_1, x_2, x_3) \wedge^* x_1] \vee^* [\omega_1(-x_1, x_2, x_3) \wedge^* (-x_1)] \} \wedge^* x_2 \} \vee^* \{ \{ [\omega_1(x_1, -x_2, x_3) \wedge^* x_1] \vee^* [\omega_1(-x_1, -x_2, x_3) \wedge^* (-x_1)] \} \wedge^* \wedge^* (-x_2) \} \vee^* \{ [\omega_1(x_1, x_2, x_3) \wedge^* \omega_1(-x_1, x_2, x_3)] \wedge^* \wedge^* [\omega_1(x_1, -x_2, x_3) \wedge^* \omega_1(-x_1, -x_2, x_3)] \} = 0. \quad (2.355)$$

Г. *Симметрия относительно оси.* Считают, что чертеж  $\Omega$  обладает симметрией относительно прямой  $C$ , называемой *осью симметрии*, если после поворота на угол  $\alpha_N = 2\pi/N$ , где  $N$  — целое

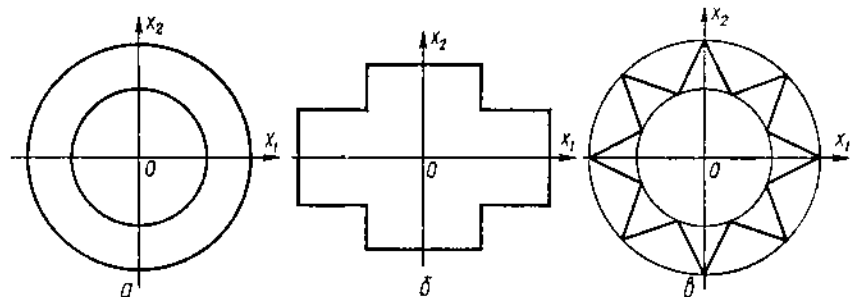


Рис. 79.

число больше единицы, он занимает начальную область пространства. Число  $N$  называют *порядком симметрии оси*, а саму ось симметрии обычно обозначают  $C_N$ . Если чертеж  $\Omega$  занимает одну и ту же область пространства при любом угле поворота  $\alpha$ , то он называется *осесимметричным*, а ось симметрии обозначается  $C_\infty$ . На рис. 79, а, б и в приведены чертежи с осями симметрии  $C_\infty$ ,  $C_2$  и  $C_8$  соответственно. Если осью симметрии является, например, ось  $Ox_1$ , то матрица преобразования симметрии порядка  $N$  относительно этой оси имеет вид

$$C_{x_1, N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{2\pi}{N} & \sin \frac{2\pi}{N} \\ 0 & -\sin \frac{2\pi}{N} & \cos \frac{2\pi}{N} \end{pmatrix}. \quad (2.356)$$

Пусть  $\Omega_0 = [\omega_0(x_1, x_2, x_3) \geq 0]$  есть некоторая заданная область. Так как преобразование поворота вокруг оси  $Ox_1$  определяется мат-

рицей (2.356), области  $\Omega_k$ , получающиеся при повороте  $\Omega$  на углы, кратные  $\alpha_N$ , определяются неравенствами

$$\Omega_k = [\omega_k(x_1, x_2, x_3) \geq 0], \quad (2.357)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_k(x_1, x_2, x_3) = & \omega_0 \left( x_1, x_2 \cos \frac{2\pi k}{N} + \right. \\ & \left. + x_3 \sin \frac{2\pi k}{N}, -x_2 \sin \frac{2\pi k}{N} + x_3 \cos \frac{2\pi k}{N} \right). \end{aligned} \quad (2.358)$$

Очевидно, что область  $\Omega = \Omega_0 \cup \dots \cup \Omega_{N-1}$  обладает осевой симметрией порядка  $N$  относительно оси  $Ox_1$ . Уравнение границы  $\partial\Omega$ , обладающее такой же симметрией, можно написать в виде

$$\omega \equiv (\dots (\omega_0 \vee^* \omega_1) \vee^* \dots) \vee^* \omega_{N-1} = 0, \quad (2.359)$$

где  $\vee^*$  —  $R$ -дизъюнкция, обладающая свойством ассоциативности. (Например,  $\vee^* = \vee_1$ , или  $\vee^* = \overset{m}{\vee}$ .) Впрочем, симметричное уравнение  $\partial\Omega$  можно получить исходя из формулы (2.359) даже в том случае, когда  $\vee^*$  — неассоциативная операция. Для этого достаточно произвести в левой части формулы (2.359) все возможные циклические перестановки (пусть  $\omega^{(k)}$  — их результаты,  $k = 1, \dots, N$ ), а затем можно написать симметричное уравнение

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \omega^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (2.360)$$

Заметим, что если  $\omega_0$  — нормализованная на границе области ( $\omega_0 \geq 0$ ) функция, а операция  $\vee^*$  сохраняет нормализованность, то уравнения (2.359) и (2.360) будут нормализованными уравнениями  $\partial\Omega$ .

**Пример 5.** Напишем уравнение границы области  $\Omega$  (рис. 80). Дано  $OA = OB = OC = 2, r = 1, R = 5$ . Полуокруг может быть задан как пересечение областей

$$1 - x_1^2 - (x_2 + 2)^2 \geq 0; \quad (-x_2 - 2) \geq 0. \quad (2.361)$$

Следовательно, область  $\Omega_0$  будет определяться неравенством

$$\omega_0(x_1, x_2) \equiv [1 - x_1^2 - (x_2 + 2)^2] \wedge^* (-x_2 - 2) \geq 0.$$

Согласно формуле (2.358) для областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  получаем неравенства

$$\begin{aligned} \omega_1(x_1, x_2) \equiv & \left[ 1 - \left( -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \right)^2 - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 2 \right)^2 \right] \wedge^* \\ & \wedge^* \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 2 \right) \geq 0; \end{aligned} \quad (2.362)$$

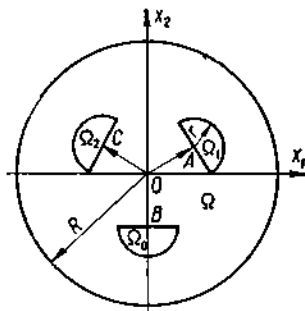


Рис. 80.

$$\omega_2(x_1, x_2) \equiv \left[ 1 - \left( -\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 2 \right)^2 \right] \wedge^* \\ \wedge^* \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 2 \right) \geq 0.$$

Учитывая, что круг, ограничивающий область  $\Omega$ , определяется неравенством

$$\omega_3(x_1, x_2) \equiv 25 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0,$$

и выбирая для определенности  $\bigvee^* = \bigvee_m$ , для границы области можем написать уравнение в виде

$$\omega(x_1, x_2) \equiv \overline{\omega_0(x_1, x_2)} \overset{\circ}{\bigwedge}_m \overline{\omega_1(x_1, x_2)} \overset{\circ}{\bigwedge}_m \overline{\omega_2(x_1, x_2)} \overset{\circ}{\bigwedge}_m \overline{\omega_3(x_1, x_2)} = 0. \quad (2.363)$$

Симметричным уравнением  $\partial\Omega$  будет также уравнение

$$\omega'(x_1, x_2) \equiv \prod_{i=0}^3 \omega_i(x_1, x_2) = 0, \quad (2.364)$$

однако в отличие от (2.363) оно не будет нормализованным, если  $\omega_0$  и  $\omega_3$  — нормализованные.

**II. Симметрия трансляционного типа.** Считают, что чертеж  $L \subset \subset \mathbb{R}^n$  обладает симметрией трансляционного типа, если в направлении вектора  $a \in \mathbb{R}^n$  при преобразовании  $x' = x + a$  чертеж  $L$  переходит сам в себя. Легко привести примеры, когда чертеж  $L$  обладает симметрией трансляционного типа в нескольких направлениях, определяемых векторами  $a_1, \dots, a_m$ . Рассмотрим вопрос о построении уравнений чертежей, обладающих симметрией трансляционного типа. Вначале опишем общий подход к построению таких уравнений, а затем рассмотрим некоторые частные ситуации, допускающие возможность строить симметричное уравнение более простым путем.

Пусть  $\Omega_0 = \{\omega_0(x) \geq 0\}$  — некоторая область в  $\mathbb{R}^n$ , а  $h \in \mathbb{R}^n$  — некоторый вектор. Тогда  $\Omega_1 = \{\omega_0(x - h) \geq 0\}$  есть область, полученная сдвигом ее точек в направлении вектора  $h$  на величину  $\|h\|$ . Предположим вначале, что  $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$ . Задача состоит в том, чтобы написать уравнение границы области

$$\Omega \equiv \bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} \{\omega_0(x - kh) \geq 0\}, \quad (2.365)$$

которая, очевидно, обладает симметрией трансляционного типа в направлении вектора  $h$ .

Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что вектор  $h$  имеет направление оси  $Ox_1$ . Предположим, что область  $\Omega_0$  может быть заключена в область («слой») —  $a \leq x_1 \leq a$ , обладает симметрией относительно гиперплоскости  $x_1 = 0$  и  $\omega_0(-x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \omega_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Тогда область  $\Omega$  может быть заключена в об-

ласть, определяемую неравенством

$$\frac{h}{2\pi \sin \frac{2\pi a}{h}} \left( \cos \frac{2\pi x_1}{h} - \cos \frac{2\pi a}{h} \right) \geq 0. \quad (2.366)$$

Введем вспомогательную функцию

$$\tau_n(x_1, q) \equiv \left[ \frac{\cos \frac{2\pi x_1}{h} - \cos \frac{2\pi q}{h} + \left| \cos \frac{2\pi x_1}{h} - \cos \frac{2\pi q}{h} \right|}{2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi q}{h} \right)} \right]^{n+1}. \quad (2.367)$$

Нетрудно убедиться в том, что эта функция принадлежит классу  $C^n$ , тождественно равна нулю на интервалах  $[(k-1)h + q; kh - q]$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и равна единице в точке  $x_1 = 0$ . Кроме того, функция  $\tau_n(x_1, q)$  является неотрицательной, на интервалах  $(kh, kh + q)$  монотонно убывает, а на интервалах  $(kh - q, kh)$  монотонно возрастает. Тогда функция

$$\mu_n(x_1, a, h) \equiv \frac{h}{\pi} \arcsin \left\{ \sin \frac{\pi x_1}{h} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{a\pi}{2h} \right) \left[ \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{a\pi}{2h} \right) + \left[ 1 - \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{a\pi}{2h} \right) \right] \tau_n \left( x_1 - \frac{h}{2}, \frac{h}{2} - a \right) \right]^{-1} \right\} \quad (2.368)$$

также принадлежит классу  $C^n$ , на интервалах  $(kh - a, kh + a)$   $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  принимает значения  $(-1)^k (x_1 - kh)$  (т. е. является линейной), а ее модуль достигает максимума, равного  $1/4(h + 2a)$ , в точках  $kh + \frac{h}{2}$ .

**Теорема 1.** Уравнение

$$\omega \equiv \omega_0[\mu_n(x_1, a, h), x_2, \dots, x_n] = 0 \quad (2.369)$$

является уравнением границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ , определяемой формулой (2.365).

**Доказательство.** При изменении  $x$  в интервале  $[kh - a, kh + a]$  уравнение (2.369) принимает вид

$$\omega_0[(-1)^k (x_1 - kh), x_2, \dots, x_n] = 0. \quad (2.370)$$

Поскольку по предположению  $\omega_0(-x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \omega_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , это уравнение является уравнением границы области  $\Omega_k$ , представляющей собой сдвиг области  $\Omega_0$  по направлению оси  $Ox_1$  на расстояние  $kh$ . В то же время, если  $x_1$  не принадлежит ни одному из интервалов  $[kh - a, kh + a]$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , функция  $\mu_n$  не принадлежит интервалу  $[-a, a]$  и, так как функция  $\omega_0(x_1, \dots, x_n)$  не имеет нулей вне этого интервала, то и уравнение (2.369) в соответствующих точках  $\mathbb{R}^n$  не удовлетворяется. Таким образом, уравнение удовлетворяется лишь в точках границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ , что и требовалось доказать.

Заметим, что если уравнение  $\omega_0(x) = 0$  — нормализованное до некоторого порядка, то нормализованным до этого же порядка будет и уравнение (2.369). Это следует из того, что не только область  $\Omega$  обладает симметрией трансляционного типа в направлении оси  $Ox_1$  с шагом  $h$ ; такой же симметрией обладает и построенная функция  $\omega(x)$  (2.369), а в точках слоя  $-a \leq x_1 \leq a$  функции  $\omega(x)$  и  $\omega_0(x)$  тождественны.

При доказательстве теоремы 1 предполагалась четность функции  $\omega_0(x_1, \dots, x_n)$  относительно  $x_1$ . Предположим, что указанной симметрии нет. В этом случае уравнение (2.369) будет уравнением границы области, которая получается трансляцией опорной области с шагом, кратным  $h$ , с одновременным ее зеркальным отражением на каждом шаге в некоторой гиперплоскости, перпендикулярной к оси  $Ox_1$ .

Возьмем систему полос, определяемую неравенством

$$\Sigma \equiv \left( -\cos \frac{\pi x_1}{h} - \cos \frac{\pi a}{h} \geq 0 \right). \quad (2.371)$$

Счевидно, что эта система полос покрывает все те части области  $\Omega$ , которые представляют собой зеркальное отражение исходной области  $\Omega$  в упомянутых гиперплоскостях, перпендикулярных к  $Ox_1$ , а остальная часть  $\Omega' = \Omega \cap \bar{\Sigma}$  области  $\Omega$  состоит из областей, полученных простым сдвигом вдоль  $Ox_1$  области  $\Omega_0$  на расстояния, кратные  $2h$ . Следовательно, уравнение границы  $\partial\Omega'$  можно написать в виде

$$\omega'(x) \equiv \omega_0[\mu_n(x_1, a, h), x_2, \dots, x_n] \wedge^* \left( \cos \frac{\pi a}{h} + \cos \frac{\pi x_1}{h} \right) = 0. \quad (2.372)$$

Тогда уравнение границы области  $\Omega$ , полученной путем трансляции области  $\Omega_0$  с шагом  $h$  в направлении оси  $Ox_1$ , можно написать в виде

$$\omega(x) \equiv \omega'(x) \wedge_0 \omega'(x_1 - h, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (2.373)$$

Таким образом, решен вопрос о построении уравнения границы произвольной области, которая обладает симметрией трансляции в направлении оси и может быть заключена в систему полос, перпендикулярных к этой оси. Нетрудно заметить, что последнее ограничение несущественно, так как области более общего вида (рис. 81) можно получить путем логических операций над областями рассмотренного типа.

*Замечание 3.* Вместо функции  $\tau_h(x_1, q)$  можно взять функцию

$$\tau(x, q) = \text{up} \left( \frac{\sin \frac{\pi x_1}{h - q}}{\sin \frac{\pi q}{h - q}} \right), \quad (2.374)$$

принадлежащую классу  $C^\infty$ , где  $\text{up}(x)$  — функция, рассмотренная в § 16 гл. 3. При ее использовании можно строить бесконечно



дифференцируемые уравнения чертежей, обладающие симметрией трансляционного типа.

*Замечание 4.* Описанная методика, повторяемая последовательно, позволяет строить симметричные уравнения чертежей, обладающих симметрией трансляционного типа по нескольким направлениям.

*Замечание 5.* В некоторых частных случаях построение уравнений с симметрией трансляционного типа можно получать более простым путем. В первую очередь это относится к многоугольни-

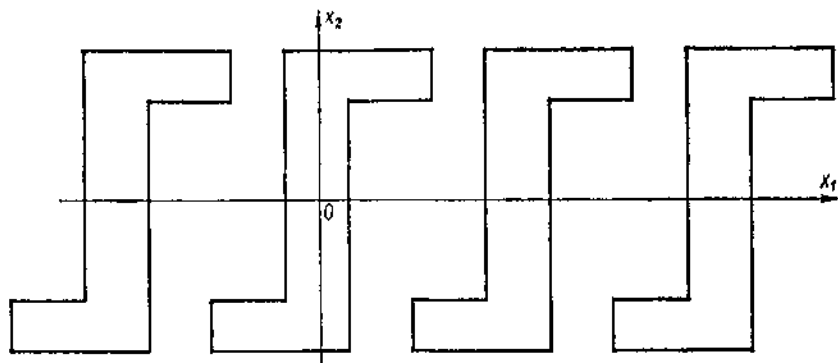


Рис. 81.

кам на плоскости. Простейшим объектом, обладающим симметрией трансляционного типа в направлении оси  $Ox_1$  с шагом  $h = a + 2l$ , является система бесконечных полос шириной  $2a$ , которая может быть определена нормализованным до первого порядка неравенством

$$\Sigma = \left[ \gamma \left( \cos \frac{2\pi x_1}{h} - \cos \frac{2\pi a}{h} \right) \geq 0 \right], \quad (2.375)$$

где  $\gamma = \frac{h}{2\pi} \sin^{-1} \frac{2\pi a}{h}$ . Применяя к этому неравенству преобразование поворота осей координат, получаем неравенство

$$\Sigma = \left\{ \gamma \left[ \cos \frac{2\pi}{h} (x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha) - \cos \frac{2\pi a}{h} \right] \geq 0 \right\}, \quad (2.376)$$

которое определяет систему полос, перпендикулярных к вектору  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Возьмем две различные системы полос и рассмотрим область

$$\Sigma_{\alpha_1, \alpha_2} = \Sigma_{\alpha_1} \cap \Sigma_{\alpha_2} = \left\{ \gamma_1 \left[ \cos \frac{2\pi}{h_1} (x_1 \cos \alpha_1 + x_2 \sin \alpha_1) - \cos \frac{2\pi a_1}{h_1} \right] \wedge^* \right. \\ \left. \wedge^* \gamma_2 \left[ \cos \frac{2\pi}{h_2} (x_1 \cos \alpha_2 + x_2 \sin \alpha_2) - \cos \frac{2\pi a_2}{h_2} \right] \geq 0 \right\}, \quad (2.377)$$

являющуюся их пересечением. Нетрудно видеть, что эта система полос представляет собой систему параллелограммов, периодически расположенных на плоскости  $x_1 O x_2$ . При этом если  $\frac{h_1}{\cos \alpha_1} =$

$= \frac{h_2}{\cos \alpha_2} = h$ , то область  $\Sigma_{\alpha_1, \alpha_2}$  обладает симметрией трансляции по направлению оси абсцисс с шагом  $h$  (рис. 82). Взяв горизонтальную полосу, можем выделить систему треугольников, у которых одна сторона параллельна оси  $Ox_1$  (отмеченных на рис. 82 двойной штри-

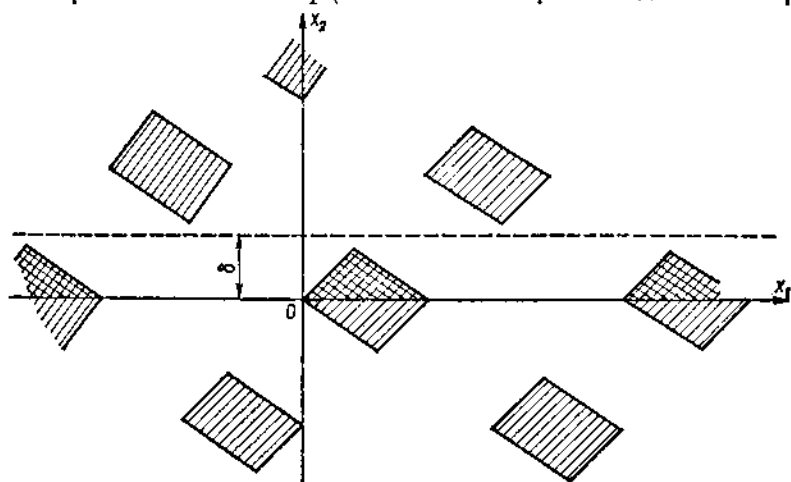


Рис. 82.

ховкой), обладающую симметрией трансляционного типа в направлении оси  $Ox_1$ . Поскольку всякий треугольник можно представить в виде разности двух треугольников указанного типа, например  $\triangle ABC \setminus \triangle ADC$  (рис. 83), в принципе можно считать, что решен

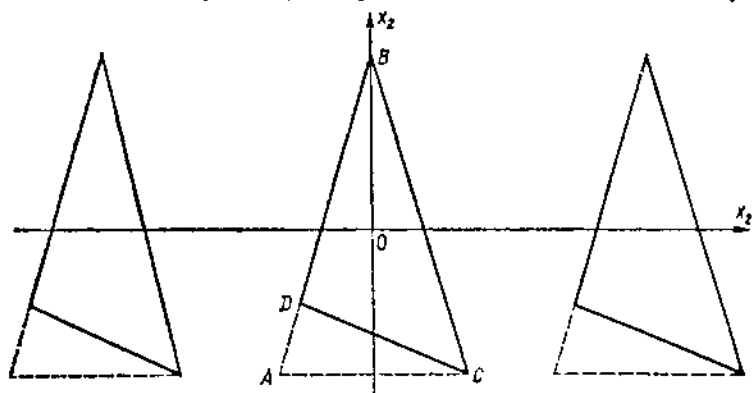


Рис. 83.

вопрос о системе произвольных треугольников, обладающих симметрией трансляционного типа в направлении данной оси. Учитывая, что всякий многоугольник можно получить соединением нескольких треугольников, сможем написать уравнение и для аналогичной системы произвольных многоугольников.

*Замечание 6.* Аналогичные рассуждения применены и для систем многогранников в  $\mathbb{R}^3$ , обладающих симметрией трансляционного типа.

*Замечание 7.* Может быть предложен простой метод построения уравнений для периодически расположенных эллипсов. Например, для системы окружностей радиуса  $R$ , периодически расположенных вдоль оси  $Ox_1$ , можно написать уравнение вида

$$\omega(x_1, x_2) \equiv \cos \sqrt{R^2 - x_2^2} - \cos x_1 = 0. \quad (2.378)$$

(Заметим, что функция  $\omega(x_1, x_2)$  действительна везде в  $\mathbb{R}^2$ , так как  $\cos i \sqrt{x_2^2 - R^2} = \text{ch} \sqrt{x_2^2 - R^2}$ .) Уравнение (2.378) не нормализовано.

**Пример 6.** Напишем уравнение границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  (рис. 84). В качестве опорных выберем области

$\Omega_1 = \left\{ \frac{8}{\pi} \left[ \cos \frac{\pi}{8} (x_1 + x_2) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \geq 0 \right\}$  (система наклонных полос, параллельных биссектрисе второго и четвертого координатных углов);

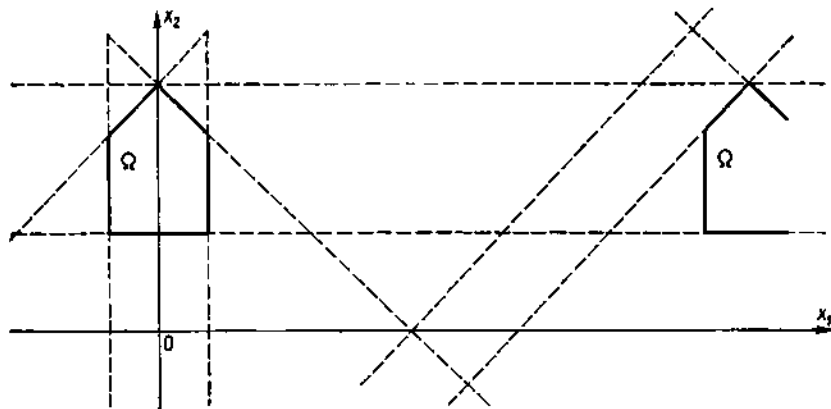


Рис. 84.

$\Omega_2 = \left\{ \frac{8}{\pi} \left[ \cos \frac{\pi}{8} (x_1 - x_2) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \geq 0 \right\}$  (система наклонных полос, параллельных биссектрисе первого и третьего координатных углов);

$\Omega_3 = \left\{ \frac{16}{\pi \sqrt{2}} \left[ \cos \frac{\pi x_1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \geq 0 \right\}$  (система вертикальных полос);

$\Omega_4 = \left[ \frac{1}{6} x_2 (6 - x_2) \geq 0 \right]$  (горизонтальная полоса, заключенная между осью  $Ox_1$  и прямой  $x_2 = 6$ );

$\Omega_5 = \left[ \frac{1}{4} (6 - x_2) (x_2 - 2) \geq 0 \right]$  (горизонтальная полоса, заключенная между прямыми  $x_2 = 2$  и  $x_2 = 6$ ). Для области  $\Omega$  можем написать следующую логическую формулу:

$$\Omega = [(\Omega_1 \wedge \Omega_2) \wedge \Omega_4] \wedge (\bar{\Omega}_3 \vee \Omega_5). \quad (2.379)$$

Соответствующее уравнение границы  $\partial\Omega$  получаем в виде

$$\omega \equiv \left\{ \left\{ \frac{8}{\pi} \left[ \cos \frac{\pi}{8} (x_1 + x_2) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \wedge^* \frac{8}{\pi} \left[ \cos \frac{\pi}{8} (x_1 - x_2) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \right\} \wedge^* \right. \\ \left. \wedge^* \left[ \frac{1}{6} x_2 (6 - x_2) \right] \right\} \wedge^* \left\{ \left[ \frac{16}{\pi\sqrt{2}} \left( -\cos \frac{\pi x_1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \vee^* \right. \\ \left. \vee^* \left[ \frac{1}{4} (6 - x_2) (x_2 - 2) \right] \right\} = 0. \quad (2.380)$$

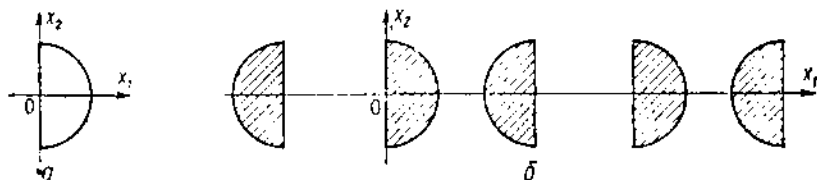


Рис. 85.

Заметим, что уравнение (2.380) нормализовано до первого порядка, если, например,  $\wedge^* = \wedge_0$ ,  $\vee^* = \vee_0$ .

**Пример 7.** Напишем нормализованное до первого порядка уравнение класса  $C^r(\mathbb{R}^2)$  бесконечной цепочки окружностей радиуса  $R$  с центрами на оси  $Ox_1$ , если расстояние между соседними центрами  $h > 2R$ , а центр одной из окружностей совпадает с началом координат. Согласно формуле (2.372) получаем

$$\frac{1}{2R} \{R^2 - \mu_n^2(x_1, R, h) - x_2^2\} = 0. \quad (2.381)$$

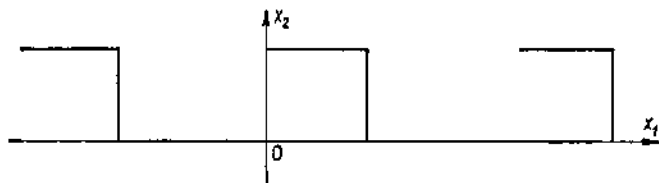


Рис. 86.

**Пример 8.** Поскольку уравнение

$$\omega_0(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{4} (4 - x_1^2 - x_2^2) \wedge_0 x_1 = 0$$

является уравнением границы полукруга (рис. 85, а), уравнение

$$\frac{1}{4} [4 - \mu_n^2(x_1; 2; 5) - x_2^2] \wedge_0 \mu_n(x_1; 2; 5) = 0$$

является уравнением границы области, заштрихованной на рис. 85, б.

**Пример 9.** Нормализованное уравнение чертежа (рис. 86) можно написать в виде

$$\left\{ \left( - \{ [2 - \mu_n(x_1; 2; 5)] \wedge_0 (2 - x_2) \}^2 \wedge_0 [\mu_n(x_1; 2; 5) + \right. \right. \\ \left. \left. + x_2 - 2] \right)^{\frac{1}{2}} \wedge_0 \left( \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{\pi x_1}{5} \right) \right\} \wedge_0 \left\{ \left( - \{ [2 - \mu_n(x_1 - 5; 2; 5)] \wedge_0 \right. \right.$$

$$\Lambda_0 (2 - x_2)^2 \Lambda_0 [\mu_n (x_1 - 5; 2; 5) + x_2 - 2] \frac{1}{2} \Lambda_0$$

$$\Lambda_0 \left( \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{\pi x_1}{5} \right) = 0.$$

*Упражнения и задачи.* 1. Написать нормализованные и обладающие соответствующим типом симметрии уравнения чертежей,

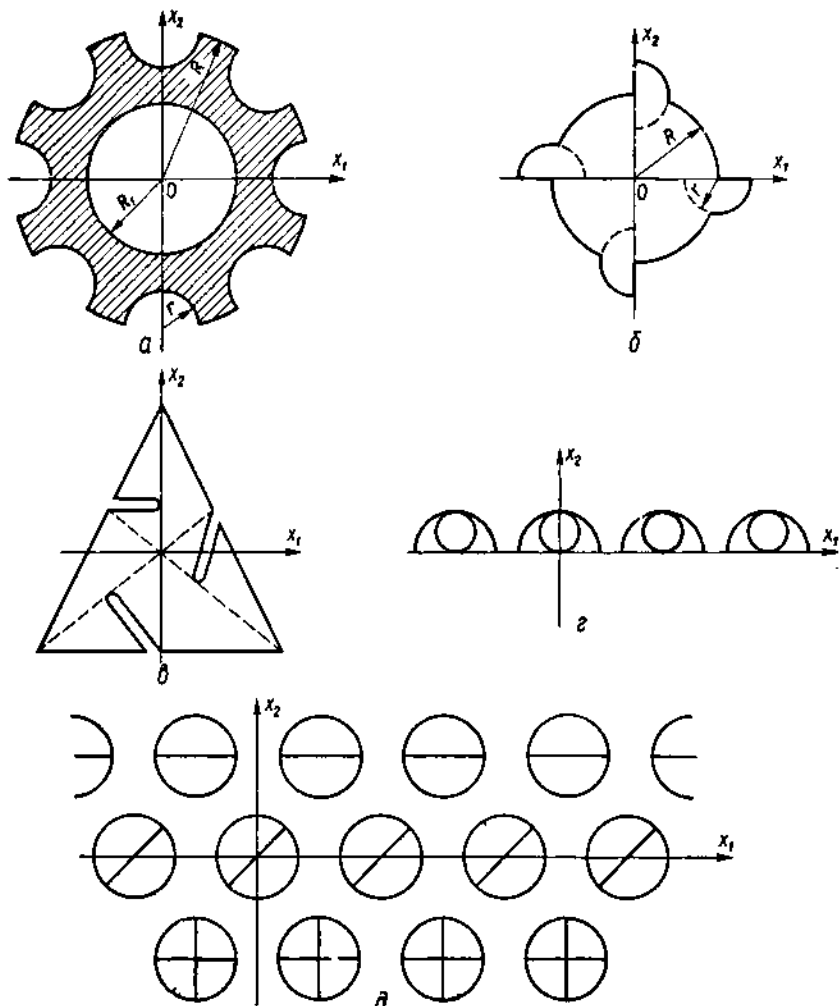


Рис. 87.

изображенных на рис. 87, а, б, в, с точечной симметрией относительно начала координат, и на рис. 87, г, д — с симметрией трансляционного типа вдоль оси  $Ox_1$ .

2. Написать нормализованное и обладающее симметрией трансляционного типа по направлениям осей координат уравнение класса  $C^2(\mathbb{R}^3)$  границы поверхности бесконечной системы шаров радиуса  $R < 1$  с центрами в точках с целочисленными координатами.

3. В упражнении (см. рис. 87, а и б) число врезов и выступов сделать равным  $m$ , причем  $m$  ( $m \geq 1$  — целое) должно войти в уравнение чертежа как параметр.



Рис. 88.

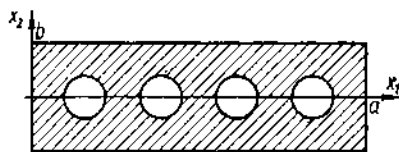


Рис. 89.

4. В упражнении 1 (рис. 87, в) глубину прямолинейных врезов считать равной  $h$ , а сторону треугольника — равной  $a$  ( $a \geq 2h$ ). Величины  $a$  и  $h$  должны войти в уравнение чертежа как параметры.

5. Написать нормализованное уравнение границы «пилы», изображенной на рис. 88, если число «зубьев» равно  $n$  ( $n \geq 1$  — целое).

6. В прямоугольной пластине (рис. 89) есть  $m$  — 1 круговое отверстие с центрами в точках  $(\frac{a}{m} j, 0)$  ( $j = 1, \dots, m - 1$ ). Радиусы отверстий равны  $R < a/2m$ . Написать нормализованное уравнение границы пластинки.

## § 25. Тела вращения, призмы, конусы, спирали

С описанными в предыдущих параграфах методами построения уравнений чертежей хорошо сочетаются классические приемы построения уравнений поверхностей тел вращения, призматических и конических тел и др.

1. Уравнение вида

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \omega_0(x_1, \sqrt{x_2^2 + x_3^2}) \quad (2.382)$$

является уравнением чертежа  $L$ , для которого ось  $Ox_1$  — это ось симметрии  $C_\infty$  бесконечного порядка. Для того чтобы написать уравнение (2.382), достаточно располагать уравнением  $\omega_0(x_1, x_2)$  чертежа  $L_0$  в плоскости  $x_1Ox_2$ , являющегося направляющим для  $L$ . Этот хорошо известный прием аналитической геометрии [21] имеет две особенности — положительную и отрицательную.

Положительная особенность состоит в том, что если уравнение  $\omega_0(x_1, x_2) = 0$  нормализованное до некоторого порядка, то нормализованным до этого же порядка является и уравнение  $\omega(x_1, x_2, x_3) = 0$ . Действительно, пусть  $\nu$  — нормаль к чертежу  $L$  в некоторой его точке, а  $\nu_0$  — соответствующая нормаль к  $L_0$ .

(Соответствие между  $\nu$  и  $\nu_0$  понимается в том смысле, что существует такой угол, при повороте на который вокруг оси  $Ox_1$  нормаль  $\nu_0$  совпадает с нормалью  $\nu$ ). Так как значения функции  $\omega(x_1, x_2, x_3)$  вдоль нормали  $\nu$  такие же, как и значения функции  $\omega_0(x_1, x_2)$  вдоль нормали  $\nu_0$ , совпадают и все их производные. Следовательно, упомянутое уравнение чертежа  $L$  нормализовано до того же порядка, что и уравнение чертежа  $L_0$ .

Отрицательная особенность уравнения (2.382) заключается в том, что даже при «очень хорошей» по своим дифференциальным свойствам функции  $\omega_0(x_1, x_2)$  функция  $\omega(x_1, x_2, x_3)$  в принципе может оказаться недифференцируемой в точках оси вращения.

**Пример 1.** Пусть  $L$  есть тор, полученный в результате вращения вокруг оси  $Ox_1$  окружности  $\frac{1}{2}[1 - x_1^2 - (x_2 - 2)^2] = 2$ . (Последнее уравнение нормализовано до первого порядка.)

Согласно (2.382) уравнение поверхности тора получаем в виде

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{1}{2} [1 - x_1^2 - (\sqrt{x_2^2 + x_3^2} - 2)^2] = 0. \quad (2.383)$$

Отсюда

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_2} = -(\sqrt{x_2^2 + x_3^2} - 2) \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}.$$

В частности, в плоскости  $x_1 O x_2$  получаем  $\left. \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right|_{x_3=0} = -(|x_2| - 1) \frac{x_2}{|x_2|}$ . Последнее выражение имеет разрыв при  $x_2 = 0$ . Таким образом, в точках оси  $Ox_1$  функция  $\omega(x_1, x_2, x_3)$  имеет разрывы производных. (Заметим, что в некоторых приложениях, в первую очередь в области краевых задач, подобные «дефекты» производных могут оказаться недопустимыми.)

**Пример 2.** Уравнение того же тора, который был рассмотрен в предыдущем примере, можно получить, взяв в качестве исходного уравнение

$$\omega_0(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{4} [1 - x_1^2 - (x_2 - 2)^2] [1 - x_1^2 - (x_2 + 2)^2] = 0 \quad (2.384)$$

двух симметрично расположенных относительно оси  $Ox_1$  окружностей радиуса  $R = 2$  с центрами в точках  $(0, 2)$  и  $(0, -2)$ . (Формула (2.384) представляет собой произведение их нормализованных уравнений.) Уравнение (2.384) можно привести к виду

$$\omega_0(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{4} [(3 + x_1^2 + x_2^2)^2 - 16x_2^2] = 0.$$

Согласно (2.382) уравнение тора  $L$  получаем в виде

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{1}{4} [(3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 16(x_2^2 + x_3^2)] = 0. \quad (2.385)$$

В отличие от уравнения (2.383) уравнение (2.385) оказывается алгебраическим и функция  $\omega$  дифференцируема сколько угодно раз.

Однако, выиграв в одном (хороших дифференциальных свойствах), проиграем в другом: уравнения (2.385) и (2.384) оказываются не нормализованными. Например, в точках  $(0, 3, 0)$  и  $(0, 1, 0)$ ,

принадлежащих тору, производные по внутренней нормали равны соответственно

$$\frac{\partial \omega(0, 3, 0)}{\partial v} = -408; \quad \frac{\partial \omega(0, 1, 0)}{\partial v} = 8.$$

Конечно, в этом случае можно использовать методы нормализации до первого порядка, описанные в § 21. Однако в данном случае может быть предложен более простой метод, который позволяет совместить в уравнении тела вращения оба упомянутые выше положительные свойства.

Пусть  $\omega_0(x_1, x_2) = 0$  есть уравнение чертежа  $L_0$ . Тогда  $\omega_0(x_1, -x_2) = 0$  является уравнением зеркального отражения  $L_0$  относительно оси  $Ox_1$ . Очевидно, что оба уравнения принадлежат к одному и тому же дифференциальному классу (например,  $C^m(\mathbb{R}^2)$ ) и одновременно нормализованы или не нормализованы до того или иного порядка. Пусть вначале  $\omega_0(x_1, x_2) = 0$  есть граница области  $\Omega_0 = \{\omega_0(x_1, x_2) \geq 0\}$ . Тогда неравенство  $\{\omega_0(x_1, -x_2) \geq 0\}$  определяет область  $\Omega_0^*$ , являющуюся зеркальным отражением области  $\Omega_0$  относительно оси  $Ox_1$ . Согласно § 10 неравенство

$$\omega_0^*(x_1, x_2) \equiv \omega_0(x_1, x_2) \vee^* \omega_0(x_1, -x_2) \geq 0$$

определяет соединение областей  $\Omega_0$  и  $\Omega_0^*$ . Возьмем для простоты  $\vee^* = \vee_0$ , хотя для приведенных ниже рассуждений годятся и другие  $R$ -дизъюнкции. Пусть область  $\Omega_0$  не пересекается с осью  $Ox_1$ . Тогда нетрудно установить, что функция  $\omega_0^*(x_1, x_2)$  принадлежит тому же дифференциальному классу, что и функция  $\omega_0(x_1, x_2)$  и, кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_0^*(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= \frac{\partial \omega_0(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_0(x_1, -x_2)}{\partial x_2} + \left[ \omega_0(x_1, x_2) \times \right. \\ &\times \left. \frac{\partial \omega_0(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \omega_0(x_1, -x_2) \frac{\partial \omega_0(x_1, -x_2)}{\partial x_2} \right] \left[ \omega_0^2(x_1, x_2) + \omega_0^2(x_1, -x_2) \right]^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x_1=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.386)$$

Применив к уравнению  $\omega_0^*(x_1, x_2) = 0$  формулу (2.382), уравнение рассматриваемой поверхности вращения получим в виде

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \omega_0(x_1, \sqrt{x_2^2 + x_3^2}) \vee_0 \omega_0(x_1, -\sqrt{x_2^2 + x_3^2}) = 0. \quad (2.387)$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial \omega(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = \frac{\partial \omega_0^*(x_1, \sqrt{x_2^2 + x_3^2})}{\partial x_2} \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \Big|_{x_2=x_3=0} = 0. \quad (2.388)$$

Аналогично получаем, что и  $\frac{\partial \omega(x_1, 0, 0)}{\partial x_3} = 0$ . Таким образом, в отличие от уравнения (2.382), уравнение (2.387) не имеет на оси



вращения разрывов производных. В то же время в силу известных свойств достаточно полной системы  $\mathfrak{R}_0$ , уравнение (2.387) нормализовано до первого порядка, если нормализовано уравнение  $\omega_0(x_1, x_2) = 0$ . Применение вместо  $\bigvee_0$   $R$ -операции  $\bigvee_p$  ( $p > m + 1$ ) позволяет сохранить нормализованность до  $m$ -го порядка.

**Пример 3.** Нормализованное везде дифференцируемое уравнение тора, рассмотренного в примерах 1 и 2, согласно формуле (2.387) получаем в виде

$$\frac{1}{2} [1 - x_1^2 - (\sqrt{x_2^2 + x_3^2} - 2)^2] \bigvee_0 \frac{1}{2} [1 - x_1^2 - (\sqrt{x_2^2 + x_3^2} + 2)^2] = 0. \quad (2.389)$$

2. Уравнение  $\omega_0(x_1, x_2) = 0$ , рассматриваемое в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , есть уравнение бесконечной призмы  $L$ , параллельной оси  $Ox_3$ . Чертеж  $L_0 = \{\omega_0(x_1, x_2) = 0\}$ , лежащий в плоскости  $x_1Ox_2$ , является для призмы  $L$  направляющим чертежом. Рассмотрим уравнение

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \omega_0(x_1 - \alpha x_3, x_2 - \beta x_3) = 0. \quad (2.390)$$

Пусть  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, 0) \in L_0$ . Тогда уравнение (2.390) будет удовлетворяться, если  $x_1 - \alpha x_3 = x_1^0$ ,  $x_2 - \beta x_3 = x_2^0$ . Эти уравнения определяют прямую и их можно записать в каноническом виде:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{\alpha} = \frac{x_2 - x_2^0}{\beta} = \frac{x_3}{1}. \quad (2.391)$$

Таким образом, чертежу  $L = \{\omega(x_1, x_2, x_3) = 0\}$  удовлетворяют координаты точек всякой прямой, проходящей через чертеж  $L_0$  и имеющей направление вектора  $a = (\alpha, \beta, 1)$ , т. е.  $L$  есть наклонная призма с образующими, параллельными вектору  $a = (\alpha, \beta, 1)$ , имеющая в качестве направляющего чертежа  $L_0$ .

Предположим, что  $\omega_0(x_1, x_2)$  есть нормализованное до первого порядка уравнение чертежа  $L_0$ . Найдем  $\text{grad } \omega$ :

$$\begin{aligned} \text{grad } \omega &= \frac{\partial \omega_0(x_1 - \alpha x_3, x_2 - \beta x_3)}{\partial x_1} i_1 + \frac{\partial \omega_0(x_1 - \alpha x_3, x_2 - \beta x_3)}{\partial x_2} i_2 - \\ &- \left[ \alpha \frac{\partial \omega_0(x_1 - \alpha x_3, x_2 - \beta x_3)}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial \omega_0(x_1 - \alpha x_3, x_2 - \beta x_3)}{\partial x_2} \right] i_3. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |\text{grad } \omega| &= \left\{ \left[ \frac{\partial \omega_0(x_1 - \alpha x_3, x_2 - \beta x_3)}{\partial x_1} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \omega_0(x_1 - \alpha x_3, x_2 - \beta x_3)}{\partial x_2} \right]^2 + \right. \\ &+ \left. \left[ \alpha \frac{\partial \omega_0(x_1 - \alpha x_3, x_2 - \beta x_3)}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial \omega_0(x_1 - \alpha x_3, x_2 - \beta x_3)}{\partial x_2} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.392) \end{aligned}$$

На чертеже  $L$   $\text{grad } \omega = \frac{\partial \omega}{\partial v}$ ,  $x_1 - \alpha x_3 = x_1^0$ ;  $x_2 - \beta x_3 = x_2^0$  и в силу нормализованности уравнения  $\omega_0(x_1, x_2)$

$$\left[ \frac{\partial \omega_0(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \omega_0(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \right]^2 = 1.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} \Big|_L = \left\{ 1 + \left[ \alpha \frac{\partial \omega_0(x_1 - \alpha x_3, x_2 - \beta x_3)}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial \omega_0(x_1 - \alpha x_3, x_2 - \beta x_3)}{\partial x_2} \right]^2 \right\}^{1/2} \Big|_L.$$

Следовательно, нормализованное до первого порядка уравнение наклонной призмы  $L$  можно написать в виде

$$\omega_1(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + M^2(x_1, x_2, x_3)}} \omega_0(x_1 - \alpha x_3, x_2 - \beta x_3) = 0, \quad (2.393)$$

где

$$M(x_1, x_2, x_3) = \alpha \frac{\partial \omega_0(x_1 - \alpha x_3, x_2 - \beta x_3)}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial \omega_0(x_1 - \alpha x_3, x_2 - \beta x_3)}{\partial x_2}. \quad (2.394)$$

**Пример 4.** Основанием призмы с образующими, параллельными плоскости  $x_2 O x_3$ , служит сектор  $AOBC$  круга радиуса  $R$  (рис. 90, а). Сектор лежит в плоскости  $x_1 O x_2$ , его центральный угол равен  $\theta$ , а ось  $Ox_2$  является его осью симметрии.

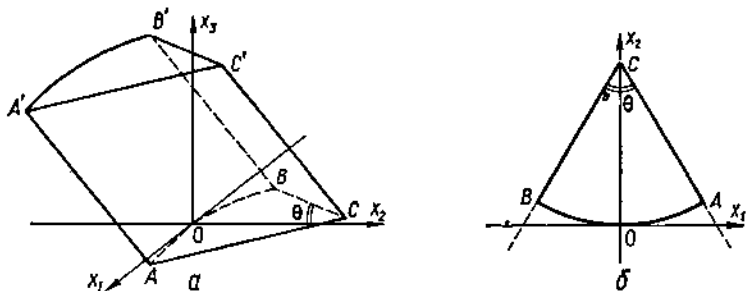


Рис. 90.

Угол наклона призмы к плоскости  $x_1 O x_2$  равен  $\gamma$ , высота призмы равна  $h$ . Требуется написать нормализованное уравнение поверхности (включающей оба основания) призмы.

Напишем вначале нормализованное уравнение  $\omega_0(x_1, x_2) = 0$  нижнего основания призмы (рис. 90, б). В качестве опорных областей выберем следующие:

$\Sigma_1 = \left\{ \frac{1}{2R} [R^2 - x_1^2 - (x_2 - R)^2] \geq 0 \right\}$  (круг радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ );

$\Sigma_2 = \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \left( R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - x_1 - x_2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \geq 0 \right\}$  (полуплоскость, расположенная ниже прямой  $AC$ );

$\Sigma_3 = \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \left( R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + x_1 - x_2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \geq 0 \right\}$  (полуплоскость, расположенная ниже прямой  $CB$ ).

Приведенные выше неравенства нормализованы до первого порядка.

Сектор  $AOBC$  можно задать логической формулой  $\Omega_0 = \Sigma_1 \wedge (\Sigma_2 \wedge \Sigma_3)$ . Согласно описанной в § 10 методике уравнение границы сектора  $\Omega_0$  можно написать

в виде (для простоты воспользуемся  $R$ -конъюнкцией  $\Lambda_0$ )

$$\omega_0(x_1, x_2) \equiv \left\{ \frac{1}{2R} [R^2 - x_1^2 - (x_2 - R)^2] \right\} \wedge_0 \left\{ \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - x_1 - x_2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right] \wedge_0 \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + x_1 - x_2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} = 0.$$

Очевидно, что ребро  $CC^I = \frac{h}{\sin \gamma}$ . Направление боковых ребер призмы определяется вектором

$$(0, -h \operatorname{ctg} \gamma, h). \quad (2.395)$$

Таким образом, в формулах (2.393) и (2.394) следует принять  $\alpha = 0$ ;  $\beta = -\operatorname{ctg} \gamma$ . Нормализованное уравнение бесконечной призмы с направляющей  $AOBC$  и образующими, имеющими направление вектора (2.395), получаем в виде

$$\begin{aligned} \omega_1(x_1, x_2, x_3) \equiv & \left\{ 1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{1}{2R} [R^2 - x_1^2 - (x_2 - R)^2] \wedge_0 \right. \right. \right. \\ & \wedge_0 \left\{ \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - x_1 - x_2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right] \wedge_0 \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + x_1 - x_2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} \right\}^2 - \frac{1}{2} \left\{ \left\{ \frac{1}{2R} [R^2 - x_1^2 - (x_2 - R)^2] \right\} \wedge_0 \right. \\ & \left. \wedge_0 \left\{ \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - x_1 - x_2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right] \wedge_0 \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + x_1 - x_2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.396)$$

Выражение, стоящее под знаком производной, можно заменить более простым, воспользовавшись теоремой 1 § 6 и методами продолжения граничных значений, которые будут описаны далее (формулы склейки).

Для того чтобы получить уравнение призмы конечной высоты  $h$ , к опорным областям  $\Sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) добавим область

$$\Sigma_3 = \left[ \frac{1}{h} x_3 (h - x_3) \geq 0 \right], \quad (2.397)$$

представляющую собой слой, заключенный между плоскостями  $x_3 = 0$  и  $x_3 = h$ . Неравенство (2.397) нормализовано до первого порядка. Требуемое уравнение поверхности призмы получим в виде

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \omega_1(x_1, x_2, x_3) \wedge_0 \left[ \frac{1}{h} x_3 (h - x_3) \right] = 0. \quad (2.398)$$

3. Пусть, как и ранее,  $\omega_0(x_1, x_2) = 0$  есть уравнение некоторого чертежа  $L_0$  в плоскости  $x_1 O x_2$ , а точка  $a = (a_1, a_2, a_3)$  лежит вне плоскости  $x_1 O x_2$  (т. е.  $a_3 \neq 0$ ). Пусть  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, 0) \in L_0$ . Уравнение прямой, проходящей через точки  $x^0$  и  $a$ , можно написать в виде

$$\frac{x_1 - a_1}{x_1^0 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{x_2^0 - a_2} = \frac{x_3 - a_3}{-a_3}.$$

Отсюда

$$x_1^0 = a_1 - a_3 \frac{x_3 - a_3}{x_3 - a_3}; \quad x_2^0 = a_2 - a_3 \frac{x_3 - a_3}{x_3 - a_3}. \quad (2.399)$$

Подставляя  $x_1^0, x_2^0$  из (2.399) в уравнение  $\omega_0(x_1, x_2) = 0$ , получаем уравнение конической поверхности с вершиной  $a$ , для которой чертеж  $L_0$  является направляющим:

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \omega_0 \left( a_1 - a_3 \frac{x_1 - a_1}{x_3 - a_3}, a_2 - a_3 \frac{x_2 - a_2}{x_3 - a_3} \right). \quad (2.400)$$

4. Рассмотрим преобразование координат

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \cos \varphi(x_3) + x_2 \sin \varphi(x_3) + b_1(x_3); \\ x_2 &= -x_1 \sin \varphi(x_3) + x_2 \cos \varphi(x_3) + b_2(x_3) \end{aligned} \quad (2.401)$$

и предположим, что выполняются условия

$$\varphi(0) = b_1(0) = b_2(0) = 0. \quad (2.402)$$

Пусть  $L_0 = \{\omega_0(x_1, x_2) = 0\}$  — некоторый чертеж в плоскости  $x_1 O x_2$ . Тогда уравнение

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \omega_0 [x_1 \cos \varphi(x_3) + x_2 \sin \varphi(x_3) + b_1(x_3), -x_1 \sin \varphi(x_3) + x_2 \cos \varphi(x_3) + b_2(x_3)] = 0$$

определяет в пространстве  $\mathbb{R}^3$  такой чертеж, что его сечения плоскостями  $x_3 = h = \text{const}$  будут получаться из чертежа  $L_0$  путем его вращения вокруг оси  $Ox_3$  на угол  $\varphi(h)$  и смещения всех его точек в плоскости  $x_3 = h$  на вектор  $(b_1(h), b_2(h))$ . Если  $\varphi(x_3)$  есть линейная функция вида  $\varphi(x_3) = kx_3$ ,  $b_1 \equiv b_2 \equiv 0$ , то чертеж  $L$  будет получаться из чертежа  $L_0$  путем движения последнего вдоль винтовой линии с осью  $Ox_3$  (т. е. путем вращения вокруг оси  $Ox_3$  и равномерного поступательного движения вдоль нее).

5. В некоторых случаях может оказаться полезным более общий подход к построению пространственных чертежей из плоских. Предположим, что чертеж  $L_0$  описывается уравнением

$$\omega_0(x_1, x_2, a_1, \dots, a_m) = 0, \quad (2.403)$$

где  $a_1, \dots, a_m$  — некоторые параметры, определяющие форму и размеры чертежа  $L_0$  и отдельных его элементов. Наряду с преобразованием вида (2.401) введем также функции  $a_i(x_3)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) такие, что  $a_i(0) = a_i$ . Тогда придем к уравнению вида

$$\begin{aligned} \omega(x_1, x_2, x_3) \equiv \omega_0 [x_1 \cos \varphi(x_3) + x_2 \sin \varphi(x_3) + \\ + b_1(x_3), -x_1 \sin \varphi(x_3) + x_2 \cos \varphi(x_3) + b_2(x_3), a_1(x_3), \dots \\ \dots, a_m(x_3)] = 0, \end{aligned} \quad (2.404)$$

которому в сечениях  $x_3 = h = \text{const}$  будут соответствовать чертежи из семейства (2.403), повернутые в плоскости  $x_3 = h$  на угол  $\varphi_3(h)$  и смещенные на вектор  $(b_1(h), b_2(h))$ .

Возможно, конечно, рассмотрение и более общих зависимостей вида  $a_i(x_1, x_2, x_3)$ ,  $a_i(x_1, x_2, 0) = 0$ , но исследование соответствующих чертежей представляет собой существенно более сложную задачу.

Нормализацию до первого порядка полученных в данном параграфе уравнений, кроме рассмотренных выше частных случаев,

можно проводить по общей методике, описанной в § 21. Методы нормализации уравнений до высших порядков будут рассмотрены далее.

*Упражнения и задачи.* 1. Центры  $m$  шаров радиуса  $R$  находятся на расстоянии  $r$  от оси  $Ox_3$  и расположены с равным интервалом вдоль винтовой линии, имеющей шаг  $h$ . Написать уравнение поверхности соединения указанных шаров.

2. «Электронная пушка» представляет собой тело вращения (рис. 91) с осью  $Ox_1$ . Написать осесимметричное уравнение поверхности «пушки». (Буквенные размеры элементов «пушки» указаны на рисунке).

3. Написать уравнение тороидального тела вращения, полученного при вращении рассмотренной в предыдущем примере области вокруг оси, параллельной оси  $Ox_1$  и отстоящей от нее на расстоянии  $h > h_0$ .

4. Призма имеет основание в плоскости  $x_1Ox_2$  в виде области, изображенной на рис. 91. Ее образующие параллельны плоскости  $x_1Ox_3$  и наклонены к плоскости  $x_1Ox_2$  под углом  $\theta$ . Высота призмы равна  $h$ . Написать уравнение поверхности, состоящей из нижнего основания и боковой поверхности призмы.

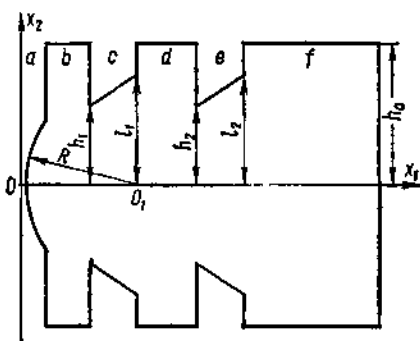


Рис. 91.

## § 26. Задачи математического программирования

1. В последние десятилетия все большее внимание многих исследователей привлекают задачи, в которых из некоторого множества возможных (допустимых) решений выбирается одно, в том или ином смысле наилучшее. К числу таких задач относятся, в частности, задачи математического (линейного и нелинейного) программирования, охватывающие широкий круг проблем экономики, теории управления, оптимального размещения геометрических объектов (см. § 27) и других областей. В § 14 гл. 3 будет указана возможность сведения к задачам математического программирования и краевых задач математической физики.

С математической точки зрения упомянутые задачи являются задачами на отыскание в некоторой области (или чертеже другого типа)  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  такой точки  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ , в которой заданная функция  $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  достигает наибольшего (или наименьшего) значения по сравнению с другими значениями  $\sigma(x)$  в  $\Omega$ . Область  $\Omega$  обычно называют *областью допустимых значений* или *множеством планов*, а функцию  $\sigma(x)$  — *функцией цели*. В большинстве случаев область допустимых значений задается в виде системы

ограничений

$$\sigma_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.405)$$

(Чаще всего  $m > n$ .) Заметим, что  $\dim \Omega \leq n$  или даже  $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$ ,

где  $\dim \Omega_k$  могут различаться между собой и принимать значения от 0 до  $n$  включительно, т. е. в общем случае возможны и различные «вырожденные» ситуации. Более того, не следует исключать возможность появления и таких задач, в которых, например, имеется «система систем» ограничений

$$\sigma_{ki}(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, N) \quad (2.406)$$

и точка  $x$  считается принадлежащей  $\Omega$ , если удовлетворяется хотя бы одна из систем (2.406).

Если точка  $x \in \mathbb{R}^n$  удовлетворяет системе (2.405) (или (2.406)), то она называется *допустимым решением* или *планом*. *Оптимальным решением* называется точка  $x^0$ , в которой

$$\sigma(x^0) = \inf_{x \in \Omega} \sigma(x) \quad (\sigma(x^0) = \sup_{x \in \Omega} \sigma(x)). \quad (2.407)$$

Задачами линейного программирования принято называть такие, в которых функция цели  $\sigma(x)$  и функции  $\sigma_i(x)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) линейны (с точностью до аддитивных постоянных). В противном случае задача относится к области нелинейного программирования. В зависимости от вида  $\Omega$  и функции цели  $\sigma(x)$  говорят также о квадратичном, выпуклом, целочисленном программировании и т. п. [89, 190, 191].

Методам математического программирования посвящено такое количество работ, что сделать даже краткий их обзор не представляется возможным. Тем не менее следует указать те работы, которые оказали существенное или определяющее влияние в этой области.

Первые исследования в области математического программирования принадлежат Л. В. Канторовичу [42]. В них показано, что ряд задач экономики и управления производством формулируются как задачи линейного программирования. За рубежом задача линейного программирования впервые математически была сформулирована в 1941 г. ученым Ф. К. Хичкоком [109].

С 1947 г. (т. е. после появления первых ЭВМ и создания условий для соответствующих вычислительных экспериментов) начинаются интенсивные исследования по линейному программированию. Прежде всего следует отметить работы Дж. Данцига [191], внесшего существенный вклад в разработку общего метода решения задач линейного программирования. В настоящее время накоплен большой опыт в решении задач математического программирования, предложен ряд оригинальных подходов к их решению. В первую очередь это методы случайного поиска, динамического программирования и др. [105, 152]. Ниже будет показано, какое влияние на развитие исследований в этом направлении оказывает привлечение теории  $R$ -функций.

Принадлежность точки  $x$  к множеству планов  $\Omega$  можно задать предикатом

$$\Omega = \Sigma_1 \wedge \dots \wedge \Sigma_m, \quad (2.408)$$

где  $\Sigma_i = \Sigma_i(x) = [\sigma_i(x) \geq 0]$  ( $i = 1, \dots, m$ ). В соответствии с методом, описанным в § 10, от предиката (2.408) можно перейти к предикату

$$\Omega = \Omega(x) = [\omega(x) \equiv \sigma_1(x) \wedge^* \dots \wedge^* \sigma_m(x) \geq 0], \quad (2.409)$$

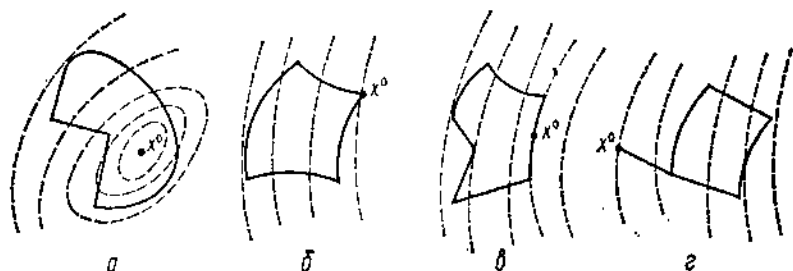


Рис. 92.

где  $\wedge^*$  — некоторая  $R$ -конъюнкция, соответствующая конъюнкции трехзначной логики. Таким образом, вместо задания области  $\Omega$  допустимых решений системой неравенств приходим к ее заданию одним неравенством  $\Omega = (\omega \geq 0)$ . Семейство гиперповерхностей  $\omega(x) = C = \text{const}$  при  $C = 0$  включает границу  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ , при  $C > 0$  гиперповерхности содержатся внутри  $\Omega$ , а при  $C < 0$  — охватывают эту область.

Аналогично к одному неравенству приходим и в случае задания области системами систем (2.406) неравенств. А именно в этом случае

$$\omega(x) \equiv \bigvee_{k=1}^N [\sigma_{k1} \wedge^* \dots \wedge^* \sigma_{km}] \geq 0, \quad (2.410)$$

где  $\bigvee^*$ ,  $\wedge^*$  — соответственно некоторые  $R$ -дизъюнкции и  $R$ -конъюнкции.

Таким образом, в любом случае приходим к следующей формулировке задачи математического программирования: в области  $\Omega$ , определяемой неравенством  $\omega(x) \geq 0$ , найти точку  $x^0$ , которой соответствует наибольшее (наименьшее) значение функции цели  $\sigma(x)$ .

Уравнение  $\sigma(x) = C = \text{const}$  является уравнением семейства гиперповерхностей уровня функции  $\sigma(x)$ . (На рис. 92 штриховые кривые.) Относительно чертежа  $\Omega$  это семейство может располагаться по-разному, вследствие чего точка  $x^0$ , в которой достигается оптимальное решение, может располагаться как внутри области  $\Omega$  (рис. 92, а), так и на границе  $\partial\Omega$  (рис. 92, б, в, г). Из рис. 92, в видно, что задача математического программирования может иметь не единственное решение.

2. Известные методы решения задач математического программирования можно разделить на методы направленного (детерминированные) и случайного поиска.

Общей идеей детерминированных методов является последовательное улучшение решения задачи. Вначале выбирается некоторое начальное решение. Это решение по определенному алгоритму подвергается анализу. Анализ показывает возможности улучшения решения и позволяет перейти в области допустимых решений к новому решению, которое представляется более близким к оптимальному. Каждое новое решение выбирается на основе анализа одного или нескольких предыдущих. Этот процесс продолжается до тех пор, пока анализ не покажет, что дальнейшее улучшение решения невозможно. Естественно, что наиболее успешно детерминированный подход удается реализовать в задачах линейного программирования, допускающих эффективное использование методов линейной алгебры [179]. К детерминированным относятся методы сканирования, Гаусса — Зейделя, различные методы линеаризации (наискорейшего спуска, овражный метод и др.), методы допустимых направлений и штрафных функций и т. д. [89, 149, 191].

Каждый из названных методов имеет свои достоинства и недостатки. В процессе оптимального решения возникают различные ситуации, определяемые видом функции цели, ограничений и организацией метода. В одних ситуациях выгоднее применять один метод, в других — другой. Ни один из этих методов не гарантирует отыскание оптимального решения в случае многоэкстремальной задачи общего вида (по-видимому, не существует вообще эффективного общего метода решения многоэкстремальных задач). Лучшим критерием правильности решения является совпадение результатов при использовании различных методов поиска и многократном варьировании начальных условий поиска.

Вместе с тем встречаются такие ситуации, в которых применение обычных детерминированных методов затруднительно или вовсе невозможно (например, в многоэкстремальных задачах с очень большим количеством локальных экстремумов). Тем не менее до недавнего времени считалось, что «разумный» поиск может быть только строго детерминированным.

Идея о целесообразности случайной стратегии поиска впервые высказана У. Р. Эшби [190]. Идея использования случайного поиска для целей оптимизации предложена Л. А. Растригиным [105], затем был предложен ряд алгоритмов и указаны области их применимости [105]. В последнее время появились работы по применению случайного поиска в задачах оптимизации функционалов, заданных на комбинаторных множествах. Задачи такого рода часто возникают при автоматизации проектирования. В частности, в работе [172] предложен интересный алгоритм поиска с адаптацией, названный методом сужающихся окрестностей. Характерным для методов случайного поиска является то, что для них почти невозможно



построить «ловушки» типа «хребет», «седло» и т. д., в которые могут завести многие алгоритмы детерминированного поиска.

3. Опишем метод, который может быть построен на основе применения  $R$ -функций. В п. 1 настоящего параграфа показано, что система ограничений вида (2.405) или (2.406) может быть заменена одним ограничением  $\omega(x) \geq 0$ . Для простоты рассуждений будем предполагать, что  $\Omega = \{\omega(x) \geq 0\}$  представляет собой некоторую связную область и  $\dim \Omega = n$ . Заметим, что если семейства областей  $\sigma_i(x) \geq C = \text{const}$  являются выпуклыми, то по результатам § 15 (при применении  $R$ -конъюнкции  $\Lambda_\alpha$  и некоторых других) выпуклым является и семейство областей  $\omega(x) \geq C$ . (Имеется в виду система ограничений (2.405).)

В реальных задачах математического программирования обычно всегда есть возможность указать заведомо завышенное (по сравнению с оптимальным) и заведомо заниженное значения функции цели. Пусть такими значениями будут соответственно  $z'$  и  $z''$ . (Предположим, что отыскивается минимум  $\sigma(x)$  в  $\Omega$ .) Область, определяемую неравенством

$$\sigma_0(x) \equiv z - \sigma(x) \geq 0 \quad (z' \leq z \leq z''), \quad (2.411)$$

где  $z$  — фиксированное число, обозначим  $\Sigma_0(z)$ . Очевидно, что если  $z > z_0$  ( $z_0$  — оптимальное решение), то область  $Q(z) = \Omega \cap \Sigma_0(z)$  имеет внутренние точки. Если  $z < z_0$ , то  $Q(z) = \emptyset$ . Таким образом, оптимальному значению  $z = z_0$  соответствует такая область  $\Sigma_0(z_0)$ , что  $Q(z_0)$  не является пустым множеством и не имеет внутренних точек. Область  $Q(z)$  может быть определена неравенством

$$q(x, z) \equiv \omega(x) \wedge_\alpha |z - \sigma(x)| \geq 0. \quad (2.412)$$

Предположив, что область  $Q(z)$  ограничена,  $\omega, \sigma \in C(\mathbb{R}^n)$ , приходим к выводу, что при фиксированном  $z \geq z_0$  функция  $q(x, z)$  достигает в области  $Q(z)$  максимума  $q^0(z)$ , причем  $q^0(z) \geq 0$ . Если  $z < z_0$ , то  $q^0(z) < 0$ . Таким образом, оптимальному значению функции цели будет соответствовать случай, когда  $q^0(z) = 0$ , т. е.

$$q^0(z) = \max_x \{\omega(x) \wedge_\alpha |z - \sigma(x)|\} = 0. \quad (2.413)$$

Есть довольно обширный класс задач, к которому, в частности, можно отнести задачи линейного и выпуклого программирования, где функция  $q(x, z)$  имеет единственный для каждого значения  $z$  ( $z' \leq z \leq z''$ ) локальный максимум  $q^0(z)$ . Этот максимум может быть найден одним из направленных или случайных методов поиска (см. п. 2), как бы ни выбиралась начальная точка. Следовательно, функция  $q^0(z)$  может быть найдена в любой точке интервала  $[z', z'']$ . Заметим, что функция  $q^0(z)$  неубывающая и  $q^0(z') < 0$ , а  $q^0(z'') > 0$ . Значит, оптимальное значение функции цели  $z_0 = \sigma(x^0)$  является нулем функции  $q^0(z)$  на интервале  $[z', z'']$ . Для отыскания этого нуля можно применить различные методы, например метод последовательного деления отрезка  $[z', z'']$  пополам,

метод «золотого сечения» или чисел Фибоначи, метод хорд и т. д. [89, 149]. В некоторых случаях при применении  $R$ -конъюнкции  $\Lambda_\alpha$  ( $\alpha \equiv 1$ ) можно использовать симплекс-метод в сочетании с другими методами [191].

Таким образом, благодаря  $R$ -функциям можно свести задачу отыскания минимума функции  $z = \sigma(x)$  в области  $\Omega = \{\omega(x) \geq 0\}$  к некоторой последовательности задач на отыскание максимума функции  $q(x, z) \in C(\mathbb{R}^n)$  без ограничений на  $x$ .

В общем случае функция  $q(x, z)$  может иметь не единственный локальный экстремум и в этом случае мы сталкиваемся с многоэкстремальной задачей на отыскание глобального максимума. Для решения такой задачи вряд ли может быть предложен какой-либо общий эффективный метод, не основанный на том или ином виде метода полного перебора. На практике чаще всего идут по пути многократного изменения (обычно случайного) начальной точки. Если, например, начальная точка выбиралась  $N$  раз, было найдено  $n$  точек максимума функции  $\sigma(x)$  и при этом оказалось  $n \ll N$ , то мало вероятно (при некоторых предположениях, конечно), что добавление новых начальных точек позволит найти новый локальный максимум. В таком случае из  $n$  точек локального максимума выбирается такая, которой соответствует наибольшее значение функции.

В заключение заметим, что первой работой по применению  $R$ -функций к задаче линейного программирования была работа Е. Л. Ющенко [192].

*Упражнения и задачи.* 1. Для каких  $R$ -конъюнкций из выпуклости областей  $\sigma_i(x) \geq c = \text{const}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) следует выпуклость областей  $\omega(x) \geq C = \text{const}$ ?

2. Построить функцию  $\omega(x)$  так, чтобы признаком принадлежности точки  $x$  области планов было равенство  $\omega(x) = 0$ .

3. Каким условиям должны удовлетворять функции  $\sigma_i(x)$ , чтобы при использовании  $R$ -операций  $\Lambda_\alpha, \bigvee_\alpha$  ( $\alpha = \text{const}$ ) уравнение  $\omega(x) = 0$  было нормализованным уравнением границы области планов?

## § 27. Оптимальное размещение геометрических объектов (оптимальный раскрой)

В настоящем параграфе на основе использования теории  $R$ -функций рассматривается общий подход к решению задач оптимального размещения геометрических объектов. Для простоты изложения речь будет идти о задачах оптимального раскроя, причем в идейном плане вопрос будет излагаться на том уровне, который был достигнут сразу же после появления первых работ по  $R$ -функциям. Более углубленное развитие этого вопроса, соответствующее алгоритмическое и программное обеспечение, новые интересные сферы приложения рассмотрены в работах Ю. Г. Стояна и его учеников [167—172].

1. Проблема экономного раскроя материалов, имеющая важное народнохозяйственное значение, привлекает многих исследователей. До недавнего времени большинство работ по оптимальному раскрою было посвящено либо задачам линейного раскроя, когда учитывалось лишь одно из измерений выкроек и не учитывалась их форма, либо задачам, когда выкройки имели весьма простую форму (прямоугольную, круговую и т. д.). В некоторых же работах просто обобщался опыт специалистов-практиков.

Теория  $R$ -функций, в первую очередь благодаря решению с ее помощью обратной задачи аналитической геометрии, позволила подойти к систематическому изучению задач оптимального раскроя и других аналогичных задач (геометрическая миниатюризация аппаратуры, компоновка генпланов, оптимальная упаковка и др.) с единых позиций и, как будет показано ниже, свести их к задачам математического программирования, о которых речь шла в предыдущем параграфе.

На практике встречаются многочисленные разновидности задач оптимального размещения геометрических объектов. Среди задач оптимального раскроя можно назвать, например, такие: о раскрое из заданного листа материала максимально возможного количества выкроек заданной формы; о размещении максимально большого количества комплектов выкроек; о таком размещении комплекта выкроек на материале заданной ширины, чтобы минимальной была соответствующая длина материала и т. д. В некоторых случаях необходимо учитывать различного рода технологические факторы (например, условия штамповки или резания материалов), лицевую и изнаночную стороны, анизотропию материала и т. д. Еще большее разнообразие ситуаций существует в других проблемах, связанных с оптимальным размещением геометрических объектов или имеющих ту же математическую модель. В связи с этим можно назвать задачи проектирования генеральных планов промышленных узлов на этапе компоновки [172], объемно-планировочного решения для цехов промышленного предприятия, конструкторского проектирования теплоэнергетических комплексов, оптимального складирования грузов в отсеках транспортных самолетов и судов [169, 172], плотнейшей упаковки радиоэлектронной аппаратуры [167, 171, 172] и т. п.

Всякая задача оптимального раскроя связана с размещением выкроек (заготовок) на материале, подлежащем раскрою. Выкройки будем представлять изготовленными в виде пластинок, которые можно перемещать по плоскости  $x_1Ox_2$ . Будем предполагать, что выкройки имеют форму связанных областей, ограниченных кусочно-гладкими кривыми.

Пусть  $\Omega$  есть выкройка. Некоторое положение  $\Omega_1$  выкройки  $\Omega$  будем считать начальным. Свяжем с выкройкой подвижную систему координат и выберем оси этой подвижной системы так, чтобы в начальном положении  $\Omega_1$  выкройки  $\Omega$  они совпадали с соответствующими осями неподвижной системы координат. Точку подвижной

плоскости  $x_1'O'x_2'$ , которая в начальном положении выкройки совпадает с началом неподвижной системы координат, назовем *полюсом выкройки*, а ось абсцисс подвижной системы координат — *осью выкройки*. Если выкройка имеет оси симметрии, то в качестве полюса будем выбирать их точку пересечения, а в качестве оси выкройки — одну из этих осей. Если выкройка имеет всего одну ось симметрии, то она принимается за ось выкройки, а в качестве полюса выбирается любая из ее точек.

Положение подвижной плоскости вполне определяется заданием полюса и оси выкройки. Полюс  $O^1$  может быть задан координатами  $(x_1^1, x_2^1)$  относительно неподвижной системы координат, а направление оси  $O'x_1'$  — углом  $\theta_1$ , между этим направлением и направлением неподвижной оси абсцисс. Угол  $\theta_1$  будем отсчитывать от положительного направления неподвижной оси абсцисс против хода часовой стрелки. Параметры  $x_1^1, x_2^1, \theta_1$ , определяющие положение подвижной плоскости, связанной с выкройкой  $\Omega_1$ , назовем *параметрами размещения выкройки  $\Omega_1$* . Таким образом, положение выкройки на плоскости вполне определяется тремя параметрами  $x_1^1, x_2^1, \theta_1$ , или, другими словами, выкройка имеет на плоскости три степени свободы.

Кроме параметров размещения выкройка характеризуется также своей формой. Форма выкройки  $\Omega_1$  вполне определяется формой той области  $\Omega$ , которую выкройка покрывает в своем начальном положении. Предположим, что область  $\Omega$  определяется неравенством  $\Omega = \{\omega(x_1, x_2) \geq 0\}$ . (Такое неравенство всегда можно написать методами, описанными в § 10). Уравнение  $\omega(x) = 0$  будем называть *каноническим уравнением выкройки*. Относительно функции  $\omega(x)$  будем предполагать, что она по крайней мере определена и непрерывна везде на плоскости.

Может оказаться, что в одной и той же задаче встречается несколько одинаковых выкроек. В этом случае условимся считать, что все эти выкройки имеют одно и то же каноническое уравнение и различаются лишь своими параметрами размещения. Зная каноническое уравнение и параметры размещения выкройки, легко построить контур выкройки на плоскости  $x_1Ox_2$ .

В процессе решения большинства задач оптимального раскроя форма каждой выкройки, а следовательно, и ее каноническое уравнение остаются без изменений. Поэтому в процессе решения задачи должны быть получены лишь параметры размещения всех выкроек. Используя эти параметры, можно построить все выкройки и, таким образом, получить фактическое решение задачи оптимального раскроя. (При решении задачи оптимального раскроя на ЭВМ, имеющей графический выход, выкройки могут быть начерчены самой машиной).

Заметим, что в некоторых задачах выкройка может иметь меньше, чем три степени свободы. Например, положение круговой выкройки вполне определяется заданием координат ее центра и, таким

образом, круговая выкройка имеет всего две степени свободы. Может оказаться, что материал, подлежащий раскрою, анизотропен и ось выкройки должна быть строго направлена по одной из осей анизотропии. В этом случае положение выкройки определяется двумя параметрами.

Более сложная ситуация возникает в том случае, если допускается деформация выкройки (до некоторой степени, конечно) в процессе решения задачи оптимального раскроя. В этом случае речь идет о семействе  $\omega(x, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \geq 0$  форм выкроек, где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  — точка из некоторой известной области  $G \subset \mathbb{R}^k$ . И число степеней свободы становится больше трех, так как кроме параметров  $x_1, x_2, \theta$  надо находить еще и параметры  $\alpha_i$ .

Если выкройка  $\Omega_1$  с каноническим уравнением  $\omega(x_1, x_2) = 0$  имеет фиксированное положение на неподвижной плоскости  $x_1 O x_2$ , определяемой параметрами размещения  $x_1^1, x_2^1, \theta_1$ , то нетрудно написать уравнение выкройки, соответствующее этому ее расположению. В левую часть этого уравнения в качестве параметров должны входить  $x_1^1, x_2^1, \theta_1$ , поэтому оно должно иметь вид

$$\omega_1(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, \theta_1) = 0. \quad (2.414)$$

Формула (2.414) является уравнением трехпараметрического семейства конгруэнтных кривых, причем благодаря принятому выше способу выбора параметров  $x_1^1, x_2^1, \theta_1$  справедливо тождество

$$\omega_1(x_1, x_2, 0, 0, 0) \equiv \omega(x_1, x_2). \quad (2.415)$$

Для построения функции  $\omega_1(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, \theta_1)$  используем формулы, связывающие координаты  $x_1, x_2$  в неподвижной системе координат с координатами  $x_1^1, x_2^1$  в подвижной системе:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}. \quad (2.416)$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1^1 \\ x_2 - x_2^1 \end{pmatrix}. \quad (2.417)$$

Так как уравнение чертежа относительно подвижной системы координат имеет канонический вид  $\omega(x_1^1, x_2^1) = 0$ , в силу (2.417) получаем

$$\begin{aligned} \omega_1(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, \theta_1) &\equiv \omega[(x_1 - x_1^1) \cos \theta_1 + (x_2 - x_2^1) \sin \theta_1; \\ &\quad - (x_1 - x_1^1) \sin \theta_1 + (x_2 - x_2^1) \cos \theta_1] = 0. \end{aligned} \quad (2.418)$$

Это уравнение назовем *уравнением общего положения* выкройки  $\Omega_1$ .

**Пример 1.** Уравнение  $\omega(x_1, x_2) \equiv (a^2 - x_1^2) \wedge_{\alpha} (b^2 - x_2^2) = 0$  является каноническим уравнением прямоугольной выкройки со сторонами  $a$  и  $b$ . Уравнение прямоугольной выкройки общего положения имеет вид

$$\omega(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, \theta_1) \equiv [a^2 - (x_1 - x_1^1) \cos \theta_1 +$$

$$+ (x_2 - x_2^1) \sin \theta_1]^2 \wedge_{\alpha} \{b^2 - [-(x_1 - x_1^1) \sin \theta_1 + \\ + (x_2 - x_2^1) \cos \theta_1]^2\} = 0.$$

2. В процессе раскроя выкройки должны располагаться на материале таким образом, чтобы не было наложения одной выкройки на другую. На аналитическом языке этот факт должен быть отражен в виде некоторого ограничения на параметры размещения выкроек, которое назовем *условием взаимного непересечения выкроек*. Для двух выкроек, определяемых каноническими уравнениями  $\omega_1(x) = 0$  и  $\omega_2(x) = 0$  и параметрами размещения  $x_1^1, x_2^1, \theta_1; x_1^2, x_2^2, \theta_2$ , должно быть получено некоторое условие (зависящее от  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ), связывающее упомянутые параметры. Применяя описанную в § 10 методику, условия взаимного непересечения выкроек можно записывать неравенствами вида

$$\Phi_{12}(x_1^1, x_2^1, \theta_1, x_1^2, x_2^2, \theta_2) \geq 0. \quad (2.419)$$

**Пример 2.** Напишем условия взаимного непересечения окружностей. Пусть  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы соответствующих выкроек,  $x_1^1, x_2^1$  и  $x_1^2, x_2^2$  — координаты их центров. Очевидно, окружности не будут пересекаться, если выполняется неравенство

$$\Phi_{12}(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = \sqrt{(x_1^1 - x_1^2)^2 + (x_2^1 - x_2^2)^2} - R_1 - R_2 \geq 0. \quad (2.420)$$

Для некруговых выкроек составление условий взаимного непересечения существенно сложнее.

Опишем вначале некоторый общий прием, с помощью которого можно строить условия взаимного непересечения выкроек. Входной информацией для построения функции  $\Phi_{12}(x_1^1, x_2^1, \theta_1, x_1^2, x_2^2, \theta_2)$  являются левые части  $\omega_i(x_1, x_2)$  ( $i = 1, 2$ ) канонических уравнений выкроек  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Пусть  $\omega_i(x_1, x_2, x_1^i, x_2^i, \theta_i) = 0$  ( $i = 1, 2$ ) — соответствующие уравнения выкроек общего положения.

По определению функции  $\omega_i$  строятся таким образом, что в соответствующих областях  $\Omega_i$  они положительны, на границе  $\partial\Omega_i$  равны нулю, а вне — отрицательны. Пусть  $S = \Omega_1 \cap \Omega_2$ . Тогда функция  $f(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, \theta_1, x_1^2, x_2^2, \theta_2) \equiv \omega_1(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, \theta_1) \wedge_{\alpha} \wedge_{\alpha} \omega_2(x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, \theta_2)$  положительна в области  $S$  и отрицательна вне  $S$ . Условие непересечения выкроек состоит в том, чтобы область  $S$  состояла лишь из граничных точек или была пустым множеством. Отсюда следует, что условие взаимного непересечения упомянутых выкроек можно записать в виде

$$\Phi_{12}(x_1^1, x_2^1, \theta_1, x_1^2, x_2^2, \theta_2) \equiv - \max_{(x_1, x_2)} f(x_1, x_2, \\ x_1^1, x_2^1, \theta_1, x_1^2, x_2^2, \theta_2). \quad (2.421)$$

Наиболее просто находить максимум в условии (2.421), если выкройки выпуклые. В этом случае (см. § 15) нетрудно построить каноническое уравнение выкроек так, что функция  $f(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, \theta_1, x_1^2, x_2^2, \theta_2)$  будет иметь единственный максимум и его можно

достичь, исходя из произвольной начальной точки одним из описанных в предыдущем параграфе методов.

Если хотя бы одна из выкроек не выпуклая, то задача может оказаться многоэкстремальной. Хотя в большинстве случаев можно дать оценку сверху количества экстремумов; задача в этом случае становится намного сложнее.

Заметим, что так как максимум функции  $f(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, \theta_1, x_1^2, x_2^2, \theta_2)$  отыскивается лишь по двум переменным  $x_1$  и  $x_2$ , при машинном счете может оказаться целесообразным использование метода полного перебора. Область  $Q$ , в которой этот перебор должен быть произведен, может быть оценена следующим образом.

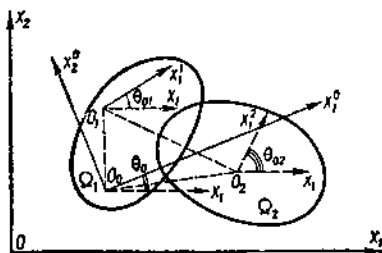


Рис. 93.

Приняв полюс выкройки  $\Omega_i$  за центр, накроем  $\Omega_i$  кругом наименьшего возможного радиуса  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ). Этот круг покрывает некоторую область  $Q_i$ , определяемую неравенством

$$q_i(x_1, x_2, x_1^i, x_2^i) \equiv R_i^2 - (x_1 - x_1^i)^2 - (x_2 - x_2^i)^2 \geq 0.$$

Условие непересечения кругов  $Q_1$  и  $Q_2$  имеет вид (2.420). Этим неравенством и определяется область, в которой находится искомый максимум.

Идея описанного выше общего подхода к построению условий непересечения выкроек проста, но все же он весьма сложен в реализации. В связи с этим ниже рассмотрены некоторые другие подходы, которые для широких классов выкроек (например, для выкроек, ограниченных дугами окружностей и отрезками прямых) позволяют избежать процедуры отыскания максимума (2.421), а искомые функции  $\varphi_i$  получать в явном элементарном виде.

3. Рассмотрим выкройки  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , имеющие параметры размещения  $x_1^1, x_2^1, \theta_1$  и  $x_1^2, x_2^2, \theta_2$  соответственно. Предположим, что эти выкройки частично наложены одна на другую и склеены. Пусть  $\Omega_0$  есть выкройка, полученная в результате этого склеивания выкроек  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Выберем полюс и ось выкройки  $\Omega_0$ , а параметры ее размещения обозначим  $x_1^0, x_2^0, \theta_0$  (рис. 93). Подвижную систему координат  $x_1^0, x_2^0$ , связанную со склеенной выкройкой  $\Omega_0$ , можно выбрать произвольно. Пусть  $x_1^{01}, x_2^{01}, \theta_{01}$  и  $x_1^{02}, x_2^{02}, \theta_{02}$  есть параметры размещения выкроек  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  в подвижной системе координат. Эти параметры могут считаться известными, так как их можно непосредственно измерить, если изготовить выкройку  $\Omega_0$ . Очевидно, что между строками величин  $x_1^1, x_2^1, \theta_1; x_1^2, x_2^2, \theta_2; x_1^{01}, x_2^{01}, \theta_{01}; x_1^{02}, x_2^{02}, \theta_{02}; x_1^0, x_2^0, \theta_0$  наблюдаются следующие связи:

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{01} \\ x_2^{01} \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_0 + \theta_{01}; \\ \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{02} \\ x_2^{02} \end{pmatrix}; \\ \theta_2 &= \theta_0 + \theta_{02}. \end{aligned}$$

Таким образом, если уравнение общего положения выкроек  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ) есть соответственно  $\omega_i(x_1, x_2, x_1^i, x_2^i, \theta_i) = 0$  ( $i = 1, 2$ ), то уравнение общего положения склеенной выкройки  $\Omega_0$  можем написать в виде

$$\begin{aligned} \omega_0(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0, \theta_0) &\equiv \omega_1[x_1, x_2, x_1^0 + x_1^{01} \cos \theta_0 - \\ &- x_2^{01} \sin \theta_0, x_2^0 + x_1^{01} \sin \theta_0 + x_2^{01} \cos \theta_0, \theta_0 + \\ &+ \theta_{01}] \vee \alpha \omega_2[x_1, x_2, x_1^0 + x_1^{02} \cos \theta_0 - x_2^{02} \sin \theta_0, x_2^0 + \\ &+ x_1^{02} \sin \theta_0 + x_2^{02} \cos \theta_0, \theta_0, \theta_{02}] = 0. \end{aligned} \quad (2.422)$$

Аналогично записывается уравнение общего положения в случае, когда склеивается несколько выкроек  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

Рассмотрим вопрос о том, как записать условия непересечения некоторой выкройки  $\Omega_N$  ( $N > m$ ), имеющей уравнение общего положения  $\omega_N(x_1, x_2, x_1^N, x_2^N, \theta_N) = 0$ , со склеенной выкройкой  $\Omega_0$ , если известен способ записи условий непересечения ее с выкройками  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), взятыми в отдельности. Пусть условия непересечения выкройки  $\Omega_N$  с выкройками  $\Omega_i$  имеют вид

$$\varphi_{iN}(x_1^i, x_2^i, \theta_i, x_1^N, x_2^N, \theta_N) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.423)$$

**Теорема 1.** Условие взаимного непересечения склеенной выкройки  $\Omega_0 = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m$  с выкройкой  $\Omega_N$  может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{0N}(x_1^0, x_2^0, \theta_0, x_1^N, x_2^N, \theta_N) &\equiv \bigwedge_{k=1}^{k=m} \varphi_{kN}(x_1^0 + x_1^{0k} \cos \theta_0 - \\ &- x_2^{0k} \sin \theta_0, x_2^0 + x_1^{0k} \sin \theta_0 + x_2^{0k} \cos \theta_0, \theta_0 + \theta_{0k}) \geq 0, \end{aligned} \quad (2.424)$$

где  $\bigwedge^*$  — некоторая R-конъюнкция, соответствующая конъюнкции трехзначной логики.

**Доказательство.** Для того чтобы выкройка  $\Omega_N$  не пересекалась с выкройкой  $\Omega_0$ , необходимо и достаточно, чтобы она не пересекалась ни с одной из выкроек  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Это означает, что условия (2.423) должны выполняться одновременно. Тогда согласно § 10 эти условия эквивалентны условию (2.424). Что и требовалось доказать.

**Следствие.** Так как условие взаимного непересечения кругов записывается в явном виде, то, используя теорему 1, можно в явном виде записывать условия непересечения выкроек, каждая из которых есть соединение некоторой системы кругов. Эту процедуру можно использовать для случая, когда выкройки достаточно хорошо аппроксимируются соединениями систем кругов (рис. 94).



В общем случае

$$\Omega' = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k; \quad \Omega'' = \Omega_{k+1} \cup \dots \cup \Omega_{k+m}.$$

Соответствующее условие непересечения выкроек  $\Omega'$  и  $\Omega''$  можно записать в форме

$$\bigwedge_{i=1}^{l=k} \bigwedge_{j=1}^{m} \Phi_{i, k+j}(x_1^i, x_2^i, \theta_i, x_1^{k+j}, x_2^{k+j}, \theta_{k+j}) \geq 0, \quad (2.425)$$

где  $\Phi_{i, k+j}(x_1^i, x_2^i, \theta_i, x_1^{k+j}, x_2^{k+j}, \theta_{k+j}) \geq 0$  — условие непересечения выкроек  $\Omega_i$  и  $\Omega_{k+j}$ ,

$$\begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta_0^i & -\sin \theta_0^i \\ \sin \theta_0^i & \cos \theta_0^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1i}^i \\ x_{2i}^i \end{pmatrix}; \quad \theta_i = \theta_0^i + \theta_i^i; \quad (2.426)$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+j} \\ x_2^{k+j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta_0^0 & -\sin \theta_0^0 \\ \sin \theta_0^0 & \cos \theta_0^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1, k+j}^0 \\ x_{2, k+j}^0 \end{pmatrix};$$

$$\theta_{k+j} = \theta_0^0 + \theta_{k+j}^0.$$

Здесь  $x_1^i, x_2^i, \theta_0^i$  и  $x_{1i}^i, x_{2i}^i, \theta_i^i$  — параметры размещения выкроек  $\Omega'$  и  $\Omega''$ , а  $x_{1i}^i, x_{2i}^i, \theta_i^i$  и  $x_{1, k+j}^0, x_{2, k+j}^0, \theta_{k+j}^0$  — параметры размещения выкроек  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) и  $\Omega_{k+j}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) в подвижных системах координат  $x_1^i O^i x_2^i$  и  $x_1^0 O^0 x_2^0$  соответственно.

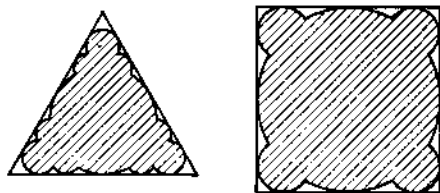


Рис. 94.

4. Покажем, что если построено нормальное уравнение выкройки (см. § 17), то условие ее непересечения с любой выкройкой, представляющей соединение конечного числа круговых выкроек, может быть записано в явном виде.

Пусть выкройка  $\Omega_1$  задана каноническим уравнением  $\omega_1 = 0$  и известно нормальное уравнение  $\omega_1^0 = 0$  контура этой выкройки в начальном ее положении. С помощью формул (2.417) напишем уравнение общего положения рассматриваемой выкройки  $\omega_1(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, \theta_1) = 0$  и соответствующее этому положению нормальное уравнение  $\omega_1^0(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, \theta_1) = 0$ . Напишем условие непересечения выкройки  $\Omega_1$  с круглой выкройкой  $\Omega_2$  радиуса  $R$ .

Если  $x_1^2, x_2^2$  — координаты центра выкройки  $\Omega_2$ , то величина  $\delta = \omega_1^0(x_1^2, x_2^2, x_1^1, x_2^1, \theta_1)$  представляет собой (по определению нормального уравнения, § 17) кратчайшее расстояние от этого центра до выкройки  $\Omega_1$ . Очевидно, что при  $\delta \geq R$  выкройка  $\Omega_2$  не пересекается с контуром выкройки  $\Omega_1$ . Это однако не означает, что выкройки  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  не пересекаются. Так, например, размеры выкройки  $\Omega_1$  могут быть достаточно большими для того, чтобы внутри ее могла разместиться выкройка  $\Omega_2$ . В этом случае условие

$\delta \geq R$  также будет выполнено, хотя выкройки пересекаются. Поэтому, если этот случай возможен, т. е. если  $\Omega_2$  может разместиться в  $\Omega_1$ , надо, чтобы одновременно выполнялись два условия

$$\begin{aligned} \omega_1^0(x_1^2, x_2^2, x_1^1, x_2^1, \theta_1) - R &\geq 0; \\ \omega_1(x_1^2, x_2^2, x_1^1, x_2^1, \theta_1) &\leq 0. \end{aligned} \quad (2.427)$$

Сворачивая эти неравенства в одно, приходим к условию вида

$$\begin{aligned} \varphi_{12}(x_1^1, x_2^1, \theta_1, x_1^2, x_2^2, \theta_2) \equiv |\omega_1^0(x_1^2, x_2^2, x_1^1, x_2^1, \theta_1) - \\ - R| \wedge \alpha |-\omega_1(x_1^2, x_2^2, x_1^1, x_2^1, \theta_1)| \geq 0. \end{aligned} \quad (2.428)$$

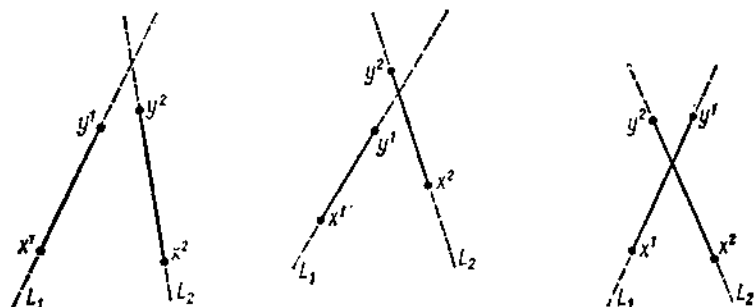


Рис. 95.

Если круговая выкройка не помещается внутри  $\Omega_1$ , то условие ее непересечения с  $\Omega_1$  есть первое из неравенств (2.427).

5. Если контуры выкроек  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  ограничены дугами окружностей и отрезками прямых, то условие их непересечения можно записать в явном элементарном виде  $\varphi_{12}(x_1^1, x_2^1, \theta_1, x_1^2, x_2^2, \theta_2) \geq 0$ . Для простоты изложения основной идеи ограничимся случаем многоугольных выкроек.

Рассмотрим вначале условия непересечения отрезков  $x^1y^1$  и  $x^2y^2$ , имеющих длины  $l_1$  и  $l_2$  соответственно. Начала подвижных систем координат поместим в середине отрезков, направив оси абсцисс вдоль отрезков. Параметры размещения обозначим  $x_1^1, x_2^1, \theta_1$  и  $x_1^2, x_2^2, \theta_2$  соответственно. На рис. 95 показаны различные варианты размещения рассматриваемых отрезков. Отрезок  $x^1y^1$  лежит на прямой  $L_1$ , а  $x^2y^2$  — на прямой  $L_2$ . Очевидно, для пересечения отрезков, необходимо и достаточно, чтобы точки  $x^1$  и  $y^1$  лежали по разные стороны от прямой  $L_2$ , а точки  $x^2$  и  $y^2$  — по разные стороны от прямой  $L_1$ . Уравнения прямых  $L_1$  и  $L_2$  можно написать соответственно в виде

$$\psi_1(x_1, x_2, x_1^1, x_2^1, \theta_1) \equiv (x_1 - x_1^1) \sin \theta_1 - (x_2 - x_2^1) \cos \theta_1 = 0; \quad (2.429)$$

$$\psi_2(x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, \theta_2) \equiv (x_1 - x_1^2) \sin \theta_2 - (x_2 - x_2^2) \cos \theta_2 = 0.$$

Функция  $\psi_1$  принимает значения разных знаков в полуплоскостях, ограниченных прямой  $L_1$ , а функция  $\psi_2$  — ограниченных прямой  $L_2$ . Координаты концов отрезков определяются по формулам

$$\begin{aligned}x' &= (x_1^1 - \frac{1}{2} l_1 \cos \theta_1, x_2^1 - \frac{1}{2} l_1 \sin \theta_1); \\y' &= (x_1^1 + \frac{1}{2} l_1 \cos \theta_1, x_2^1 + \frac{1}{2} l_1 \sin \theta_1); \\x'' &= (x_1^2 - \frac{1}{2} l_2 \cos \theta_2, x_2^2 - \frac{1}{2} l_2 \sin \theta_2); \\y'' &= (x_1^2 + \frac{1}{2} l_2 \cos \theta_2, x_2^2 + \frac{1}{2} l_2 \sin \theta_2).\end{aligned}\tag{2.430}$$

Тогда, для того чтобы отрезки не пересекались, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось по крайней мере одно из неравенств

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\equiv \psi_1(x_1^2 - \frac{1}{2} l_2 \cos \theta_2, x_2^2 - \frac{1}{2} l_2 \sin \theta_2, x_1^1, x_2^1, \theta_1) \psi_1(x_1^1 + \\&+ \frac{1}{2} l_1 \cos \theta_1, x_2^1 + \frac{1}{2} l_1 \sin \theta_1, x_1^1, x_2^1, \theta_1) \geq 0; \\ \varphi_2 &\equiv \psi_2(x_1^1 - \frac{1}{2} l_1 \cos \theta_1, x_2^1 - \frac{1}{2} l_1 \sin \theta_1, x_1^2, x_2^2, \theta_2) \psi_2(x_1^2 + \\&+ \frac{1}{2} l_2 \cos \theta_2, x_2^2 + \frac{1}{2} l_2 \sin \theta_2, x_1^2, x_2^2, \theta_2) \geq 0.\end{aligned}\tag{2.431}$$

Первое неравенство выполняется, если отрезок  $x^2y^2$  лежит по одну из сторон прямой  $L_1$ , а второе — если отрезок  $x^1y^1$  лежит по одну из сторон прямой  $L_2$ . Неравенства (2.431) можно заменить одним неравенством, применив, например,  $R$ -дизъюнкцию  $x_1 \vee x_2$ :

$$\begin{aligned}\omega(x_1^1, x_2^1, \theta_1, x_1^2, x_2^2, \theta_2) &\equiv \varphi_1(x_1^1, x_2^1, \theta_1, x_1^2, x_2^2, \theta_2) \vee \alpha \\&\vee \alpha \varphi_2(x_1^1, x_2^1, \theta_1, x_1^2, x_2^2, \theta_2) \geq 0.\end{aligned}\tag{2.432}$$

Для записи условий непересечения отрезков примем обозначение  $\omega(x_1^1, x_2^1, \theta_1, x_1^2, x_2^2, \theta_2)$  как стандартное. Используя теорему 1 и сделанные из нее выводы в предыдущем пункте, легко с помощью формул (2.425) и (2.432) писать в явном виде условия непересечения чертежей, состоящих из отрезков прямых.

Совершенно аналогичные, но несколько более громоздкие формулы можно получить для чертежей, состоящих из дуг окружностей и отрезков прямых [142, 143].

6. При решении задач оптимального раскроя надо следить не только за тем, чтобы не происходило взаимного наложения выкроек, но и за тем, чтобы выкройки не выходили за пределы материала. Нетрудно заметить, что это та же задача о непересечении выкроек, если одну из выкроек считать внешностью области, занятой материалом. Это позволяет использовать результаты, приведенные в предыдущих пунктах данного параграфа и в этом случае. Если, например, материал имеет форму круга, пересечения кругов, выпук-

лого многоугольника и другие формы, условия размещения выкроек на материале имеют простой вид [109].

7. Выше были вкратце изложены методы, пользуясь которыми можно составлять условия размещения выкроек на материале и условия взаимного непересечения выкроек.

Пусть  $\Sigma$  есть область, занимаемая материалом, а  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — выкройки с параметрами размещения  $(x_1^i, x_2^i, \theta_i)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) соответственно. Условия размещения выкроек на материале имеют вид

$$\varphi_i(x_1^i, x_2^i, \theta_i) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m), \quad (2.433)$$

а условия их взаимного непересечения —

$$\varphi_{ij}(x_1^i, x_2^i, \theta_i, x_1^j, x_2^j, \theta_j) \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, m, i \neq j). \quad (2.434)$$

Таким образом, приходим к системе  $s = 1/2m(m+1)$  неравенств, связывающих  $n = 3m$  параметров размещения выкроек  $x_1^i, x_2^i, \theta_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Каждому набору этих параметров можно поставить в соответствие точку  $n$ -мерного пространства ( $n = 3m$ ). Если задача оптимального раскроя имеет решение, то существуют такие точки  $n$ -мерного пространства, координаты которых удовлетворяют условиям (2.433) и (2.434). Такие точки будем называть *точками раскроя*, а их совокупность — *областью раскроя*. Координаты  $x_1^1, x_2^1, \theta_1, \dots, x_1^m, x_2^m, \theta_m$  точки раскроя назовем *параметрами раскроя*. Зная параметры раскроя, можно построить каждую выкройку и таким образом получить размещение выкроек на материале. Всякое такое размещение выкроек назовем *раскрыем*.

Задача оптимального раскроя состоит в том, чтобы выбрать из области раскроя такую точку раскроя, которой соответствует наилучший (в том или ином смысле) раскрой материала.

Величина  $z$ , оптимум которой должен быть достигнут, является функцией параметров размещения, т. е.

$$z = \psi(x_1^1, x_2^1, \theta_1, \dots, x_1^m, x_2^m, \theta_m). \quad (2.435)$$

Возможно, что эта функция будет задана неявно

$$\psi(x_1^1, x_2^1, \theta_1, \dots, x_1^m, x_2^m, \theta_m, z) = 0. \quad (2.436)$$

До сих пор предполагалось, что область  $\Sigma$ , соответствующая материалу раскроя, не изменяется в процессе решения задачи об оптимальном раскрое. Однако во многих случаях удобно рассматривать материал переменной формы, зависящей от ряда параметров  $t_1, \dots, t_k$ . Эти параметры назовем конструктивными *параметрами материала*. Они войдут в условия размещения выкроек на материале, и вместо неравенств (2.433) получим неравенства

$$\varphi_i(t_1, \dots, t_k, x_1^i, x_2^i, \theta_i, \dots, x_1^m, x_2^m, \theta_m) \geq 0. \quad (2.437)$$

Эти же параметры могут быть связаны функциональной зависимостью с функцией цели

$$\psi(t_1, \dots, t_k, x_1^1, x_2^1, \theta_1, \dots, x_1^m, x_2^m, \theta_m, z) = 0. \quad (2.438)$$

Таким образом, в задачах с материалом переменной формы размерность пространства, в котором находится область раскроя, должна быть, вообще, увеличена на число конструктивных параметров материала, т. е.  $n = 3m + k$ . В принципе задача остается прежней: найти такую точку области, определяемой неравенствами (2.434) и (2.437), которой соответствует наименьшее (или наибольшее) значение функции цели, определяемой из уравнения (2.438).

Из сказанного выше следует, что задачи оптимального раскроя могут быть сформулированы как задачи математического программирования и, следовательно, для их решения могут быть привлечены методы, описанные в предыдущем параграфе. Рассмотренные вопросы впервые систематически изложены в монографии [109].

В последние годы появились работы, в которых задача оптимального размещения сочетается с необходимостью расчета физико-механических полей той или иной природы (например, [171]).

8. Важное значение для решения задач оптимального размещения геометрических объектов имеют введенные Ю. Г. Стояном функция плотного размещения и ее годограф.

**Определение 1.** Замкнутые геометрические объекты  $S_i$  и  $S_j \subset \mathbb{R}^3$  называются плотно расположенными, если кратчайшее расстояние между ними

$$R_{ij} = \min_{\substack{x \in S_i \\ y \in S_j}} \rho(x, y). \quad (2.439)$$

Пусть точки  $O_i, O_j$  ( $O_i \in \text{int } S_i, O_j \in \text{int } S_j$ ) выбраны в качестве полюсов объектов  $S_i, S_j$ . Свяжем в  $S_i$  и  $S_j$  прямоугольные системы координат таким образом, чтобы их начала совпали с полюсами  $O_i$  и  $O_j$ . Рассмотрим расстояние между объектами  $S_i$  и  $S_j$  в системе координат, связанной с объектом  $S_j$ . Для простоты положим, что объекты могут осуществлять лишь движение переноса (т. е. движение вращения отсутствует). Тогда кратчайшее расстояние  $R_{ij}$  между парой объектов  $S_i$  и  $S_j$  есть некоторая функция  $\Psi_{ij}(X_i, Y_i, Z_i)$  трех параметров  $X_i, Y_i, Z_i$  таких, что

$$X_i = x_i - x_j, Y_i = y_i - y_j, Z_i = z_i - z_j, \quad (2.440)$$

где  $x_i, y_i, z_i$  — параметры размещения объекта  $S_i$ . Из определения 1 следует, что условием плотного расположения объектов  $S_i$  и  $S_j$  является равенство

$$\Psi_{ij}(X_i, Y_i, Z_i) = R_{ij}. \quad (2.441)$$

Поскольку интерес представляет расстояние  $r_{ij} = (X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2)^{1/2}$  между  $O_i$  и  $O_j$  плотно расположенных объектов  $S_i$  и  $S_j$ , условие (2.441) удобнее рассматривать в сферической системе координат:

$$\Phi_{ij}(r_{ij}, \theta_{ij}, \varphi_{ij}) = R_{ij}. \quad (2.442)$$

Положим, что в равенстве (2.442)  $r_{ij}$  есть зависимая переменная. Это значит, что  $r_{ij}$  есть некоторая функция от переменных  $\theta_{ij}, \varphi_{ij}$ ,

$\varphi_{ij}$  и параметра  $R_{ij}$ :

$$r_{ij} = f_{ij}(\theta_{ij}, \varphi_{ij}, R_{ij}). \quad (2.443)$$

Понятно, что  $\theta_{ij}$  и  $\varphi_{ij}$  определяют направление вектора  $\vec{O}_i \vec{O}_j$ .

**Определение 2.** Функция  $f_{ij}(\theta_{ij}, \varphi_{ij}, R_{ij})$  называется функцией плотного размещения объектов  $S_i$  и  $S_j$ .

Таким образом, из способа построения функции плотного размещения вытекает следующее ее основное свойство: для всякого направления луча, выходящего из полюса  $O_i$  и проходящего через полюс  $O_j$ , функция  $f_{ij}(\theta_{ij}, \varphi_{ij}, R_{ij})$  равна значению, соответствующему такому расстоянию между полюсами  $O_i$  и  $O_j$  объектов  $S_i$  и  $S_j$ , при котором кратчайшее расстояние между объектами  $S_i$  и  $S_j$  равно заданному значению  $R_{ij}$ ; значение  $r_{ij}$  (2.443) есть текущее расстояние между полюсами плотно расположенных в пространстве объектов  $S_i$  и  $S_j$ .

Обозначим через  $\rho_{ij}$  расстояние между полюсами произвольно расположенных объектов  $S_i$  и  $S_j$ . Ясно, что неравенство

$$\rho_{ij} - f_{ij}(\theta_{ij}, \varphi_{ij}, R_{ij}) \geq 0 \quad (2.444)$$

есть условие того, что объекты  $S_i$  и  $S_j$  расположены на расстоянии не меньшем, чем  $R_{ij}$ , т. е. неравенство (2.444) есть условие взаимного непересечения объектов  $S_i$  и  $S_j$ . Неравенство (2.444) можно также представить в виде

$$X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 - f_{ij}^2(\theta_{ij}, \varphi_{ij}, R_{ij}) \geq 0. \quad (2.445)$$

Структура условий взаимного непересечения (2.444) или (2.445), очевидно, не зависит от того, какие точки объектов  $S_i$  и  $S_j$  выбраны в качестве полюсов. Функция плотного размещения объектов  $S_i$  и  $S_j$  является периодической в общем случае с периодом  $2\pi$ .

Рассматривая функцию  $f_{ij}(\theta_{ij}, \varphi_{ij}, R_{ij})$  как длину переменного вектора, выходящего из полюса  $O_i$ , направление которого определяется углами  $\theta_{ij}$ ,  $\varphi_{ij}$ , получаем векторную функцию плотного размещения  $\vec{f}_{ij}$ , годограф которой представляет собой некоторую поверхность. Эта поверхность называется годографом вектор-функции плотного размещения [167, 168]. Уравнение этого годографа такое:

$$\Phi_{ij}(X_i, Y_i, Z_i) = 0. \quad (2.446)$$

Левая часть (2.446) зависит лишь от параметров размещения объектов  $S_i$  и  $S_j$ . Функция  $\Phi_{ij}(X_i, Y_i, Z_i)$  обладает следующими характеристическими свойствами:

если  $\min_{\substack{x \in S_i \\ y \in S_j}} \rho(x, y) < R_{ij}$ , то  $\Phi_{ij}(X_i, Y_i, Z_i) < 0$ ;

если  $\min_{\substack{x \in S_i \\ y \in S_j}} \rho(x, y) = R_{ij}$ , то  $\Phi_{ij}(X_i, Y_i, Z_i) = 0$ ;

если  $\min_{\substack{x \in S_i \\ y \in S_j}} \rho(x, y) > R_{ij}$ , то  $\Phi_{ij}(X_i, Y_i, Z_i) > 0$ .

Отсюда следует, что условия взаимного непересечения объектов  $S_i$  и  $S_j$  можно записать в виде

$$\Phi_{ij}(X_i, Y_i, Z_i) \geq 0.$$

Способам построения функции плотного размещения и ее годографа, изучению их свойств, а также вопросам их практического применения при решении задач размещения геометрических объектов посвящен ряд работ [167—172].

*Упражнения и задачи.* 1. Заданы материал  $\Sigma$  и выкройка  $\Omega$ . Задача оптимального раскроя состоит в размещении на  $\Sigma$  максимального количества выкроек, конгруэнтных  $\Omega$ . Показать, что если на  $\Sigma$  размещается  $n \geq 2$  выкроек, то сформулированная задача является многоэкстремальной. Оценить рост количества экстремумов с увеличением  $n$ .

2. Пусть в предыдущей задаче  $\Sigma$  есть вся плоскость, а выкройки, конгруэнтные  $\Omega$ , должны быть одинаково сориентированы. Сформулировать критерии оптимальности для этой задачи (имея в виду минимальность отходов материала).

3. В задаче 1 допускается зеркальное отражение (переворачивание) выкроек относительно прямых в плоскости. Показать, что  $n_1 \leq n_2$ , где  $n_1$  — максимальное число выкроек, размещаемых в условиях задачи 1, а  $n_2$  — размещаемых в данной задаче.

4. Рассмотреть задачу 1 в случае, если  $\Sigma$  есть бесконечная или полубесконечная полоса. Сформулировать соответствующие критерии оптимальности.

5. Требуется разместить  $N$  выкроек круговой формы различных радиусов при наличии ограничений (сверху и снизу) на пары расстояний между их центрами. (Например, эти выкройки можно рассматривать как цилиндрические сосуды, связанные между собой трубами). Задача состоит в том, чтобы разместить эти выкройки на прямоугольнике наименьшей площади. Сформулировать эту задачу как задачу математического программирования.

6. Показать, что предыдущая задача (даже если выкройки не круглые) является многоэкстремальной (при  $N \geq 2$ ) и предложить метод уменьшения количества экстремумов [109].

7. Показать, что задача оптимального раскроя на материале фиксированной формы может быть, вообще, сведена к последовательности задач с подвижными границами [109].

**ПУЧКИ ФУНКЦИЙ  
С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ НА ЧЕРТЕЖАХ.  
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И СТРУКТУРЫ ИХ РЕШЕНИЙ**

**§ 1. Продолжение граничных значений функции  
внутрь области. Пучок функций,  
удовлетворяющих граничным условиям задачи Дирихле**

Заданный чертеж  $L \subset \mathbb{R}^n$  можно описать бесчисленным множеством различных уравнений. Если  $L = \{\omega(x) = 0\}$  — некоторый чертеж, а  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — знакопостоянная ограниченная функция, то также  $L = \{\omega\Phi = 0\}$ . Формулу

$$u = \omega\Phi, \quad (3.1)$$

где  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — элемент некоторого множества  $\mathfrak{M}$ , например множества непрерывных ограниченных функций (точнее, вектор-функций, имеющих  $m$  непрерывных и ограниченных компонент), можно рассматривать как формулу пучка функций, равных нулю на  $L$ . Обозначим такой пучок  $L(\omega, \mathfrak{M})$ , функцию  $\Phi$  (это может быть вектор-функция, тензор и прочее — термин «функция» употребляется лишь для простоты) будем называть *неопределенной компонентой* пучка. Чем шире множество  $\mathfrak{M}$ , тем, вообще, шире пучок  $u = \omega\Phi$ . В дальнейшем, как правило, будет предполагаться, что  $\mathfrak{M}$  — некоторое линейное пространство известного типа ( $C^k$ ,  $H^s$ ,  $\mathfrak{M}(H)$ , ...) или, возможно, прямое произведение таких пространств. Тогда, как легко проверить, пучок (3.1) также является линейным пространством.

Пусть  $\mathfrak{M}_0$  — некоторое множество функций, равных нулю на  $L$ . Важным является вопрос: какой должна быть функция  $\omega$ , чтобы условие  $L(\omega, \mathfrak{M}) \supset \mathfrak{M}_0$  выполнялось для как можно более узкого множества  $\mathfrak{M}$ ? То, что широта пучка  $L(\omega, \mathfrak{M})$  существенно зависит от выбора функции  $\omega$ , можно показать на примере. Пусть  $L$  — окружность в  $\mathbb{R}^2$  и для нее написаны два различных уравнения:  $\omega_1 \equiv R^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$  и  $\omega_2 \equiv (R^2 - x_1^2 - x_2^2)^2 = 0$ .

Предположим, что  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(H_0)$ ;  $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1 - x_2, a \mid \forall a \in \mathbb{R}\}$  (т. е.  $\mathfrak{M}$  — множество целых рациональных функций), а  $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$  — множество целых рациональных функций, равных нулю на окружности  $L$ . Тогда  $L(\omega_1, \mathfrak{M}) \supset \mathfrak{M}_0$  (см. упражнение 1 данного параграфа). Однако  $L(\omega_2, \mathfrak{M}) \not\supset \mathfrak{M}_0$ . Например,  $R^2 - x_1^2 - x_2^2 \in \mathfrak{M}_0$ , но не существует такой целой рациональной функции  $\Phi$ , что  $(R^2 - x_1^2 - x_2^2)^2 \Phi \equiv R^2 - x_1^2 - x_2^2$ .

В общем случае сформулированный выше вопрос весьма сложный, так как его решение существенно зависит также от геометрии



(формы) чертежа  $L$ . Далее он будет рассматриваться с более общих позиций, в связи с задачей об аппроксимационных возможностях использования пучков. Такие задачи довольно часто ставятся в математической физике. Например, в задаче о чистом кручении стержня с поперечным сечением  $\Omega$  необходимо найти решение уравнения  $\Delta u + 2 = 0$  в  $\Omega$  с краевым условием  $u = 0$  на  $\partial\Omega$ . В задаче о защемленной по контуру  $\partial\Omega$  тонкой пластинке, подверженной поперечному давлению  $q$ , необходимо найти решение уравнения Софи Жермен

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^2 u = q, \quad x \in \Omega \quad (3.2)$$

(где  $D$  — цилиндрическая жесткость пластины), при краевых условиях  $u = 0$  и  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  на  $\partial\Omega$  ( $\nu$  — нормаль к  $\partial\Omega$ ). Решения этих двух задач принадлежат некоторым пучкам функций, равных нулю на  $\partial\Omega$ . Здесь возникают следующие вопросы: каковы должны быть эти пучки, чтобы в них содержались решения названных задач или, по крайней мере, достаточно хорошие их приближения? как конструктивно задать эти пучки? как выбирать неопределенные компоненты пучков, чтобы получить или аппроксимировать (в том или ином смысле) искомые решения?

В работе И. Ю. Харрик [182], например, рассматривается задача об оценке приближения в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  функции  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , обращаемой на ее границе в нуль вместе со своими частными производными до  $(r-1)$ -го порядка включительно, функциями вида

$$u = \omega^r(x) P_j(x), \quad (3.3)$$

где  $P_j(x)$  ( $j = 1, \dots, N$ ) — последовательность полиномов степени не выше  $N$  относительно каждого из аргументов  $x_i$ . При этом предполагается, что  $\partial\Omega$  есть  $C^\infty$ -многообразие,  $\omega(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)$  и, кроме того,  $\omega > 0$  при  $x \in \Omega$ ,  $\omega = 0$  на  $\partial\Omega$ ,  $\omega(x) < 0$  вне  $\Omega$ ,  $\text{grad } \omega \neq 0$  на  $\partial\Omega$ , а производные от  $\omega$  порядка  $k$  удовлетворяют условию Липшица ( $\text{Lip}_M 1$ ). Для оценки получена формула

$$\|u - \omega^r P_N\|_{C^p(\Omega)} = O \left\{ \frac{\omega \left( u, \frac{1}{N} \right)_{C^k(\Omega)}}{N^{k-p}} \right\} \quad (p = 0, 1, \dots, k), \quad (3.4)$$

где  $\omega(u, \varepsilon)_{C^k(\Omega)}$  ( $\varepsilon > 0$ ) — модуль непрерывности функции  $u$  в пространстве  $C^k(\Omega)$  [176]. В работе М. Х. Шульца [205] показано, как можно использовать функции вида  $\omega^r \Phi$  в качестве координатных, полагая  $\Phi$  многомерным полиномом или сплайном, и приведены оценки приближенного решения краевой задачи при использовании вариационных методов Рунца — Галеркина.

Аналогичные вопросы возникают и в других ситуациях, когда условие равенства нулю на чертеже  $L$  заменяется другими условиями более сложного вида. В частности, в настоящем параграфе

рассмотрена задача о построении пучков функций, принимающих в точках данного чертежа значения, определяемые некоторой  $H$ -реализуемой (в частности, элементарной) функцией  $\varphi_0: \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $L \subset \Sigma_0$ , или системой такого же рода функций  $\varphi_k: \Sigma_k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $L_i \subset \Sigma_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ), где  $L_i$  — части чертежа  $L$ , и требуется, чтобы функции построенного пучка удовлетворяли условиям

$$u|_L = \begin{cases} \varphi_1, & x \in L_1; \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_s, & x \in L_s \end{cases} \quad (3.5)$$

( $\varphi_i$  будем называть нагружающими функциями). Заметим, что функции  $\varphi_i$  могут быть и не определены везде вне  $L_i$ . А пучок функций, удовлетворяющих условиям (3.5), должен быть определен везде в  $\mathbb{R}^n$  или в некоторой интересующей нас области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

Вопросы продолжения функций через границу области с различной степенью гладкости рассматривались С. М. Никольским [93], В. М. Бабич [8], В. К. Дзядьком [32], М. Р. Хестенсом [200], Х. Уитни [206] и другими авторами. В отличие от названных работ в настоящей работе речь идет об эффективной конструктивной реализации такого продолжения в рамках множества  $\mathfrak{M}(H)$   $H$ -реализуемых функций, где  $H$  — та или иная алгоритмически полная система (см. § 12 гл. 2), включающая все арифметические операции. Другими словами, здесь основным является не вопрос существования функций определенной гладкости, имеющих заданное сужение на чертеже  $L$  (или его частях  $L_i$ ), а вопрос фактического построения  $H$ -реализуемых (в частности, элементарных) функций, сужения которых на  $L$  (или  $L_i$ ) также являются  $H$ -реализуемыми.

Предположим вначале, что чертеж  $L$  можно разбить на элементы  $L_1, \dots, L_m$ , которые также являются чертежами, на каждом из которых функция  $\varphi_0$  может быть задана формулой

$$\varphi_0|_{L_i} = \varphi_i|_{L_i}, \quad (3.6)$$

где  $\varphi_i$  —  $H$ -реализуемые функции, определенные везде в  $\Omega$ ,  $L \subset \subset \Omega$ . Некоторые точки элемента  $L_i$  могут быть одновременно и точками некоторых других элементов чертежа  $L$ . Эти точки будем называть *концевыми точками*  $L_i$ . Ясно, что если некоторая точка  $x^0$  принадлежит элементам  $\{L_j\}$ ,  $j \in I$ , где  $I$  — некоторое множество индексов, то необходимым условием непрерывности функции  $\varphi_0$ , которая должна быть построена, является выполнение условий

$$\varphi_j(x^0) = \varphi_k(x^0), \quad \forall j, k \in I. \quad (3.7)$$

В дальнейшем для простоты рассуждений будем предполагать условия (3.7) выполненными. Встречаются, однако, ситуации, когда некоторые из условий (3.7) не выполняются и соответствующие концевые точки элементов  $L_i$  неизбежно являются точками разрыва для функции  $\varphi_0(x)$ . Поэтому могут возникнуть некоторые дополнительные условия (например, обеспечение интегрируемости функции

$\varphi_0(x)$ , удовлетворяющей условиям (3.6) принадлежности, ее к классу  $H^0(\Omega)$  и т. п.).

Пусть  $L_k^0 = \cup L_i$  ( $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m$ ), а  $\omega_k^0(x) = 0$  — уравнение  $L_k^0$ , причем  $\omega_k^0(x) > 0$  вне  $L_k^0$ . Уравнения  $\omega_k^0(x) = 0$ ;  $\omega_k^0(x) \in \mathfrak{M}(H)$  могут быть построены с помощью  $R$ -функций методами, описанными в предыдущей главе.

Функция

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \omega_1^0 + \dots + \varphi_m \omega_m^0}{\omega_1^0 + \dots + \omega_m^0} \quad (3.8)$$

определена везде в области  $\Omega$ , за исключением, быть может, упомянутых выше концевых точек элементов  $L_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и, как не трудно убедиться, удовлетворяет условиям (3.6).

Очевидно, что все другие функции, совпадающие на  $L_i$  с функциями  $\varphi_i$ , отличаются от  $\varphi$  на функцию, равную нулю на  $L$ . Поэтому можно написать следующую формулу для пучка функций, удовлетворяющих условиям (3.6):

$$u = \frac{\varphi_1 \omega_1^0 + \dots + \varphi_m \omega_m^0}{\omega_1^0 + \dots + \omega_m^0} + \omega \Phi, \quad (3.9)$$

где  $\omega = 0$  — уравнение  $L$ , а  $\Phi$  — неопределенная компонента пучка из множества ограниченных функций. Как и для пучков функций (3.1) и (3.3), широта пучка функций (3.9) зависит от выбора функции  $\omega$  (а следовательно, до некоторой степени и от геометрии чертежа  $L$ ); важную роль играет также выбор функций  $\varphi_i$  и  $\omega_i^0$  (об этом будет сказано при рассмотрении конкретных примеров).

Иногда склеивающую функцию  $\varphi$  удобно строить в виде

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \tau_1 + \dots + \varphi_m \tau_m}{\tau_1 + \dots + \tau_m} + \omega \Phi, \quad (3.10)$$

где  $\tau_i = \omega_i^{-1}$ ,  $L_i = (\omega_i = 0)$ ,  $\omega_i > 0$  вне  $L_i$ . В этом случае при приближении к элементу  $L_i$  функция  $\tau_i$  стремится к бесконечности и предельные значения  $\varphi$  совпадают со значениями  $\varphi_i$ . Если дополнительно обеспечить нормализованность функций  $\omega_i$  на  $L_i$  и, кроме того, если выполнить условия  $\omega_i, \varphi_i \in C^{k_i}(\Omega)$ , ( $i = 1, \dots, m$ ), то можно использовать формулу

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \tau_1^{k_1} + \dots + \varphi_m \tau_m^{k_m}}{\tau_1^{k_1} + \dots + \tau_m^{k_m}}, \quad (3.11)$$

дополнительно обеспечивающую выполнение условий (для концевых точек):

$$D^j \varphi|_{L_i} = D^j \varphi_i|_{L_i} \quad (j = 1, \dots, k_i - 1), \quad (3.12)$$

где  $D^j$  — линейные дифференциальные операторы порядка  $j$ . Действительно, не нарушая общности рассуждений, будем считать, что рассматривается поведение функции (3.11) в замкнутой

окрестности неконцевой точки  $x^0 \in L_1 \subset L$ . Формулу (3.11), учитывая, что  $\tau_1 = \omega_1^{-1}$ , можно переписать в виде

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \omega_1^{k_1} (\varphi_2 \tau_2^{k_2} + \dots + \varphi_m \tau_m^{k_m})}{1 + \omega_1^{k_1} (\tau_2^{k_2} + \dots + \tau_m^{k_m})} = \varphi_1 + \omega_1^{k_1} \Psi, \quad (3.13)$$

где  $\Psi$  — ограниченная в упомянутой окрестности функция. Тогда для всякого линейного дифференциального оператора  $D^j$  порядка  $j < k_1 - 1$  будет  $D^j \varphi|_{x^0} = D^j \varphi_1|_{x^0}$ , что и требовалось доказать.

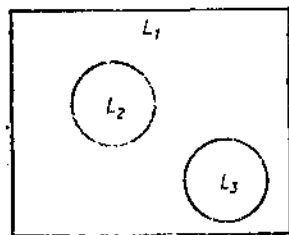


Рис. 96

Требование линейности операторов  $D^j$  для выполнения условий (3.12) не обязательно. Действительно, пусть

$$D^j \varphi = F \left( x, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^{k_1-1} \varphi}{\partial x_1^{k_1-1}} \right), \quad (3.14)$$

где  $F$  — непрерывная функция по всем аргументам в совокупности. Тогда, подставляя формулу (3.13) в (3.14), получаем

$$D^j \varphi = D^j (\varphi_1 + \omega_1^{k_1} \Psi) = F \left[ x, \varphi_1 + O(\omega_1^{k_1}), \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + O(\omega_1^{k_1-1}), \dots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + O(\omega_1^{k_1-1}), \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + O(\omega_1^{k_1-2}), \dots, \frac{\partial^{k_1-1} \varphi_1}{\partial x_1^{k_1-1}} + O(\omega_1) \right] \Big|_{L_1} = D^j \varphi_1.$$

Это, в частности, означает, что если на  $L_i$  функции  $\varphi_i$  удовлетворяют некоторым условиям вида

$$F(x, \varphi_i, D_1 \varphi_i, \dots, D_{k_i-1} \varphi_i)|_{L_i} = 0 \quad (3.15)$$

( $D_j$  — символы производных порядка  $j$ ),  $F \in C$ , то этим же условиям на  $L_i$  (за исключением концевых точек, поведение в которых надо изучать в каждом конкретном случае) удовлетворяет и функция  $\varphi$  (3.10).

Естественно, если нас интересует не только совпадение значений функции  $\varphi$  со значениями функций  $\varphi_i$  на  $L_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), но и совпадение их частных производных до порядков  $k_i - 1$ , то для получения соответствующего пучка функций недостаточно добавить к правой части формулы (3.11) слагаемое  $\omega \Phi$ , так как производные от  $\omega \Phi$  могут быть, вообще, отличными от нуля. В этом случае можно использовать формулу

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \tau_1^{k_1-1} + \dots + \varphi_m \tau_m^{k_m-1}}{\tau_1^{k_1-1} + \dots + \tau_m^{k_m-1}} + \omega^N \Phi, \quad (3.16)$$

где  $N \geq \max \{k_1, \dots, k_m\}$ , а  $\Phi \in C^N(\Omega)$ .

Если элементы  $L_i$  чертежа  $L$  не имеют концевых точек (например, рис. 96), а все заданные функции определены и требуемое число раз дифференцируемы в интересующей нас области  $\Omega$ , то применение формул для пучков функций (3.10), (3.13) и (3.16) не вызывает каких-либо затруднений.

**Пример 1.** Пусть  $\partial\Omega$  есть сфера, определяемая уравнением

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \equiv R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0. \quad (3.17)$$

Требуется построить непрерывную везде и аналитическую внутри сферы функцию  $(x_1, x_2, x_3)$ , которая на верхней половине сферы принимает значение  $\Phi_1 = x_3$ , а на нижней —  $\Phi_2 = -x_3$ .

Используя формулу (2.164), уравнения верхней и нижней полусфер напишем в виде

$$\omega_1 \equiv \sqrt{(R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^2 + x_3^2} - x_3 = 0; \quad (3.18)$$

$$\omega_2 \equiv \sqrt{(R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^2 + x_3^2} + x_3 = 0.$$

Очевидно, что в формуле (3.9) можно взять  $\Phi_1 = x_3$ ,  $\Phi_2 = -x_3$ . Тогда получим

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3\omega_2 - x_3\omega_1}{\omega_2 + \omega_1} = \frac{x_3^2}{\sqrt{(R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^2 + x_3^2}}. \quad (3.19)$$

Если добавить в формулу (3.19) слагаемое  $\omega\Phi$  и воспользоваться свободой выбора функции  $\Phi$ , то для функции  $\Phi$  можно получить более простое выражение. Действительно, если взять

$$\Phi = \frac{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{\sqrt{(R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^2 + x_3^2}},$$

то формула (3.19) примет вид

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) \equiv \sqrt{(R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^2 + x_3^2}. \quad (3.20)$$

В отличие от функции (3.19), функция (3.20) определена везде в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , а на верхней и нижней полусферах эти функции совпадают. Заметим, что избавиться от дроби в формуле (3.19) позволило то обстоятельство, что заданные на верхней и нижней полусферах функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  совпадают при  $x_3 = 0$  и, следовательно, есть принципиальная возможность построения непрерывной везде функции, принимающей непрерывные значения на сфере. Однако если бы речь шла только о непрерывном продолжении граничных условий, то можно было бы просто принять

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = |x_3|. \quad (3.21)$$

Но поскольку в условии данного примера сказано, что функция  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  должна быть аналитической везде, кроме, возможно, окружности, разделяющей граничные значения, то выбор  $\Phi$  в виде (3.21) неприемлем.

Некоторые трудности при построении склеивающей функции могут возникнуть, если среди заданных функций  $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ , с которыми на элементах чертежа  $L$  она должна совпадать, есть такие, которые в рассматриваемой области  $\Omega$  имеют разрывы, разрывы своих производных или вообще не определены. В подобных ситуациях может оказаться полезной следующая методика исправления нагружающих функций.

Если функция  $\varphi_j$ , нагружающая элемент  $L_j = (\omega_j = 0)$ , имеет вид

$$\varphi_j = \varphi_j [\lambda_j(x), x], \quad (3.22)$$

где  $\lambda_j(x)$  — некоторая неотрицательная на  $L_j$  функция, а в точках чертежа  $\lambda_j(x) = 0$  функция  $\varphi_j$  не определена или имеет разрыв, то формулу (3.22) можно заменить формулой

$$\varphi_j^* = \varphi_j (\sqrt{\lambda_j^2(x) + \omega_j^2(x)}, x). \quad (3.23)$$

Нетрудно видеть, что если чертежи  $\omega_j = 0$  и  $\lambda_j = 0$  не имеют общих точек, то функция  $\varphi_j^*$  определена в точках чертежа  $\lambda_j = 0$ , в которых функция  $\varphi_j$  имела разрыв или была неопределенной. На элементе  $L_j \varphi_j^* = \varphi_j$ . Кроме того, если  $\omega_j, \lambda_j \in C^q(\Omega)$ , то и выражение  $\sqrt{\lambda_j^2(x) + \omega_j^2(x)}$  при указанных предположениях принадлежит множеству  $C^q(\Omega)$ .

Если в формуле (3.22)  $\lambda_j(x)$  — неотрицательная функция с разрывами при  $\lambda_j(x) = 0$ , то вместо формулы (3.23) можно использовать формулу

$$\varphi_j^* = \varphi_j (\lambda_j(x) + \omega(x), x), \quad (3.24)$$

где  $L = \{\omega(x) = 0\}$  и  $\omega(x) > 0$  вне  $L$ . Отметим также, что при продолжении значений нагружающих функций внутрь рассматриваемой области  $\Omega$  в некоторых случаях поведение функций, с помощью которых строится склеивающая функция, вне области  $\Omega$  может быть для нас безразличным. Поэтому в подобных случаях вместо уравнений элементов  $L_i = \{\omega_i(x) = 0\}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) можно, вообще, писать уравнения других чертежей  $L_i^*$ , лишь бы было  $L_i = L_i^* \cap \Omega$ . В результате в некоторых случаях можно добиться построения более простых формул.

**Пример 2.** Пусть  $L = (R^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0)$  — окружность в  $\mathbb{R}^2$ ;  $L_1$  и  $L_2$  — соответственно левая и правая полуокружности;  $\varphi_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}$ ;  $\varphi_2 = \sqrt{x_1}$ . Уравнения чертежей  $L_1$  и  $L_2$  можем представить в виде

$$\omega_1 \equiv (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee_0 x_1 = 0;$$

$$\omega_2 \equiv (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee_0 (-x_1) = 0.$$

Однако непосредственно применить формулу склейки в данном случае нельзя, так как функция  $\varphi_1 = \infty$  в начале координат, а функция  $\varphi_2$  не определена в левой полуплоскости. Применяя описанную выше методику, заменим функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  соответственно функциями

$$\varphi_1^* \equiv [(x_1^2 + x_2^2) + R^2 - x_1^2 - x_2^2]^{-1} = R^{-2};$$

$$\varphi_2^* \equiv \sqrt[4]{x_1^2 + (R^2 - x_1^2 - x_2^2)^2}. \quad (3.25)$$

Тогда для пучка функций, принимающих на  $L_1$  значения  $(x_1^2 + x_2^2)^{-1}$ , а на  $L_2$  — значения  $\sqrt{x_1}$ , получаем формулу

$$u = \frac{R^{-2} [(R^2 - x_1^2 - x_2^2) V_0 x_1] + \sqrt{x_1^2 + (R^2 - x_1^2 - x_2^2)^2} [(R^2 - x_1^2 - x_2^2) V_0 (-x_1)]}{[(R^2 - x_1^2 - x_2^2) V_0 x_1] + [(R^2 - x_1^2 - x_2^2) V_0 (-x_1)] + (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \Phi} + \quad (3.26)$$

Оператор склеивания граничных значений, определяемый какой-либо из приведенных (или других подобных) формул, будем обозначать в дальнейшем ЕС (ЕС  $\varphi_i = \varphi$ ). Условия вида  $u|_L = \varphi$  часто встречаются в краевых задачах математической физики и известны как *условия первого рода* или *условия Дирихле*. Условиями Дирихле иногда называют условия более общего вида

$$u|_L = \varphi^{(0)}; \quad \frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} \Big|_L = \varphi^{(k)} \quad (k = 1, \dots, s-1), \quad (3.27)$$

где, вообще,  $\varphi^{(0)} = \text{ЕС } \varphi_i^{(0)}$ ,  $\varphi^{(k)} = \text{ЕС } \varphi_i^{(k)}$ . Если  $\varphi^{(k)}|_L \equiv 0$  ( $k = 1, \dots, s-1$ ), то пучок функций, удовлетворяющих условиям (3.27), можно представить в виде

$$u = \varphi^{(0)} + \omega^s \Phi. \quad (3.28)$$

Формула (3.28) является простейшим обобщением формулы (3.1).

*Упражнения.* 1. Область  $\Omega$  есть куб с центром в начале координат, с ребрами, равными  $2a$  и параллельными осям координат. Построить аналитическую в  $\Omega$  функцию  $u$ , которая на гранях куба принимает следующие значения:

$u = 1$  — на верхней и нижней гранях;

$u = (1 - x_3^2) |x_1| + 1$  — на гранях, перпендикулярных к оси  $Ox_2$ ;

$u = -x_3^2$  — на гранях, перпендикулярных к оси  $Ox_1$ .

2. Построить функцию  $u$ , у которой значения первых производных на границе круга  $R^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$  по внутренней нормали равны единице, в то время как значения самой функции равны  $x_1^2 + 2x_2^2$ .

3. Пусть  $\omega_i = 0$  — нормализованные уравнения элементов  $L_i$  чертежа  $L$ , не имеющие между собой общих точек, а  $\varphi_i, \psi_i \in C^1(L)$ . Показать, что для функции

$$u = \frac{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\varphi_i}{\omega_i^2} + \frac{\psi_i}{\omega_i} \right)}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\omega_i^2}} \quad (3.29)$$

(после приведения выражения к единой дроби) выполняются условия

$$u|_{L_i} = \varphi_i; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_i} \Big|_{L_i} = \psi_i + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu_i}. \quad (3.30)$$

4. Написать формулу для пучка функций, удовлетворяющих условиям (3.27), если  $\varphi^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, s - 1$ ) не равны тождественно нулю на  $\partial\Omega$ .

## § 2. Интерполяция функций и пучки

Задача построения пучков функций по известным их значениям на заданных чертежах  $L_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) является обобщением классической задачи интерполяции функций.

Одномерная задача интерполяции ставится так:

известны значения функции в  $m$  точках  $u_i = u(x^i)$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) (рис. 97). Требуется восстановить функцию  $u(x)$  на всем интервале  $[x^0, x^m]$  или даже на более широком интервале  $[a, b] \supset [x^0, x^m]$ . Точки  $x^i$ , в которых заданы значения  $u^i$  функции  $u(x)$ , называются узлами или полюсами интерполяции для  $u(x)$ . Если класс функций, к которому принадлежит функция  $u(x)$ , достаточно широк (например,  $C^k[a, b]$ ), то задача интерполяции имеет не единственное решение и существует пучок функций (из заданного класса), которые удовлетворяют условиям  $u(x^i) = u_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ). Единственное решение сформулированной задачи получается, если задать некоторые дополнительные условия. Например, если ограничиться множеством  $\pi_m$  всех алгебраических полиномов степени, не превосходящей  $m$ , существует единственный интерполяционный полином Лагранжа

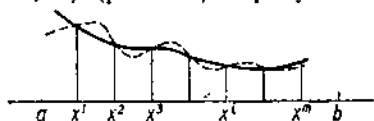


Рис. 97.

$$L_m(x) = \sum_{s=0}^m u_s \psi_s(x), \quad (3.31)$$

где

$$\psi_s(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{s-1})(x - x_{s+1}) \dots (x - x_m)}{(x_s - x_0)(x_s - x_1) \dots (x_s - x_{s-1})(x_s - x_{s+1}) \dots (x_s - x_m)}. \quad (3.32)$$

Обратим внимание на то, что функции  $\psi_s(x)$  удовлетворяют условиям

$$\psi_s(x) = \begin{cases} 1, & x = x_s; \\ 0, & x = x_i \neq x_s. \end{cases} \quad (3.33)$$

Нетрудно заметить, что если в формуле (3.31) вместо функций  $\psi_s(x)$  (3.32) взять любые другие функции  $\varphi_s(x)$ , определенные на  $[a, b]$  и удовлетворяющие условиям (3.33), то она будет интерполяционной формулой. Например, если узлы интерполяции расположены с постоянным шагом  $l$ , т. е.  $x^k = x^0 + kl$ , то можно функции  $\varphi_k(x)$  построить следующим образом. Пусть

$$h_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty); \\ 1 + x, & x \in (-1, 0); \\ 1 - x, & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.34)$$



График функции  $h_1(x)$  приведен на рис. 98. Ее можно задать и одной формулой

$$h_1(x) = \frac{1}{4} (2 + |1 + x| + |1 - x| - |2x + |1 + x| - |1 - x||). \quad (3.35)$$

Очевидно,  $h_1\left(\frac{x}{l}\right)$  есть сжатие функции  $h_1(x)$  в направлении оси  $Ox$  и  $\text{supp } h_1\left(\frac{x}{l}\right) = [-l, l]$ . Положим  $\psi_k(x) = h_1\left(\frac{x - x_k}{l}\right)$ . Тогда условия (3.33) будут удовлетворяться и формула (3.31) примет вид

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^m u_k h_1\left(\frac{x - x_k}{l}\right). \quad (3.36)$$

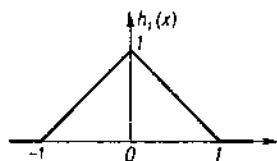


Рис. 98.

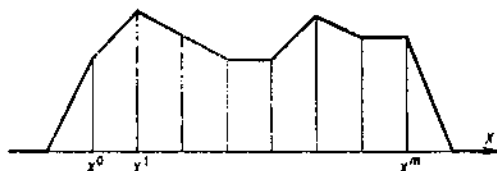


Рис. 99.

На каждом из интервалов  $[x^i, x^{i+1}]$  функция  $S_1(x)$  линейна и, таким образом, формула (3.36) осуществляет кусочно-линейную интерполяцию на  $[x^0, x^m]$ . График функции  $S_1(x)$  приведен на рис. 99.

Нетрудно видеть, что функция (3.35), а следовательно, и функция (3.36) принадлежат множеству  $\mathfrak{M}(H_1)$   $H_1$ -реализуемых функций, где

$$H_1 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, |x_1|, a \forall a \in \mathbb{R}\}. \quad (3.37)$$

Используя другие конструкции функций  $\psi_k(x)$ , удовлетворяющие условиям (3.33), можно получать различные варианты интерполяционных формул (в частности, кусочные полиномы (сплайны) заданной степени гладкости [101]). Они представляют собой  $H_k$ -реализуемые функции, где

$$H_k = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, x_1^{k-1} |x_1|, a \forall a \in \mathbb{R}\}. \quad (3.38)$$

В то же время если вместо интерполяционной формулы (3.31) взять формулу вида

$$P_m(x) = \sum_{s=0}^m u_s \psi_s(x) + \omega(x) \Phi(x), \quad (3.39)$$

где  $\omega(x^s) = 0 \quad \forall x^s (x = 0, 1, \dots, m)$ , а  $\Phi(x)$  — произвольная непрерывная (или даже просто ограниченная) функция, то приходим к пучку интерполяционных формул. В качестве функции  $\omega(x)$  можно, например, взять

$$\omega(x) = (x - x^0)(x - x^1) \dots (x - x^m). \quad (3.40)$$

Если функция  $\omega(x)$  выбрана в виде (3.40), функции  $\psi_s(x)$  взяты из формулы Лагранжа, а множество  $\mathfrak{M}$ , из которого выбирается функция  $\Phi(x)$  (неопределенная компонента пучка), есть множество  $\mathfrak{M}(H_0)$  (т. е. множество степенных полиномов), то (3.39) есть формула пучка всех полиномов, интерполирующих функцию в точках  $x^i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ). Это утверждение справедливо, только если  $\psi_s(x)$  взяты из формулы Лагранжа (3.31). Первое слагаемое (сумма) в формуле (3.39) есть интерполяционный полином наименьшей степени, и за счет добавления  $\omega\Phi$  можно получить все остальные интерполяционные полиномы более высоких степеней. (Заметим, что сама функция  $\omega(x)$  (3.40) есть уже полином степени  $m + 1$ .)

Если бы первое слагаемое в формуле (3.39) представляло собой интерполяционный полином более высокой степени, чем  $m$ , то формула (3.39) не обладала бы свойством полноты: не все интерполяционные полиномы (для той же системы точек  $x^i$ ) в ней содержались бы. Например, выбирая  $\Phi$  в множестве  $\mathfrak{M}(H_0)$ , нельзя было бы, вообще, получить сам интерполяционный полином Лагранжа.

Сравнение формулы (3.39) с формулами (3.9), (3.10) и (3.16) показывает их полное внешнее совпадение, отличие состоит лишь в том, что в обычной задаче интерполяции заданы значения функции в точках  $x^0, x^1, \dots, x^m$ , в то время как в формулах (3.9), (3.10) и (3.16) предполагаются известными значения функции на заданных чертежах  $L_i$ . В роли  $\psi_s(x)$  выступают функции

$$\psi_s(x) = \frac{\omega_s^0(x)}{\omega_1^0(x) + \dots + \omega_m^0(x)}; \quad (3.41)$$

$$\psi_s(x) = \frac{\tau_s(x)}{\tau_1(x) + \dots + \tau_m(x)},$$

$$\psi_s(x) = \frac{\tau_s^{k_s}}{\tau_1^{k_1}(x) + \dots + \tau_m^{k_m}(x)}$$

для формул (3.10), (3.11), (3.16) соответственно. Условия (3.33) заменяются теперь условиями

$$\psi_s(x) = \begin{cases} 1, & x \in L_s; \\ 0, & x \in L_k \quad (k \neq s). \end{cases} \quad (3.42)$$

Однако, несмотря на внешнее сходство формулы (3.39) и формул, рассмотренных в предыдущем параграфе (или других подобного рода формул склейки), есть принципиальное отличие их от формулы (3.39). В этих формулах значения склеиваемой функции на чертежах  $L_i$  задаются в виде сужений функций, определенных не только на  $L_i$ , но везде в рассматриваемой области. Поскольку существует сколько угодно функций, имеющих одно и то же сужение на данном чертеже, то в формулах (3.9), (3.10), (3.16) вместо данных функций  $\varphi_i$  можно писать формулы для пучков, совпадающих на  $L_i$  с  $\varphi_i$ , а именно  $\varphi_i$  заменить на  $\varphi_i + \omega_i\Phi_i$ , где  $\Phi_i$  — некоторая неопреде-

ленная ограниченная функция. (Обычно функции  $\Phi_i$  выбираются из некоторых линейных функциональных множеств). Таким образом, например, вместо формулы (3.10) можно написать формулу

$$\varphi = \frac{(\varphi_1 + \omega_1 \Phi_1) \tau_1 + \dots + (\varphi_m + \omega_m \Phi_m) \tau_m}{\tau_1 + \dots + \tau_m} + \omega \Phi \quad (3.43)$$

или, учитывая, что  $\tau_i = \omega_i^{-1}$ , этой формуле придать вид

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \tau_1 + \dots + \varphi_m \tau_m}{\tau_1 + \dots + \tau_m} + \frac{\Psi}{\tau_1 + \dots + \tau_m} + \omega \Phi, \quad (3.44)$$

где  $\Psi = \Phi_1 + \dots + \Phi_m$ . Неопределенные компоненты  $\Psi$  и  $\Phi$  пучка (3.44) можно использовать для удовлетворения другим, дополнительным условиям, которые, как увидим далее, встречаются при использовании пучков в прикладных задачах.

**Пример 1.** Пусть интересующая нас область  $\Omega$  есть первая четверть плоскости  $x_1 O x_2$  (рис. 100). На полуоси  $O x_1$  задана функция  $\varphi_1 = x_1$ , а на полуоси  $O x_2$  — функция  $\varphi_2 = x_2$ . В качестве функций  $\omega_1$  и  $\omega_2$  можно взять  $\omega_1 = x_2$ ,  $\omega_2 = x_1$ . (Они обе положительны внутри  $\Omega$ .) Кроме того, пусть  $\omega = x_1 x_2$ . Если используем формулу (3.39), получим склеенную функцию в виде

$$\varphi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} + x_1 x_2 \Phi. \quad (3.45)$$

Первое слагаемое этой формулы имеет разрывы первых производных и, если это нас по каким-либо причинам не устраивает (т. е. упомянутые дополнительные условия не допускают этого), то функцию  $\Phi$  надо выбирать разрывной, чтобы компенсировать упомянутый недостаток первого слагаемого формулы (3.45).

Используем формулу (3.44) и получим

$$\varphi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{\Psi x_1 x_2}{x_1 + x_2} + x_1 x_2 \Phi. \quad (3.46)$$

Легко видеть, что если возьмем  $\Psi \equiv 2$ ,  $\Phi \equiv 0$ , то получим простейшую формулу склейки в виде

$$\varphi = x_1 + x_2. \quad (3.47)$$

Из приведенного примера следует возможность получения в некоторых случаях достаточно хороших формул благодаря выбору неопределенных компонент  $\Psi$  и  $\Phi$ , однако необходима еще и достаточно формализованная методика их выбора, доступная для включения в автоматизированные системы программирования.

**Упражнения и задачи.** 1. В  $\mathbb{R}^n$  есть система  $\{x^i\}$  точек, в которых функция  $u(x)$  принимает значения  $u_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Показать, что формула

$$\varphi(x) = \frac{\sum_i u_i \|x - x^i\|^{-k}}{\sum_i \|x - x^i\|^{-k}} \quad (3.48)$$

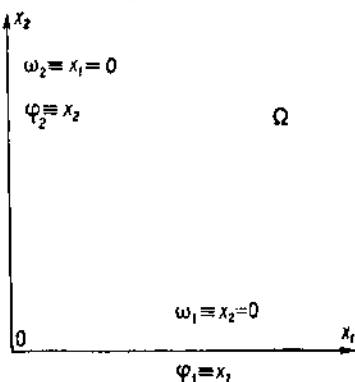


Рис. 100.

определяет функцию, совпадающую с функцией  $u(x)$  в точках  $x^i$  и имеющую в этих точках равными нулю все частные производные до  $(k-1)$ -го порядка.

2. Пусть  $u_i$  — значения функции  $u(x)$  в точках  $x^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Показать, что функция

$$\varphi(x) = \frac{\sum_i u_i \|x - x^i\|^{-2}}{\sum_i \|x - x^i\|^{-2}} + (\|x - x^1\| \wedge_0 \dots \wedge_0 \|x - x^m\|) v(x) \quad (3.49)$$

совпадает в точках  $x^i$  с функцией  $u(x)$ , а ее частные производные в этих точках такие же, как и у функции  $v(x)$ .

3. Обобщить формулу (3.49), включив в рассмотрение производные высших порядков вплоть до порядка  $N$ .

4. Показать, что при выборе функций  $\psi_i(x)$  и  $\omega(x)$  соответственно в виде (3.32) и (3.40) для всякого интерполяционного полинома  $Q(x)$ , принимающего в точках  $x^i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) значения  $u_i = u(x^i)$ , найдется такой полином  $\Phi(x)$ , что будет выполняться тождество  $P_m(x) \equiv Q(x)$ , где  $P_m(x)$  определяется формулой (3.39).

### § 3. Продолжение дифференциальных операторов, заданных на чертеже

Рассмотрим более общую задачу, чем задача построения пучков, принимающих в точках данного чертежа заданные значения. А именно будем предполагать, что на чертеже  $L$  заданы некоторые соотношения между значениями функции, производными по нормальям, по касательным или по другим направлениям до некоторого порядка. Такого рода соотношения часто встречаются, например, в краевых задачах математической физики в виде граничных условий дифференциального типа. (Термин «функция» используется лишь для простоты. На практике часто приходится рассматривать на чертежах соотношения дифференциального типа между вектор-функциями, тензорами и другими величинами, зависящими от пространственных координат, времени и иных геометрических и физических параметров.)

В данной работе в основном будут рассматриваться условия, заданные на кусочно-дифференцируемых многообразиях размерности  $n-1$  в  $\mathbb{R}^n$ . (Именно такие задачи в основном встречаются в математической физике.) Впрочем, значительное внимание будет уделяться также информации, заданной на чертежах меньшей размерности (например, в угловых и других «особых» точках границы). Если  $x^0 \in L$  есть точка, в которой  $L$  представляет собой дифференцируемое многообразие размерности  $n-1$ , то в этой точке существуют единственная нормаль  $\nu$  и линейно независимые касательные направления  $\tau^1, \dots, \tau^{n-1}$ . (Направления обычно выбирают взаимно ортогональными.) Условия на чертеже  $L$ , о которых идет речь, обыч-

НО ИМЕЮТ ВИД

$$F_k \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial v}, \frac{\partial u}{\partial \tau^1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \tau^{n-1}}, \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial \tau^1}, \dots, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial (\tau^{n-1})^m} \right) \Big|_{L_k} = \Phi_k |_{L_k}, \quad (3.50)$$

где  $F_k$  — некоторые функции, определяемые в пространстве своих аргументов, а  $L_k$  — элементы (не обязательно различные) чертежа  $L$ .

Задача состоит в том, чтобы строить такие пучки  $u = B(\Phi)$ , которые, с одной стороны, были бы достаточно широкими, а с другой — удовлетворяли на чертеже  $L$  условиям (3.50). Заметим, что если в формулы (3.50) входят производные не только по нормали и касательным, то, учитывая, что в любой данной точке чертежа  $L$ , в которой он является  $(n-1)$ -мерным дифференцируемым многообразием, векторы  $v, \tau^1, \dots, \tau^{n-1}$  образуют базис (так называемый естественный базис), всегда можно выразить производные по любым направлениям через производные по осям этого базиса.

Заметим, что входящие в формулы (3.50) производные  $\frac{\partial u}{\partial v}, \frac{\partial u}{\partial \tau^1} \dots$  представляют собой операторы, определенные лишь в точках чертежа  $L$ , в то время как в сформулированной выше задаче требуется строить такие пучки функций, которые были бы определены и вне  $L$ . Это приводит к необходимости продолжения операторов дифференцирования по нормали и касательным за пределы чертежа  $L$ . Рассмотрим это.

Пусть граница  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  есть кусочно-дифференцируемое многообразие (чертеж) размерности  $n-1$ ,  $v = v(x^0)$  — внутренняя нормаль к  $\partial\Omega$  в регулярной точке  $x^0 \in \partial\Omega$ ,  $T_{x^0}$  — касательное к  $\partial\Omega$  в точке  $x^0$  пространство с базисом  $\{\tau^i\}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ). Предположим, что  $\omega(x) = 0$  — нормализованное до первого порядка уравнение  $\partial\Omega$ , причем  $\omega(x) \in \mathfrak{M}(H)$ . Такая функция может быть построена для практически произвольных областей в классе  $H$ -реализуемых (в частности, элементарных) функций при весьма общих предположениях относительно базисной системы  $H$ . Достаточно лишь, чтобы она была алгоритмически полной (см. § 12 гл. 2). (Будем предполагать, что  $H$  включает все арифметические операции и константы.)

Из нормализованности уравнения  $\omega(x) = 0$  следует, что

$$|\nabla\omega| \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\omega}{\partial v} \Big|_{\partial\Omega} = 1, \quad (3.51)$$

где  $\nabla = D^1 = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ . Кроме того, для каждого из касательных векторов  $\tau^i$  выполняется условие

$$(\nabla\omega, \tau^i) = (v, \tau^i) = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1). \quad (3.52)$$

Пусть  $l^i = (l^i_1, \dots, l^i_n)$  — заданный в точках  $\partial\Omega$  вектор, где  $l^i_j = l^i_j(x) \in \mathfrak{M}(H)$ . Обозначим  $l^i_0 = EC^i = (EC^i_1, \dots, EC^i_n)$ , где  $EC$  —

введенный в § 1 оператор продолжения граничных значений, определяемый одной из формул (3.9), (3.10) или (3.11) при фиксированном значении неопределенной компоненты  $\Phi \in \mathfrak{M}(H)$ . Очевидно, что в принятых предположениях относительно системы  $H$  в этом случае будет также и  $ESl_0^1 = l_0^1 \in \mathfrak{M}(H)$ .

Рассмотрим вектор

$$l = l_0^1 \left[ \|l_0^1\|^2 + \omega^2(x) \right]^{-1/2}. \quad (3.53)$$

Очевидно, что везде в  $\Omega \cup \partial\Omega$  этот вектор коллинеарен вектору  $l_0^1$ , а на  $\partial\Omega$  является единичным. Слагаемое  $\omega^2(x)$  введено в квадратные скобки формулы (3.53), чтобы исключить возможные особенности, свойственные точкам, в которых  $\|l_0^1\| = 0$ . Если  $\|l_0^1\| \neq 0$  в области  $\Omega$ , то можно положить

$$l = l_0^1 \|l_0^1\|^{-1}. \quad (3.54)$$

Заметим, что векторы  $v$  и  $\tau^i$  могут рассматриваться как частный случай вектора  $l$ , единичного на  $\partial\Omega$  и имеющего соответствующее им направление.

Учитывая, что  $m$ -я производная по направлению  $l$  в точках  $\partial\Omega$  определяется формулой

$$\frac{\partial^m f}{\partial (l^1)^m} = (l^1, \nabla)^m f = \left( l_1^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + l_n^1 \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m f, \quad (3.55)$$

приходим к выводу, что функция

$$D_m^l f = (l, \nabla)^m f = \left( l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + l_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m f, \quad (3.56)$$

определенная везде в  $\Omega \cup \partial\Omega$ , на  $\partial\Omega$  превращается в производную по направлению  $l^1$ :

$$D_m^l f|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^m f}{\partial (l^1)^m}. \quad (3.57)$$

Введя обозначение  $D_m^v = D_m$ , для вектора  $l = v = \nabla\omega$  получим

$$\begin{aligned} D_m f &= (\nabla\omega, \nabla)^m f = \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial\omega}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m f = \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_i} \right)^{\alpha_i} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

где суммирование распространяется на все возможные наборы  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  неотрицательных целых чисел, для которых

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = m, \text{ а } \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!.$$

Выражение, стоящее в правой части формулы (3.56), можно получить формально из выражения для  $m$ -го дифференциала

$$\begin{aligned} d^m f &= d^m [f(x_1, \dots, x_n), dx_1, \dots, dx_n] = \\ &= \left( dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m f \end{aligned}$$

путем замены в последнем  $dx_i$  на  $l_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), т. е.

$$D_m^i f = d^m [f(x), l_1, \dots, l_n]. \quad (3.59)$$

Как известно, для дифференциала произведения  $uv$  справедлива формула Лейбница

$$d^m (uv) = \sum_{i=0}^m C_m^i d^{m-i} u d^i v. \quad (3.60)$$

Приняв в этой формуле замену  $dx_i$  на  $l_i$ , получим формулу

$$D_m^i (uv) = \sum_{j=0}^m C_m^j D_{m-j}^i u D_j^i v, \quad (3.61)$$

где  $D_0^i f \equiv f$  по определению.

*Замечание 1.* Следует иметь в виду, что в общем случае

$$D_i (D_j f) \neq (D_i D_j) f = D_{i+j} f. \quad (3.62)$$

Отметим некоторые формулы, относящиеся к технике оперирования с символами  $D_m^i$ . В частности, непосредственным дифференцированием получим

$$\begin{aligned} D_1^i F(u, v) &= \frac{\partial F}{\partial u} D_1^i u + \frac{\partial F}{\partial v} D_1^i v; \\ D_2^i F(u, v) &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} (D_1^i u)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} (D_1^i u) (D_1^i v) + \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} (D_1^i v)^2 + \frac{\partial F}{\partial u} D_2^i u + \frac{\partial F}{\partial v} D_2^i v \end{aligned} \quad (3.63)$$

и т. д. Отметим некоторые свойства оператора  $D_m$ :

$$D_1 x_i \equiv \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \quad D_k x_i \equiv 0 \quad (k \geq 2); \quad (3.64)$$

$$D_1 (D_1 \omega) = 2D_2 \omega; \quad (3.65)$$

$$\sum_{i=1}^n D_k \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = D_{k+1} \omega; \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_1 \omega \equiv 2D_1 \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right); \quad (3.67)$$

$$D_k \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} D_k \omega - k \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j} D_{k-1} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right); \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} D_1 (D_k f) &\equiv D_{k+1} f + \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \times \\ &\times \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i D_1 \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) \prod_{j=1}^n \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right)^{\alpha_j} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Для  $l = \tau^i$  введем обозначение  $D_m^{\tau^i} = T_m^i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ). Для касательных векторов  $\tau^i = (\tau_1^i, \dots, \tau_n^i)$  имеем следующие условия:

$$\begin{aligned} (v, \tau^i) &= \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \tau_1^i + \dots + \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \tau_n^i \Big|_{\partial \Omega} = 0; \\ (\tau_1^i)^2 + \dots + (\tau_n^i)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (3.70)$$

В частности, при  $n = 2$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \Big|_{\partial \Omega} \tau_1 + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \Big|_{\partial \Omega} \tau_2 = 0; \quad \tau_1^2 + \tau_2^2 = 1.$$

Решая эту систему, получаем

$$\tau_1 = \mp \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) \Big|_{\partial \Omega}; \quad \tau_2 = \pm \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) \Big|_{\partial \Omega}.$$

Нетрудно убедиться, что левому обходу области  $\Omega$  в этих формулах соответствует верхний знак. Таким образом, вектор

$$\tau = - \frac{\partial \omega}{\partial x_2} i_1 + \frac{\partial \omega}{\partial x_1} i_2, \quad (3.71)$$

определенный везде в  $\mathbb{R}^2$ , на границе области превращается в касательный вектор  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ . Обозначив  $T_m^\tau = T_m$ , в этом случае получим

$$T_m f = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} C_m^i \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m-i} \partial x_2^i} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^i \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^{m-i}. \quad (3.72)$$

Заметим, что согласно (3.57)

$$T_m f \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial^m f}{\partial \tau^m}. \quad (3.73)$$

Отметим также, что  $T_1 \omega \equiv 0$ . Используя операторы  $D_m$  и  $T_m$ , можно продолжать внутрь области и смешанные производные, например:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial \tau} &\equiv (D_1 T_1) f \Big|_{\partial \Omega} \equiv \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left( - \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] f \Big|_{\partial \Omega} \equiv \left\{ - \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \right. \\ &+ \left. \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right\} \Big|_{\partial \Omega} = \\ &= \left\{ - \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right\} \Big|_{\partial \Omega}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

(При переходе к последнему равенству использована нормализованность функции  $\omega$ , вследствие чего  $\left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 \Big|_{\partial \Omega} = 1$ .)

Легко заметить, что если к правым частям формул (3.57), (3.58) и (3.73) прибавить  $\omega \Phi$ , где  $\Phi \in C(\Omega \cup \partial \Omega)$ , то граничные свойства операторов  $D_m^i$ ,  $D_m$ ,  $T_m$  сохранятся. Свободу выбора  $\Phi$  иногда



можно использовать для учета особенностей решений краевых задач. Например, она была использована при решении одного класса смешанных (контактных) задач теории упругости [128].

*Замечание 2.* В пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ ,  $2(n-1)$  условия (3.70) связывают  $n^2 - n$  величин  $\tau_j^i$  ( $j = 1, \dots, n$ ;  $i = 1, \dots, n-1$ ), и в касательном пространстве  $T_{x^0}$  есть бесчисленное множество систем линейно независимых векторов

$$\tau_j^k = \begin{cases} -q_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k}, & j \neq k; \\ q_k \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_r}, & j = k, \end{cases} \quad (3.75)$$

где  $q_k > 0$ . Тогда

$$(v, \tau^k) = (\nabla \omega, \tau^k) = -q_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \sum_{\substack{j=k \\ j \neq k}}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + q_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_r} = 0, \quad (3.76)$$

и, следовательно, вектор  $\tau^k$  ортогонален  $v$ . Потребуем, чтобы  $\|\tau^k\| = 1$  на  $\partial\Omega$ :

$$\|\tau^k\| = q_k \sqrt{(n-1) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right)^2} = 1.$$

Отсюда

$$q_k = \left[ (n-1) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right)^2 \right]^{-1/4}. \quad (3.77)$$

*Упражнения и задачи. 1.* Показать, что для оператора  $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial \tau}$ , кроме формулы (3.74), можно взять следующую формулу продолжения его в область  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial \tau} = & \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right] \Big|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

2. Показать, что для оператора  $\frac{\partial^m f}{\partial \tau^m}$  вместо (3.72) можно взять следующую формулу продолжения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m f}{\partial \tau^m} = & \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m-i} \partial x_2^i} \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^{i+2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^{m-i} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^i \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^{m-i+2} \right]. \end{aligned} \quad (3.79)$$

3. Перенести результаты данного параграфа на  $k$ -мерные ( $k < n-1$ ) дифференцируемые многообразия в  $\mathbb{R}^n$ .

#### § 4. Продолжение дифференциальных операторов, содержащих производные по дуге граничной кривой

В ряде задач в условия, заданные на чертеже  $L$ , могут входить производные по дугам на  $L$ . (Такие условия возникают, например, в задачах об изгибе пластин и оболочек на их крае.) В этом случае возникают определенные трудности при построении формальных операторов продолжения дифференциальных условий.

Изложим один из подходов к преодолению указанных трудностей, который предполагает использование введенных § 3 операторов  $D_k$  и  $T_k$  [111]. При этом будем исходить из предположения, что  $\Omega$  есть двумерное дифференцируемое многообразие (поверхность) в  $\mathbb{R}^3$  с регулярной границей  $\partial\Omega$  и известна естественная параметризация  $\partial\Omega: x_i = x_i(s)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), где  $s$  — длина дуги  $\partial\Omega$ , отсчитываемая от некоторой ее точки, принятой за начальную. Пусть далее  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  — заданная на  $\Omega^*$  функция, где  $\Omega \cup \partial\Omega \subset \subset \text{int } \Omega^*$ . Будем предполагать, что эта и все другие рассматриваемые ниже функции непрерывны и непрерывно-дифференцируемы достаточное число раз по всем своим аргументам.

**Лемма 1.** Для любой точки кривой  $\partial\Omega$

$$\frac{\partial^p}{\partial s^p} D^q u = D^q \frac{\partial^p u}{\partial s^p}, \quad (3.80)$$

где, как обычно,

$$D^q = \frac{\partial^{|q|}}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \partial x_3^{q_3}}; \quad |q| = q_1 + q_2 + q_3, \quad (3.81)$$

$p, q, q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — целые числа.

**Доказательство.** Выражение для  $\frac{\partial^p u}{\partial s^p}$  содержит частные производные от  $u$  по  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и от  $x_i$  по дуге  $s$  до  $p$ -го порядка включительно, т. е. имеет вид

$$\frac{\partial^p u}{\partial s^p} = f(D^k u, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}) \quad (k = 1, \dots, p), \quad (3.82)$$

где символами  $x_i^{(k)}$  обозначаются производные по дуге  $s$  от  $x_i$ . Индекс  $i$ , где это не оговорено, принимает значения  $i = 1, 2, 3$ .

Заменим в формуле (3.82) функцию  $u(x)$  выражением  $D^q u$ , рассматриваемым так же, как функция от  $x$ . Это вызовет увеличение порядка производных от  $u$  по каждому  $x_i$  на  $q_i$ , но компоненты  $x_i^{(k)}$  останутся без изменения:

$$\frac{\partial^p}{\partial s^p} D^q u = f(D^{k+q} u, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}) \quad (k = 1, \dots, p). \quad (3.83)$$

Дифференцирование выражения (3.82)  $q$  раз по  $x_i$  (каждому  $x_i$  соответствует порядок  $q_i$ ) внесет лишь изменение порядка частных производных  $u$  по  $x$ , что и приведет к (3.80).

**Лемма 2.** Если  $x_i = x_i(s)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — параметрические уравнения  $\partial\Omega$ , то

$$x_i^{(n)} = N_n v_i + K_n \tau_i + B_n \beta_i. \quad (3.84)$$

Здесь

$$N_n = N'_{n-1} + k_1 K_{n-1} - k_2 B_{n-1}; \quad K_n = K'_{n-1} - k_1 N_{n-1}; \quad (3.85)$$

$$B_n = B'_{n-1} + k_2 N_{n-1}, \quad N_1 = 0, \quad K_1 = 1, \quad B_1 = 0 \quad (n \geq 2),$$

$k_1$  — кривизна;  $k_2$  — кручение;  $v = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  — единичные векторы главной нормали, касательной (в направлении увеличения  $s$ ), бинормали соответственно, которые образуют правую систему декартовых координат.

**Доказательство.** Описывая кривую  $\partial\Omega$  векторной функцией  $r(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ , имеем

$$r^{(n)} = (x_1^{(n)}(s), x_2^{(n)}(s), x_3^{(n)}(s)). \quad (3.86)$$

В то же время, используя формулы Френе — Серре [97], ( $\tau' = k_1 v$ ;  $v' = -k_1 \tau + k_2 \beta$ ;  $\beta' = -k_2 v$ ), выразим  $r^{(n)}(s)$  через  $v$ ,  $\tau$ ,  $\beta$ :

$$r' = \tau; \quad r'' = k_1 v; \quad r''' = k_1' v + k_1 (-k_1 \tau + k_2 \beta)$$

и т. д., т. е.

$$r^{(n)} = N_n v + K_n \tau + B_n \beta, \quad (3.87)$$

где  $N_n$ ,  $K_n$ ,  $B_n$  — коэффициенты, выраженные через  $k_1 = k_1(s)$ ,  $k_2 = k_2(s)$ , и их производные.

Представим векторы  $v$ ,  $\tau$ ,  $\beta$  в координатной форме и подставим в формулу (3.87):

$$r^{(n)} = (N_n v_1 + K_n \tau_1 + B_n \beta_1, N_n v_2 + K_n \tau_2 + B_n \beta_2, N_n v_3 + K_n \tau_3 + B_n \beta_3). \quad (3.88)$$

Сравнивая (3.86) и (3.88), приходим к равенству (3.84). Далее

$$r^{(n-1)} = N_{n-1} v + K_{n-1} \tau + B_{n-1} \beta; \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} r^{(n)} = \frac{\partial}{\partial s} r^{(n-1)} &= N'_{n-1} v + N_{n-1} v' + K'_{n-1} \tau + K_{n-1} \tau' + \\ &+ B'_{n-1} \beta + B_{n-1} \beta' = (N'_{n-1} + k_1 K_{n-1} - k_2 B_{n-1}) v + \\ &+ (K'_{n-1} - k_1 N_{n-1}) \tau + (k_2 N_{n-1} + B'_{n-1}) \beta. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Из формул (3.88) и (3.90) следует (3.85). Так как  $r' = \tau$ , имеем  $N_1 = 0$ ,  $K_1 = 1$ ,  $B_1 = 0$ , что и требуется в условиях леммы.

**Теорема.** Справедливо равенство [130]

$$\frac{\partial^n u}{\partial s^n} \Big|_{\partial\Omega} = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j \left( N_{n-j} \frac{\partial}{\partial v} + K_{n-j} \frac{\partial}{\partial \tau} + B_{n-j} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \frac{\partial^j u}{\partial s^j} \Big|_{\partial\Omega}. \quad (3.91)$$

**Доказательство.** Очевидно, что

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} x'_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} x'_3.$$

По формуле Лейбница для  $n$ -й производной получаем

$$\frac{\partial^n u}{\partial s^n} = \sum_{i=0}^{n-1} C'_{n-1} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^j}{\partial s^j} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x_i^{(n-i)}. \quad (3.92)$$

Применим к (3.92) лемму 1, соотношение (3.84) и сгруппируем члены под знаком внешней суммы относительно  $N_{n-1}$ ,  $K_{n-1}$ ,  $B_{n-1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n u}{\partial s^n} = & \sum_{i=0}^{n-1} C'_{n-1} [N_{n-1}(\nabla, \nu) + K_{n-1}(\nabla, \tau) + B_{n-1}(\nabla, \beta)] \times \\ & \times \frac{\partial^j u}{\partial s^j}, \quad x_j \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.93)$$

где

$$(\nabla, t) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} t_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} t_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} t_3 \right), \quad t = \nu, \tau, \beta.$$

Каждый из операторов  $(\nabla, \nu)$ ,  $(\nabla, \tau)$ ,  $(\nabla, \beta)$  дает соответственно производную по нормали, касательной, бинормали. Теорема доказана.

Для плоской кривой ( $x_1 = x_1(s)$ ,  $x_2 = x_2(s)$ ,  $k_2 = 0$ ,  $k_1 = k$ ) формулы (3.85) и (3.91) принимают вид

$$N_n = N'_{n-1} + kK_{n-1}, \quad N_1 = 0; \quad (3.94)$$

$$K_n = K'_{n-1} - kN_{n-1}, \quad K_1 = 0;$$

$$\left. \frac{\partial^n u}{\partial s^n} \right|_{\partial\Omega} = \sum_{i=0}^{n-1} C'_{n-1} \left( N_{n-1} \frac{\partial}{\partial \nu} + K_{n-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left. \frac{\partial^j u}{\partial s^j} \right|_{\partial\Omega}. \quad (3.95)$$

В частности, из формулы (3.95) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial \tau}; \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = & \left( N_2 \frac{\partial}{\partial \nu} + K_2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) u + \left( N_1 \frac{\partial}{\partial \nu} + K_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{\partial u}{\partial s} = \\ = & k \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}; \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} = & \left( N_3 \frac{\partial}{\partial \nu} + K_3 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) u + 2 \left( N_2 \frac{\partial}{\partial \nu} + K_2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{\partial u}{\partial s} + \\ + & \left( N_1 \frac{\partial}{\partial \nu} + K_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \left( k' \frac{\partial}{\partial \nu} - k^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) u + \\ + & 2k \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( k \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) = \\ = & k' \frac{\partial u}{\partial \nu} - k^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} + 3k \frac{\partial^2 u}{\partial \nu \partial \tau} + \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} = (k^n - k^3) \frac{\partial u}{\partial v} - 3kk' \frac{\partial u}{\partial \tau} + 4 \left( k' \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial \tau} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + 6k \frac{\partial^3 u}{\partial v \partial \tau^2} + 3k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4} \right); \quad (3.99)$$

где  $N_n = 0$ ,  $k, k', k'' = k^3$ ;  $K_n = 1, 0, -k^2, -3kk'$ ; при  $n = 1, 2, 3, 4$  соответственно.

(В формулах (3.96) — (3.99) усматривается связь с полиномами Белла [149], но этот вопрос требует самостоятельного анализа.)

Коэффициенты  $N_n, K_n$  можно найти, не прибегая к соотношениям (3.94). Действительно, имея цепочку равенств

$$\begin{aligned} r^{(n+1)} &= \sum_{i_1=0}^{n-1} C_{n-1}^{i_1} k^{(n-i_1-1)} v^{(i_1)}, \quad n \geq 1; \\ v^{(i_1)} &= - \sum_{i_2=0}^{i_1-1} C_{i_1-1}^{i_2} k^{(i_1-i_2-1)} \tau^{(i_2)}; \\ \tau^{(i_2)} &= \sum_{i_3=0}^{i_2-1} C_{i_2-1}^{i_3} k^{(i_2-i_3-1)} v^{(i_3)} \end{aligned}$$

и выделяя в каждой из сумм слагаемые, для которых соответственно  $i_p = 0$ ,  $p = 1, 2, 3$ , находим

$$\begin{aligned} r^{(n+1)} &= k^{(n-1)} v - \sum_{i_1=1}^{n-1} C_{n-1}^{i_1} k^{(n-i_1-1)} \left\{ k^{(i_1-1)} \tau + \right. \\ &+ \sum_{i_2=1}^{i_1-1} C_{i_1-1}^{i_2} k^{(i_1-i_2-1)} \left\{ k^{(i_2-1)} v + \dots + \right. \\ &+ \left. (-1)^{n-1} \sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}-1} C_{i_{n-2}-1}^{i_{n-1}} k^{(i_{n-2}-i_{n-1}-1)} k^{(i_{n-1}-1)} v^{(1-m)} \tau^{(m)} \right\} \dots \left. \right\}, \quad (3.100) \end{aligned}$$

где  $m = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{2} \right\rfloor$ ,  $i_0 = n$ , а  $[t]$  — целая часть числа  $t$ .

(Если верхний предел оказывается меньше нижнего, то соответствующая сумма считается равной нулю). Из формулы (3.100) следует, что

$$\begin{aligned} N_{n+1} &= k^{(i_{2q-2}-1)} - \sum_{i_{2q-1}=1}^{i_{2q-2}-1} C_{i_{2q-2}-1}^{i_{2q-1}} k^{(i_{2q-2}-i_{2q-1}-1)} \times \\ &\times \sum_{i_{2q}=1}^{i_{2q-1}-1} C_{i_{2q-1}-1}^{i_{2q}} k^{(i_{2q-1}-i_{2q}-1)} \left\{ \dots \right\}, \quad (3.101) \end{aligned}$$

где  $p = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ , символ  $\left\{ \dots \right\}$  указывает на последовательные вложения стоящего перед этим символом выражения при  $q = 1, \dots, p$ .

Аналогично

$$K_{n+1} = - \sum_{i_1=1}^{n-1} C_{n-1}^{i_1} k^{(n-i_1-1)} \left\{ k^{(i_{2q-1}-1)} - \sum_{i_{2q}=1}^{i_{2q-1}-1} C_{i_{2q}-1}^{i_{2q}} k^{(i_{2q}-i_{2q}-1)} \sum_{i_{2q+1}=1}^{i_{2q}-1} C_{i_{2q}-1}^{i_{2q+1}} k^{(i_{2q}-i_{2q+1}-1)} \right\} \Bigg|_{q=1}^p, \quad (3.102)$$

где  $p = \left[ \frac{n}{2} \right]$ , а символ  $\left\{ \right\}_{q=1}^p$  на первую (внешнюю) сумму не распространяется.

Перейдем к построению операторов, продолжающих производные по дуге. Пусть  $\Omega = \{ \omega(x) > 0 \}$  и  $\omega = 0$  — нормализованное до первого порядка уравнение границы  $\partial\Omega$ . Введем в рассмотрение оператор  $S_n : C^n(\partial\Omega) \rightarrow C^n(\Omega \cup \partial\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , такой, что функция  $S_n u$  определена везде в области  $\Omega$ , а на  $\partial\Omega$  превращается в производную  $n$ -го порядка по дуге  $s$ :

$$S_n u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^n u}{\partial s^n}, \quad S_0 u|_{\partial\Omega} = u. \quad (3.103)$$

Располагая операторами  $D_n$ ,  $T_n$  (см. § 3) и учитывая (3.95), приходим к выводу, что оператор  $S_n$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j (-N_{n-j} D_1 + K_{n-j} T_1) S_j = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j [-N_{n-j} (D_1 \times S_j) + K_{n-j} (T_1 \times S_j)]. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Это рекуррентное соотношение устанавливает связь между  $D_n$ ,  $T_n$ ,  $S_n$  и тем самым позволяет продолжать внутрь области наряду с операторами дифференцирования по нормали и касательной также производные по дуге граничной кривой. В частных случаях получаем

$$S_1 = T_1; \quad (3.105)$$

$$S_2 = k D_1 + T_2 = \frac{1}{\rho} D_1 + T_2; \quad (3.106)$$

$$S_3 = -k' D_1 - k^2 T_1 - 3k D_1 T_1 + T_3; \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} S_4 &= (k'' - k^3) D_1 - 3kk' T_1 + 4(k' D_1 T_1 - k^2 T_2) + \\ &+ 6k D_1 T_1 + 3k^2 D_2 + T_4. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Кроме того, операторы  $S_n$  можно использовать для преобразования краевых условий к эквивалентным, но более удобным в некотором смысле, или чтобы показать равносильность условий, которые получены различными путями. Рассмотрим, например, одно из граничных условий теории тонких пластин [118]:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.109)$$

где  $\nu_0$  — коэффициент Пуассона. (Это условие отражает равенство нулю на  $\partial\Omega$  изгибающих моментов.) С учетом (3.97) условие (3.109) можно записать в виде

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \nu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \right] \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.110)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны  $\partial\Omega$ . В таком виде краевое условие встречается, например, в работе [174]. Если рассматривать (3.109) в сочетании с условием  $u|_{\partial\Omega} = 0$  (условия свободного опирания), то можно получить систему условий

$$\begin{aligned} u|_{\partial\Omega} &= 0; \\ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} - \frac{\nu_0}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \Big|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (3.111)$$

которая не содержит производных по касательной.

Пример применения формулы (3.110) приведен в замечании 1 § 8.

На основании (3.95) получаем также соотношения для смешанного дифференцирования:

$$\frac{\partial^p}{\partial \nu^p} \frac{\partial^n u}{\partial s^n} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \left( N_{n-i} \frac{\partial^{p+1}}{\partial \nu^{p+1}} + K_{n-i} \frac{\partial^{p+1}}{\partial \nu^p \partial \tau} \right) \frac{\partial^i u}{\partial s^i}; \quad (3.112)$$

$$\frac{\partial^p}{\partial \tau^p} \frac{\partial^n u}{\partial s^n} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \left( N_{n-i} \frac{\partial^{p+1}}{\partial \nu \partial \tau^p} + K_{n-i} \frac{\partial^{p+1}}{\partial \tau^{p+1}} \right) \frac{\partial^i u}{\partial s^i}. \quad (3.113)$$

При этом, вообще,

$$\frac{\partial^p}{\partial \nu^p} \frac{\partial^n u}{\partial s^n} \neq \frac{\partial^p}{\partial s^n} \frac{\partial^p u}{\partial \nu^p}; \quad \frac{\partial^p}{\partial \tau^p} \frac{\partial^n u}{\partial s^n} \neq \frac{\partial^n}{\partial s^n} \frac{\partial^p u}{\partial \tau^p}. \quad (3.114)$$

Легко показать, что

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n} \frac{\partial^p u}{\partial t^p} = \frac{\partial^p}{\partial \tau^p} \frac{\partial^n u}{\partial s^n} + \sum_{i=1}^n C_n^i \frac{\partial^p u}{\partial x_1^{p-i} \partial x_2^i} \frac{\partial^n}{\partial s^n} (t_1^{p-i} t_2^i), \quad (3.115)$$

где  $t = t(s) = (t_1(s), t_2(s))$ ;  $t = \nu, \tau$ .

В частности, при  $p = n = 1$  получаем, что  $\nu$  — внешняя нормаль,  $\nu \times \tau = i_1 \times i_2$ ,

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu \partial \tau} + k \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (3.116)$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu \partial \tau}. \quad (3.117)$$

Для трехмерного пространства, когда граница  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  есть поверхность, описываемая векторным уравнением

$$r(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)), \quad (3.118)$$

где  $x_i$  — регулярные, достаточное число раз дифференцируемые функции для заданной области изменения  $u$  и  $v$ , представляется

возможным осуществлять аналогично (хотя, конечно, и с помощью более громоздких формул) продолжение в  $\Omega$  операторов дифференцирования по параметрам  $u$  (при  $v = \text{const}$ ) и  $v$  (при  $u = \text{const}$ ). Выбор координат  $u, v$  на  $\partial\Omega$  обычно осуществляют по-разному на различных ее частях, исходя из конкретных физических или геометрических условий. Выбрать, например, единую систему координат  $u, v$  без особых точек для тел, топологически эквивалентных сфере, невозможно. В теории тонких упругих оболочек в качестве координатных линий на срединной поверхности обычно принимают линии главных кривизн.

### § 5. Операторы разностного типа

Вместо введенных в § 3 операторов  $D_m^l$  (в частности,  $D_m$  и  $T_m$ ) можно применять операторы разностного вида, превращающиеся на  $\partial\Omega$  в производные по соответствующим направлениям. При численной реализации такой подход позволяет получать операторы продолжения граничной информации в область  $\Omega$  ( $\Omega$  может быть и все пространство) более устойчивые по отношению к неизбежным погрешностям вычислений или возмущениям функций, к которым эти операторы применяются.

Пусть  $f, \omega \in C^{m+1}(\Omega \cup \partial\Omega)$  и, как и ранее,  $\omega = 0$  — нормализованное уравнение  $\partial\Omega$ . Введем обозначения

$$\begin{aligned} x_+^l &= \left( x_1, \dots, x_{l-1}, x_l + \frac{1}{2} \omega(x), x_{l+1}, \dots, x_n \right); \\ x_-^l &= \left( x_1, \dots, x_{l-1}, x_l - \frac{1}{2} \omega(x), x_{l+1}, \dots, x_n \right); \\ h_l &= \omega(x_-^l) - \omega(x_+^l), \quad h = (h_1, \dots, h_n); \\ l &= (l_1, \dots, l_n); \\ Q_l^j f(x) &= f(x + jl), \quad Q_l^i Q_l^j f(x) = f(x + il^1 + jl^2); \\ (Q_l)^k &= Q_l^k. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Пользуясь формулой конечных разностей, получаем

$$(Q_l - 1)^k f(x) = (\nabla, l)^k f(x) + (\nabla, l)^{k+1} \Psi(x, l), \quad (3.120)$$

где  $\Psi(x, l) \in C(\Omega \cup \partial\Omega)$  — некоторая функция от  $x$  (остаточный член).

Пусть  $l = \omega(x) l^0$ ,  $l^0 = (l_1^0, \dots, l_n^0)$  и  $\|l^0\| = 1$  на  $\partial\Omega$  (такую нормировку вектора  $l^0$  всегда можно произвести методами, описанными в § 3). Тогда из (3.120) находим

$$\begin{aligned} (Q_l - 1)^k f(x) &= (Q_{\omega l^0} - 1)^k f(x) = \omega^k(x) (\nabla, l^0)^k f(x) + \\ &+ O[\omega^{k+1}(x)] \end{aligned} \quad (3.121)$$

или согласно (3.56)

$$(Q_{\omega l^0} - 1)^k f(x) = \omega^k(x) D_k^0 f(x) + O[\omega^{k+1}(x)]. \quad (3.122)$$



Тогда, учитывая, что  $D_k^p f(x)|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^p f}{\partial (l^0)^k}$ , получаем

$$\lim_{\substack{\|h\| \rightarrow 0 \\ y \in \partial\Omega}} |\omega^k(x) (Q_{\omega^0} - 1)^k f(x)|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^k f(y)}{\partial (l^0)^k}.$$

Полагая, в частности,  $\omega^0 = h = (h_1, \dots, h_n)$  (см. формулы (3.119)) и учитывая, что  $h = -\omega \nabla \omega + O(\omega^2)$ ,  $\|\nabla \omega\| = 1$  на  $\partial\Omega$ , из формулы (3.122) находим

$$(Q_h - 1)^k f(x) = (-1)^k \omega^k(x) D_k f(x) + O[\omega^{k+1}(x)]. \quad (3.123)$$

Например, если  $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , то

$$\begin{aligned} (Q_h - 1)f(x) &= f(x+h) - f(x) = f\left[x_1 - \omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right) + \right. \\ &\quad \left. + \omega\left(x_1 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right); x_2 - \omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right) + \right. \\ &\quad \left. + \omega\left(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right)\right] - f(x_1, x_2) = -\omega(x_1, x_2) \times \\ &\quad \times D_1 f(x_1, x_2) + O[\omega^2(x_1, x_2)]; \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$\begin{aligned} (Q_h - 1)^2 f(x) &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = \\ &= f\left[x_1 - 2\omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right) + 2\omega\left(x_1 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right); \right. \\ &\quad \left. x_2 - 2\omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\omega\left(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right)\right] - 2f\left[x_1 - \omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right) + \right. \\ &\quad \left. + \omega\left(x_1 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right); x_2 + \omega\left(x_1, x_2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right) - \omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right)\right] + f(x_1, x_2) = \\ &= \omega^2(x_1, x_2) D_2 f(x_1, x_2) + O[\omega^3(x_1, x_2)]. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Аналогичные формулы можно получить и для операторов  $T_k$ . Если  $f(x): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , достаточно вместо  $h$  взять  $l = (l_1, l_2)$ , где

$$\begin{aligned} l_1 &= -\omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right) + \omega\left(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right); \\ l_2 &= \omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right) - \omega\left(x_1 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right). \end{aligned} \quad (3.126)$$

Например,

$$\begin{aligned} (Q_l - 1)f(x) &= f(x+l) - f(x) = f\left[x_1 - \omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right) + \right. \\ &\quad \left. + \omega\left(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right); x_2 + \omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right) - \right. \\ &\quad \left. - \omega\left(x_1 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right)\right] - f(x_1, x_2) = \\ &= \omega(x_1, x_2) T_1 f(x_1, x_2) + O[\omega^2(x_1, x_2)]; \end{aligned} \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned}
 (Q_l - 1)^2 f(x) &= f(x + 2l) - 2f(x + l) + f(x) = f\left[x_1 - 2\omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right) + 2\omega\left(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right); \right. \\
 & \left. x_2 + 2\omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right) - 2\omega\left(x_1 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right)\right] - \\
 & - 2f\left[x_1 - \omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right) + \omega\left(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right); \right. \\
 & \left. x_2 + \omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right) - \omega\left(x_1 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right)\right] + \\
 & + f(x_1, x_2) = \omega^2(x_1, x_2) T_2 f(x_1, x_2) + O[\omega^3(x_1, x_2)]. \quad (3.128)
 \end{aligned}$$

Формулы для операторов  $(D_k T_m)$  можно строить, руководствуясь формулой

$$\begin{aligned}
 [(Q_n - 1)^k (Q_l - 1)^m] f(x) &= (-1)^k \omega^{k+m} (D_k T_m) f(x) + \\
 &+ O[\omega^{k+m+1}(x)]. \quad (3.129)
 \end{aligned}$$

*Упражнения и задачи.* 1. Построить разностные операторы, продолжающие вне  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$  операторы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial v}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}.$$

2. Грани прямоугольного параллелепипеда  $\Omega$  параллельны координатным плоскостям, касательные направления на каждой из граней совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Построить разностные операторы, продолжающие внутрь  $\Omega$  операторы

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + a \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (\text{на гранях, параллельных плоскости } x_1 O x_2);$$

$$L_2 = -\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + a \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + b \frac{\partial}{\partial x_1} + c \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (\text{на гранях, параллельных плоскости } x_2 O x_3).$$

3. Построить разностные операторы для  $D_3, T_3, D_1 T_2, D_2 T_1, S_1$  и  $S_2$ .

### § 6. Построение нормализованных до высших порядков уравнений чертежей

В § 21 гл. 2 было введено понятие нормализованного до  $m$ -го порядка уравнения чертежа. Для границы  $\partial\Omega = (\omega = 0)$  области  $\Omega$  условия нормализованности принимают вид

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial v} \right|_{\partial\Omega} = 1; \quad (3.130)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} \right|_{\partial\Omega} = \dots = \left. \frac{\partial^m \omega}{\partial v^m} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.131)$$



Из формул (3.61) следует

$$\begin{aligned} D_1(\omega_1^2) &= 2\omega_1 D_1\omega_1; \\ D_2(\omega_1^2) &= 2(D_1\omega_1)^2 + 2\omega_1 D_2\omega_1. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Подставляя (3.138) в (3.137), получаем

$$\begin{aligned} D_2\omega_2 &= D_2\omega_1 - (D_1\omega_1)^2 D_2\omega_1 - \omega_1 (D_2\omega_1)^2 - \\ &- 2\omega_1 D_1\omega_1 D_1 D_2\omega_1 - \frac{1}{2!} \omega_1^2 D_2 D_2\omega_1. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Полагая  $\omega_1 = 0$  и учитывая формулы (3.130) и (3.131), находим

$$\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial v^2} = D_2\omega_2|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.140)$$

Таким образом, уравнение  $\omega_2 = 0$  является уравнением  $L_2 \supset \partial\Omega$ , нормализованным на  $\partial\Omega$  до второго порядка. Докажем, что функция  $\omega$ , определяемая рекуррентными соотношениями (3.133), нормализована до  $m$ -го порядка. Для доказательства применим метод математической индукции.

Пусть уравнение  $\omega_k = 0$  нормализовано на  $\partial\Omega$  до  $k$ -го порядка. Покажем, что уравнение

$$\omega_{k+1} = \omega_k - \frac{1}{k!} \omega_1^{k+1} D_{k+1}\omega_k = 0 \quad (3.141)$$

нормализовано до  $(k+1)$ -го порядка.

Из формул (3.61) и (3.133) следует, что при  $i \leq k+1$

$$D_i(\omega_1^{k+1}) \equiv (k+1)k(k-1)\dots(k-i+2)\omega_1^{k+1-i}(D_1\omega_1)^i + O(\omega_1). \quad (3.142)$$

Следовательно,

$$D_i(\omega_1^{k+1})|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{при } i < k+1; \quad (3.143)$$

$$D_{k+1}(\omega_1^{k+1})|_{\partial\Omega} = (k+1)! \quad (3.144)$$

Применим операцию  $D_i$  к функции  $\omega_{k+1}$ , определяемой формулой (3.133), учитывая при этом формулу (3.61):

$$\begin{aligned} D_i(\omega_{k+1}) &\equiv D_i\omega_k - \frac{(k+1)k(k-1)\dots(k-i+2)}{(k+1)!} \omega_1^{k-i+1} (D_1\omega_1)^i \times \\ &\times D_{k+1}(\omega_k) + O(\omega_1) \quad (i < k+1); \\ D_{k+1}(\omega_{k+1}) &\equiv D_{k+1}\omega_k - (D_1\omega_1)^{k+1} D_{k+1}\omega_k + O(\omega_1). \end{aligned} \quad (3.145)$$

Учитывая (3.130) и (3.131), получаем

$$\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial v} \Big|_{\partial\Omega} = 1; \quad \frac{\partial^i \omega_{k+1}}{\partial v^i} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, k+1). \quad (3.146)$$

Из изложенного следует теорема.

**Теорема 1.** Пусть функция  $\omega_1 \in C^p(\Omega \cup \partial\Omega)$  ( $p = \frac{m^2 + m - 2}{2} + s$ ) удовлетворяет условиям

$$\omega_1|_{\partial\Omega} = 0; \quad \left. \frac{\partial\omega_1}{\partial\nu} \right|_{\partial\Omega} = 1. \quad (3.147)$$

Тогда функция  $\omega = \omega_m$ , определяемая рекуррентными соотношениями (3.133), принадлежит классу  $C^s(\Omega \cup \partial\Omega)$  и удовлетворяет условиям (3.130) — (3.131).

**Замечание 1.** Функция  $\omega(x)$ , нормализованная на  $\partial\Omega$  до  $m$ -го порядка, вблизи  $\partial\Omega$  примерно равна нормальной функции  $f(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} \|x - y\|$  (с точностью до величин порядка  $[f(x)]^{m+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ ). Действительно, пусть  $x$  — есть некоторая внутренняя точка области  $\Omega$ , достаточно близкая к  $\partial\Omega$ ,  $x^0 \in \partial\Omega$  — соответствующая ей точка противостояния (§ 17 гл. 2). Учитывая, что на  $\partial\Omega$   $\frac{\partial\omega}{\partial x_i} = \cos(\nu, O x_i)$ , нетрудно получить следующую зависимость между координатами точек  $x$  и  $x^0$ :

$$x_i = x_i^0 + f(x) q_i(x^0), \quad (3.148)$$

где  $f(x)$  — нормальная функция  $\partial\Omega$ , а

$$q_i(x^0) = \frac{\partial\omega(x^0)}{\partial x_i}. \quad (3.149)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\rho) = \omega(x^0 + \rho q), \quad q = (q_1, \dots, q_n), \quad (3.150)$$

где  $\rho \in \mathbb{R}$ . Нетрудно видеть, что

$$\varphi(0) = \omega(x^0); \quad \frac{d^k \varphi(0)}{d\rho^k} = d^k [\omega(x^0 + \rho q), q]. \quad (3.151)$$

Учитывая (3.59), получаем

$$\left. \frac{d\varphi}{d\rho} \right|_{\partial\Omega} = 1; \quad \left. \frac{d^k \varphi}{d\rho^k} \right|_{\partial\Omega} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, m). \quad (3.152)$$

Разлагая функцию  $\varphi(\rho)$  по формуле Тейлора, согласно формулам (3.151), (3.152), находим

$$\omega(x) = f(x) + \frac{1}{(m+1)!} \frac{d^{m+1} \varphi(\theta\rho)}{d\rho^{m+1}} [f(x)]^{m+1} \quad (0 < \theta < 1). \quad (3.153)$$

**Замечание 2.** Функции  $\omega_k$ , получаемые по формулам (3.133), могут, вообще, иметь нули внутри области  $\Omega$ . Однако в связи с нормализованностью функций  $\omega_k$  на  $\partial\Omega$  эти нули располагаются вне некоторой  $\varepsilon$ -окрестности  $\partial\Omega$ . Чтобы получить нормализованную до  $m$ -го порядка  $\omega^*(x)$ , достаточно добавить к полученной согласно (3.133) функции  $\omega(x)$  слагаемое вида  $\Phi \omega_1^{m+1}$ , где  $\Phi > 0$  подходящая функция из  $C^{k+1}$  (Проще всего взять  $\Phi \equiv \text{const.}$ ) Другая

возможность избежать нулей функции  $\omega$  внутри области  $\Omega$  заключается в предварительной обработке функции  $\omega_1(x)$  таким образом, чтобы внутри области  $\Omega$  (вне некоторой  $\varepsilon$ -окрестности  $\partial\Omega$ ) функция  $\omega(x)$  была близка к постоянной, а ее производные до  $m$ -го порядка были достаточно малы. Примером такой обработки является процедура срезки функции  $\omega_1(x)$ :

$$\omega_1^*(x) = \omega_1(x) \wedge_\alpha h. \quad (3.154)$$

Если вне  $\varepsilon$ -окрестности  $\partial\Omega$  функция  $\alpha(x)$  тождественно равна единице, а  $\omega(x) \leq h$ , то функция  $\omega^*(x)$  в этой же зоне будет тождественно равна  $h$ . Во многих случаях, особенно когда речь идет о нормализованности до второго или третьего порядка, можно полагать  $\alpha \equiv 0$  или любой другой константе, меньшей единицы.

**Пример 1.** Уравнение  $1/2(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0$  является нормализованным в  $\mathbb{R}^2$  до первого порядка уравнением окружности. Так как  $D_2\omega_1 \equiv -x_1^2 - x_2^2$ , согласно (3.133) уравнение

$$\begin{aligned} \omega_2(x) &\equiv \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{2 \cdot 4}(1 - x_1^2 - x_2^2)^2(x_1^2 + x_2^2) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2 \cdot 4}(1 - x_1^2 - x_2^2)[4 + (1 - x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)] = 0 \end{aligned}$$

является нормализованным до второго порядка уравнением этой же окружности.

*Замечание 3.* Вместо операторов  $D_k$  в рекуррентных соотношениях (3.133) можно использовать их разностные аналоги, рассмотренные в § 5. С точки зрения вычислительной математики такая замена операторов может оказаться весьма полезной.

*Упражнения и задачи.* 1. Написать нормализованные до второго порядка уравнения кривых и поверхностей второго порядка.

2. Написать нормализованное до  $m$ -го порядка уравнение гиперсферы в  $\mathbb{R}^n$ .

## § 7. Формулы Тейлора и Эрмита и некоторые их обобщения. Метод нормализант

Классическая формула Тейлора

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} f^{(k)}(x^0) (x - x^0)^k + (x - x^0)^{m+1} \Phi, \quad (3.155)$$

где  $r_m = (x - x^0)^{m+1} \Phi$  — остаточный член, представляющий собой величину порядка  $O(\|x - x^0\|^m)$ , отражает тот известный факт, что поведение функции  $f(x)$  в окрестности некоторой точки  $x^0$  во многих случаях определяется ее значением и значениями ее производных в этой точке. Это позволяет ставить в соответствие функции  $f(x)$  некоторый полином  $P_m(x)$ , который вместе со своими

(в общем случае частными) производными до некоторого порядка совпадает в точке  $x^0$  с функцией  $f(x)$  и соответствующими ее производными. Появляется возможность в окрестности точки  $x^0$  заменить  $f(x)$  полиномом  $P_m(x)$ , который представляет собой с точки зрения его использования достаточно простой объект. Формула (3.155) может рассматриваться как формула пучка функций (с неопределенной компонентой  $\Phi$ ), удовлетворяющих условиям

$$f(x)|_{x=x^0} = f(x^0), \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \Big|_{x=x^0} = f^{(k)}(x^0) \quad (k = 1, \dots, m). \quad (3.156)$$

Естественным обобщением формулы Тейлора, не выходящим за рамки использования степенных полиномов (по нашей терминологии —  $H_0$ -реализуемых функций, где  $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, a \forall a \in \mathbb{R}\}$ ), является известная формула Эрмита [61]. Полином Эрмита  $P_m(x)$  степени  $m = \rho_0 + \rho_1 + \dots + \rho_{s-1} + s - 1$  удовлетворяет в точках  $x^0, x^1, \dots, x^{s-1} \in \mathbb{R}$  ( $a = x^0 < x^1 < \dots < x^{s-1} < x^s = b$ ) условиям

$$\frac{d^j P_m(x^k)}{dx^j} = y_j^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, s-1; \quad j = 0, 1, \rho_k), \quad (3.157)$$

где  $y_j^{(k)} \in \mathbb{R}$ . Многочлен Эрмита существует и единственный. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что этот полином можно представить в виде [61]:

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{\rho_k} y_j^{(k)} P_{kj}(x), \quad (3.158)$$

где

$$P_{kj}(x) = \frac{\prod (x - x^i)^{\rho_i + 1}}{(x - x^k)^{\rho_k + 1 - j}} \left\{ \frac{(x - x^i)^{\rho_k + 1}}{\prod_i (x - x^i)^{\rho_i + 1}} \right\}_{(x^k)}^{(\rho_k - j)}$$

$$(k = 0, 1, \dots, s-1; \quad j = 0, 1, \dots, \rho_k); \quad (3.159)$$

$$\{\varphi(x)\}_{(a)}^{(q)} = \sum_{j=0}^q \frac{\varphi^{(j)}(a) (x-a)^j}{j!}.$$

Формула (3.158) может также рассматриваться как обобщение интерполяционного полинома Лагранжа (3.31). Последний получается из формулы Эрмита при  $\rho_j = 0$  ( $j = 0, 1, \dots, s-1$ ).

Подобно тому как это было сделано для формулы Лагранжа, используя формулу Эрмита, легко получить формулу для пучка всех полиномов, удовлетворяющих условиям (3.157). А именно

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{\rho_k} y_j^{(k)} P_{kj}(x) + \omega(x) \Phi(x). \quad (3.160)$$

Здесь

$$\omega(x) = (x - x^0)^{\rho_0 + 1} (x - x^1)^{\rho_1 + 1} \dots (x - x^{(s-1)})^{\rho_{s-1} + 1}, \quad (3.161)$$

а  $\Phi(x) \in \mathfrak{M}(H_0)$ . Можно утверждать и обратное: если пучок  $Q(x) \equiv P_m(x) + \omega(x)\Phi(x)$ , где  $P_m(x)$  — фиксированный полином из  $\mathfrak{M}(H_0)$ , а  $\omega(x)$  определяется (3.161), содержит все полиномы, удовлетворяющие условиям интерполяции (3.157) при  $\Phi(x) \in \mathfrak{M}(H_0)$ , то  $P_m(x)$  — полином Эрмита (3.158).

В принципе выбор приближающей функции в виде степенного полинома не обязателен. Требования, которые предъявляются к аппроксимирующей функции, сопряжены в основном с простотой выполнения вычислительных и аналитических операций. С появлением электронных вычислительных машин понятие простоты таких операций существенно изменилось. Так, если функция  $P_m(x)$  будет выбрана в виде некоторой элементарной функции, то вычислительные операции и такие операции, как нахождение дифференциальных операторов, построение суперпозиций с участием  $P_m(x)$  и другие, могут быть выполнены на ЭВМ без большого труда. В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли путем выбора более сложных, чем полиномы, функций  $P_m(x)$  (но в то же время достаточно простых с точки зрения их реализации на ЭВМ) получить такие формулы, которые представляли бы собой те или иные обобщения классической формулы Тейлора?

Случай, когда точечные многообразия, для которых решается задача эрмитовой интерполяции (включающая как частный случай лагранжеву и тейлорову интерполяции), есть системы конечного числа точек в  $\mathbb{R}^n$ , рассматривался многими исследователями (см. список литературы в работе [61]). В последние годы особенно интенсивно исследуются вопросы, касающиеся сплайн-функций и атомарных функций [2, 127]. Напомним, что степенные сплайны гладкости  $k$  по нашей терминологии представляют собой  $H_k$ -реализуемые функции, где  $H_k$  — система (3.38).

Вопрос о продолжении значений функции, заданной на чертеже, в дальнейшем рассмотрен с более общих позиций: роль систем точек будут играть чертежи ( $H$ -реализуемые). Такого рода обобщение как частный случай приведено для формулы Лагранжа (3.31) в § 1.

Рассмотрим построение аналогов формулы Тейлора. При этом, поскольку чертеж, на котором задана информация о функции (ее значения, значения ее производных), может представлять собой и объединение некоторых чертежей, фактически речь пойдет об обобщении формулы Эрмита (3.158).

Ограничимся наиболее важным для приложений случаем, когда рассматриваемый чертеж есть граница  $\partial\Omega$  (или часть границы) некоторой области  $\Omega$ . Предположим, что  $\partial\Omega$  является достаточно гладкой  $H$ -реализуемой гиперповерхностью, где

$$H = \{x_1 + x_2, x_1x_2, a \forall a \in \mathbb{R}, \{f_1, f_2, \dots\} \} \quad (3.162)$$

алгоритмически полная система, а множество  $\mathfrak{M}(H)$  инвариантно относительно операции дифференцирования. (Например,  $\mathfrak{M}(H) = \mathfrak{M}(H_2)$  есть множество всех элементарных функций.)



1. Опишем процедуру, которая всякой функции  $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$  ставит в соответствие такую функцию  $f^* \in C^m(\mathbb{R}^n)$ , которая на границе  $\partial\Omega$  совпадает с  $f$  и имеет нулевые нормальные производные порядка  $m$ . В этой процедуре будет участвовать функция  $\omega(x)$ , предполагаемая достаточно гладкой, такая, что  $\partial\Omega = \{\omega(x) = 0\}$ . При этом, если  $f, \omega \in \mathfrak{M}(H)$ , где  $H$  есть система (3.162), то также и  $f^* \in \mathfrak{M}(H)$ .

**Определение 1.** Функция  $f^*(x) = f(x - \omega \nabla \omega)$  называется нормализантой функции  $f(x)$  по функции  $\omega(x)$ .

**Теорема 1.** Если  $f, \omega \in C^m(\Omega \cup \partial\Omega)$ ,  $\partial\Omega$  —  $C^1$ -многообразие и  $\omega(x)$  удовлетворяет условиям

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0; \quad \frac{\partial\omega}{\partial\nu} \Big|_{\partial\Omega} = 1; \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial\nu^2} \Big|_{\partial\Omega} = \dots = \frac{\partial^m\omega}{\partial\nu^m} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.163)$$

то нормализанта  $f^*(x)$  функции  $f(x)$  по функции  $\omega(x)$  удовлетворяет условиям

$$f^*(x)|_{\partial\Omega} = f(x)|_{\partial\Omega}; \quad \frac{\partial^k f^*}{\partial\nu^k} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (3.164)$$

**Доказательство.** Так как  $D_2\omega|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2\omega}{\partial\nu^2}$ , по условиям (3.163)

$$D_2\omega|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.165)$$

Используя формулу (3.165), получаем

$$D_1 D_1 \omega = \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} D_1 \omega + \dots + \frac{\partial\omega}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} D_1 \omega \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.166)$$

Пусть  $\tau^k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) — базис в касательном к  $\partial\Omega$  пространстве  $T_\omega$ . В этом случае выполняется условие

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial x_1} & \frac{\partial\omega}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\omega}{\partial x_n} \\ \tau_1^1 & \tau_2^1 & \dots & \tau_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_1^{n-1} & \tau_2^{n-1} & \dots & \tau_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.167)$$

Так как  $D_1\omega|_{\partial\Omega} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 1$ , граница  $\partial\Omega$  является гиперповерхностью уровня функции  $D_1\omega$ . Тогда  $\frac{\partial}{\partial\nu} D_1\omega|_{\partial\Omega} = 0$ , а следовательно,

$$D_1^t D_1\omega|_{\partial\Omega} = 0 \quad (t = 1, \dots, n-1),$$

или, что то же,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (D_1 \omega) \tau_j^i |_{\partial \Omega} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1). \quad (3.168)$$

Присоединив к (3.168) уравнение (3.166), получим систему  $n$  алгебраических уравнений относительно  $\frac{\partial}{\partial x_j} D_1 \omega$  ( $j = 1, \dots, n$ ), решение которой согласно условию (3.167) является нулевым, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} D_1 \omega |_{\partial \Omega} = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (3.169)$$

Согласно (3.67) и (3.169) получаем

$$D_1 \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) \Big|_{\partial \Omega} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} D_1 \omega |_{\partial \Omega} = 0. \quad (3.170)$$

Из условий (3.163) следует, что

$$D_k \omega |_{\partial \Omega} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, m). \quad (3.171)$$

Следовательно,  $\partial \Omega$  является гиперповерхностью уровня для функций  $D_k \omega$  ( $k = 2, 3, \dots, m$ ). Поэтому

$$D_1^k D_k \omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (D_k \omega) \tau_j^k |_{\partial \Omega} = 0. \quad (3.172)$$

В то же время, если подставим в формулу (3.69) вместо  $f$  функцию  $\omega$ , то получим

$$D_1 D_k \omega = D_{k+1} \omega + \sum_{|\alpha| = k} \frac{\partial^k \omega}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \sum_{i=1}^n \alpha_i D_1 \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) \times \\ \times \prod_{j=1}^n \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right)^{\alpha_j} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^{-1}. \quad (3.173)$$

На границе  $\partial \Omega$  с учетом (3.170) и (3.171) получаем

$$D_1 D_k \omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (D_k \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, m). \quad (3.174)$$

Из условия (3.167) следует, что система (3.172), (3.174) имеет нулевое решение:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (D_k \omega) |_{\partial \Omega} = 0. \quad (3.175)$$

Используя формулы (3.68), с учетом (3.170) и (3.175) находим

$$D_k \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0 \quad (k, j = 1, \dots, n). \quad (3.176)$$

Пусть  $u_i = x_i - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i}$ . Тогда

$$D_1 u_i = D_1 \left( x_i - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega}{\partial x_i} D_1 \omega - \omega D_1 \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right).$$

На  $\partial\Omega$   $\omega = 0$ ;  $D_1\omega = 1$ , поэтому

$$D_1 u_t |_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.177)$$

Учитывая, что  $D_k x_i \equiv 0$ , при  $k \geq 2$  получаем

$$D_k u_t = -D_k \left( \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) = - \sum_{l=0}^k C_k^l D_{k-l} \omega D_l \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right). \quad (3.178)$$

На основании формул (3.171), (3.176) и (3.177)

$$D_k (u_i) |_{\partial\Omega} = 0 \quad (k = 1, \dots, m) \quad (3.179)$$

Применим операторы  $D_1, D_2, \dots$  к нормализанте  $f^*(x) = f(u)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$ , и учтем (3.177). Тогда

$$D_k f^*(x) |_{\partial\Omega} = 0 \quad (k = 1, \dots, m). \quad (3.180)$$

Отсюда следует выполнение условий (3.164), что и требовалось доказать.

Таким образом, нормализанта  $f^*(x)$  функции  $f(x)$  по функции  $\omega(x)$  в достаточно малой окрестности  $\partial\Omega$  ведет себя вдоль нормали к  $\partial\Omega$  почти как константа (с точностью до величин  $(m+1)$ -го порядка малости), а на  $\partial\Omega$  совпадает с  $f(x)$ .

**Пример 1.** Если для одномерного пространства написать уравнение точки  $x^0$  в виде  $\omega(x) \equiv x - x^0 = 0$ , которое, очевидно, является нормализованным по отношению к области  $x - x^0 \geq 0$  до любого порядка, то для нормализанты  $f^*(x)$  получаем

$$f^*(x) = f[x - (x - x^0)] = f(x^0).$$

2. Рассмотрим задачу о разложении функции  $f(x) \in C^{m+1}(\Omega \cup \partial\Omega)$  в окрестности границы  $\partial\Omega = (\omega = 0)$ , где  $\omega(x) \in \mathfrak{M}(H)$  — нормализованная до  $(m+1)$ -го порядка функция, а система  $H$  (3.162) — алгоритмически полная и множество  $\mathfrak{M}(H)$  инвариантно относительно операции дифференцирования.

Предположим, что на границе  $\partial\Omega$  известны значения функции  $f(x)$  и ее нормальных производных до  $m$ -го порядка (напомним, что нормаль  $\nu$  направлена внутрь области  $\Omega$ ):

$$\begin{aligned} f(x) |_{\partial\Omega} &= f_{01}(x); \\ \left. \frac{\partial^k f(x)}{\partial \nu^k} \right|_{\partial\Omega} &= f_{k1}(x) \quad (k = 1, \dots, m), \end{aligned} \quad (3.181)$$

где  $f_{i1}$  — известные на  $\partial\Omega$  функции из  $\mathfrak{M}(H)$ . Применяя к  $f_{i1}(x)$  оператор продолжения ЕС, описанный в § 1, и обозначая ЕС  $f_{i1} = f_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , а также предполагая, что  $f_i(x) \in \mathfrak{M}(H)$ , формулы (3.181) можем заменить формулами

$$\left. \frac{\partial^k f}{\partial \nu^k} \right|_{\partial\Omega} = f_k(x) |_{\partial\Omega} \quad (k = 0, 1, \dots, m). \quad (3.182)$$

Здесь  $\frac{\partial^k f}{\partial \nu^k} = f$  при  $k = 0$ .

**Теорема 2.** Если  $f_l(x)$ ,  $\omega(x) \in C^{m+1}(\Omega \cup \partial\Omega)$  и функция  $\omega(x)$  удовлетворяет условиям (3.163) до  $(m+1)$ -го порядка, то функция

$$P_m(x) = f_0^*(x) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{j!} f_j^*(x) \omega^j(x), \quad (3.183)$$

где  $f_j^*(x)$  — нормализанты  $f_j(x)$  по функции  $\omega(x)$ , удовлетворяет условиям

$$P_m(x)|_{\partial\Omega} = f_0(x)|_{\partial\Omega} = f(x), \quad (3.184)$$

$$\left. \frac{\partial^k P_m(x)}{\partial v^k} \right|_{\partial\Omega} = f_k(x)|_{\partial\Omega} = f_{kl}(x) \quad (k = 1, \dots, m). \quad (3.185)$$

**Доказательство.** Справедливость формулы (3.184) очевидна. Покажем, что выполняются условия (3.185). Применим к  $P_m(x)$  оператор  $D_k$ :

$$D_k P_m(x) = D_k f_0^*(x) + \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} D_k [f_j^*(x) \omega^j(x)]. \quad (3.186)$$

Согласно формуле Лейбница (3.61),

$$D_k (f_j^* \omega^j) = \sum_{l=0}^k C_k^l D_{k-l} (f_j^*) D_l (\omega^j). \quad (3.187)$$

Согласно (3.180)

$$D_{k-l} (f_j^*) = \begin{cases} 0, & k-l \neq j; \\ f_j^*, & k-l = j; \end{cases} \quad (3.188)$$

$$D_l (\omega^j) = \begin{cases} 0, & l \neq j; \\ j!, & l = j. \end{cases} \quad (3.189)$$

Следовательно,

$$D_k (f_j^* \omega^j)|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 0, & k \neq j; \\ k! f_j^*, & k = j. \end{cases} \quad (3.190)$$

Поэтому

$$D_k P_m(x)|_{\partial\Omega} = f_k^*(x)|_{\partial\Omega} = f_k|_{\partial\Omega}. \quad (3.191)$$

Учитывая формулу (3.57), приходим к условиям (3.185). Теорема доказана.

Формула (3.183) является аналогом полинома Тейлора (или Эрмита), совпадающего в заданной точке (или системе точек) с функцией  $f$  и ее производными до некоторого порядка. Однако здесь  $P_m(x)$ , вообще, не является полиномом, а имеет вид (при выполнении условий  $f_k, \omega \in \mathfrak{M}(H)$ ) некоторой  $H$ -реализуемой функции (например, элементарной). Обычный полином Тейлора для одномерного пространства получается из (3.183), если положить  $\omega(x) \equiv x - x^0$ .

**Теорема 3.** При выполнении условий теоремы 1 справедлива формула

$$f(x) = f_0^*(x) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{i!} f_i^*(x) \omega^i(x) + \omega^{m+1}(x) \Phi(x), \quad (3.192)$$

где  $\Phi \in C^1(\Omega \cup \partial\Omega)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим поведение некоторой функции  $F(x) \in C^{m+1}(\Omega \cup \partial\Omega)$  вдоль нормали к  $\partial\Omega$  в точке  $x^0 \in \partial\Omega$ . Учитывая, что  $\frac{\partial\omega}{\partial\nu} \Big|_{\partial\Omega} = 1$  и вводя обозначение  $q_i(x^0) = \frac{\partial^i \omega(x^0)}{\partial x^i}$ , легко получить формулу

$$x = x^0 + \rho(x) q(x^0),$$

где  $\rho(x) = \|x - x^0\|$ ;  $q(x^0) = \nabla\omega(x^0) = (q_1(x^0), \dots, q_n(x^0))$ . Тогда

$$F(x) = F[x^0 + \rho(x) q(x^0)] = F(x^0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \frac{\partial^k F(x^0)}{\partial v^k} \rho^k(x) + \\ + \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} F(x^0 + \theta\rho q)}{\partial v^{m+1}} \quad (0 < \theta < 1). \quad (3.193)$$

В частности, если  $F(x) = f_k^*(x)$ , то с учетом формул (3.180) получаем

$$f_k^*(x) = f_k(x^0) + O(\rho^{m+1}) \quad (k = 0, 1, \dots, m). \quad (3.194)$$

Тогда

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} f_k(x^0) \rho^k + O(\rho^{m+1}). \quad (3.195)$$

Отсюда согласно (3.194) находим

$$f(x) = f^*(x) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} [f_k^*(x) + O(\rho^{m+1})] [\omega(x) + O(\rho^{m+1})]^k + O(\rho^{m+1}),$$

или, имея в виду, что  $O(\rho^{m+1}) = O(\omega^{m+1}) = \omega^{m+1}\Phi$ , где  $\Phi \in C(\Omega \cup \partial\Omega)$ , получаем

$$f(x) = P_m(x) + \omega^{m+1}\Phi. \quad (3.196)$$

Формулу (3.196) будем называть обобщенной формулой Тейлора. (Как отмечалось выше, она является также обобщением и формулы Эрмита.) Эта формула определяет пучок функций (с неопределенной компонентой  $\Phi$ ), удовлетворяющих условиям (3.182). При выводе этой формулы предполагалось, что  $\partial\Omega$  является  $C^1$ -дифференцируемым многообразием.

**Пример 2.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  есть внешность точки  $x^0$  (т. е.  $x^0 \in \partial\Omega$ ).

Возьмем уравнение точки  $x^0$  в виде  $\omega(x) = \|x - x^0\| = [(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2]^{1/2}$ . Очевидно, что это уравнение нормализовано до любого порядка по отношению к любой нормали, исходящей из точки  $x^0$ . Пусть в точке  $x^0$  известны

значения функции  $f_0(x^0)$  и частных производных  $\frac{\partial^k f(x^0)}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}} = f_{ki}(x^0)$  некоторой функции  $f(x)$ . Заметим, что при таком выборе функции  $\omega(x)$  для всякой функции  $f(x)$  ее нормализанта  $f^*(x) = f(x^0)$ . Действительно,

$$f^*(x) = f(x - \omega \nabla \omega) = f(x_1 - x_1 + x_1^0, x_2 - x_2 + x_2^0) = f(x_1^0, x_2^0) = f(x^0).$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k f}{\partial v^k} &= \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^k f = \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^i \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^{k-i} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}}, \end{aligned}$$

имеем

$$f_k^*(x) = f_k(x^0) = \sum_{i=0}^k C_k^i \left( \frac{x_1 - x_1^0}{\|x - x^0\|} \right)^i \left( \frac{x_2 - x_2^0}{\|x - x^0\|} \right)^{k-i} \frac{\partial^k f(x^0)}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}}. \quad (3.197)$$

Подставляя (3.197) в формулу (3.196), приходим к обычной формуле Тейлора для  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1^0, x_2^0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{\partial^k f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}} (x_1 - x_1^0)^i (x_2 - x_2^0)^{k-i} \right) + \\ + \Phi(x_1, x_2) \|x - x^0\|^{m+1}, \end{aligned} \quad (3.198)$$

где  $\Phi(x_1, x_2) \|x - x^0\|^{m+1}$  — остаточный член, для которого в данном случае (при указанном выборе  $\omega$ ) можно получить одну из обычных форм (Лагранжа, Пеано и др.). Таким же путем можно получить обычную формулу Тейлора для разложения функции в окрестности  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ .

Разложению функций в окрестности дифференцируемых многообразий посвящены работы [87, 198, 199], в которых конструктивная реализация имеет иной характер: значения функций и их производных на  $\partial\Omega$  получаются в результате раскрытия неопределенностей вида  $\rho^k(x) I_k(x)$  при  $\rho \rightarrow 0$ , где  $\rho(x)$  — кратчайшее расстояние от точки  $x$  до  $\partial\Omega$ , а  $I_k(x)$  — некоторые расходящиеся при  $x \rightarrow x^0 \in \partial\Omega$  интегралы. Такое решение вопроса не является конструктивным в том смысле, который был определен в гл. 1, так как не содержит ответа на вопросы, с помощью какой базисной системы операций  $H$  и каким образом можно получить формулы для  $\rho(x)$  и для коэффициентов разложения.

3. При построении обобщенной формулы Тейлора существенным было то, что функции  $f_k^*(x)$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) (нормализанты данных функций  $f_k(x)$ ) удовлетворяют условиям (3.180). Между тем построение нормализанта в соответствии с определением 1 не является единственно возможным способом построения функций, удовлетворяющих условиям (3.180). Более того, требование к функции  $\omega(x)$ , сформулированное в виде равенств (3.163), может оказаться неудобным в конструктивном отношении (см. § 6). Поэтому рассмотрим другой способ, основанный на введенных ранее операторах раз-

ностного типа, с помощью которых дифференциальные условия, заданные на  $\partial\Omega$ , могут продолжаться внутрь области  $\Omega$  (см. § 5). Как и в § 5, полагаем

$$x_{\pm}^i = \left( x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \pm \frac{1}{2} \omega(x), x_{i+1}, \dots, x_n \right);$$

$$h_i(x) = \omega(x_{-}^i) - \omega(x_{+}^i), \quad h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x)). \quad (3.199)$$

Отметим также формулы

$$(Q_n - 1)^k f(x) = (-1)^k \omega^k(x) D_k f(x) + O(\omega^{k+1}(x)); \quad (3.200)$$

$$(Q_t - 1)^k f(x) = (-1)^k \omega^k(x) T_k f(x) + O(\omega^{k+1}(x)), \quad (3.201)$$

где  $Q_i^l f(x) = f(x + il)$ ,  $D_k = (\nabla\omega, \nabla)^k$ ,  $T_k = (\tau(x), \nabla)^k$ ,  $\tau(x) = \tau_0(x)\omega(x)$ , где  $\tau_0(x)$  — единичный вектор касательной в точке  $x \in \partial\Omega$ , который с помощью функции  $\omega(x)$  некоторым образом продолжен в область  $\Omega$ . Например, при  $n = 2$   $\tau(x) = (-h_2(x), h_1(x))$ .

Введем в рассмотрение функцию

$$u(x) = x + h(x) \quad (3.202)$$

и определим функции  $v_i(x)$  с помощью рекуррентных соотношений

$$v_1(x) = u(x), \quad v_2(x) = v_1(u(x)), \quad \dots, \quad v_m(x) = v_{m-1}(u(x)). \quad (3.203)$$

**Определение 2.** Нормализантой  $m$ -го уровня функции  $f(x)$  по функции  $\omega(x)$  назовем функцию  $f^{(*m)}(x)$ , определяемую формулой

$$f^{(*m)}(x) = f(v_m(x)). \quad (3.204)$$

Из определения 2 следует, что нормализанта первого уровня есть нормализанта в смысле, установленном определением 1.

Поскольку в основе определения нормализанты  $m$ -го уровня лежит процедура образования суперпозиций функций  $f(x)$  и  $\omega(x)$ , то если  $f(x)$ ,  $\omega(x) \in \mathfrak{M}(H)$ , где базисная система  $H$  определена формулой (3.162), также имеем  $f^{(*m)}(x) \in \mathfrak{M}(H)$ .

Вычислим  $D_i h_i(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) (см. § 3), используя формулы (3.64) и (3.63):

$$\begin{aligned} D_1 h_i(x) &= D_1 \omega(x_{-}^i) - D_1 \omega(x_{+}^i) = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[ \frac{\partial \omega(x_{-}^i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega(x_{+}^i)}{\partial x_j} \right] D_1 x_j + \frac{\partial \omega(x_{-}^i)}{\partial x_i} D_1 \left[ x_i - \frac{1}{2} \omega(x) \right] - \\ &- \frac{\partial \omega(x_{+}^i)}{\partial x_i} D_1 \left[ x_i + \frac{1}{2} \omega(x) \right] = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[ \frac{\partial \omega(x_{-}^i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega(x_{+}^i)}{\partial x_j} \right] \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} + \\ &+ \frac{\partial \omega(x_{-}^i)}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} - \frac{1}{2} D_1 \omega(x) \right] - \frac{\partial \omega(x_{+}^i)}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} D_1 \omega(x) \right] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[ \frac{\partial \omega(x_{-}^j)}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega(x_{+}^j)}{\partial x_j} \right] \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} + \left[ \frac{\partial \omega(x_{-}^i)}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega(x_{+}^i)}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} - \\ - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \omega(x_{-}^i)}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega(x_{+}^i)}{\partial x_i} \right] D_1 \omega(x). \quad (3.205)$$

Путем аналогичных математических выкладок, используя вторую формулу (3.63) и свойство  $D_2 x_j \equiv 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ), получаем

$$D_2 h_i(x) = \left[ \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{4} (D_1 \omega(x))^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right] (\omega(x_{-}^i) - \omega(x_{+}^i)) - \\ - (D_1 \omega(x)) \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right] (\omega(x_{-}^i) + \omega(x_{+}^i)) - \\ - \frac{1}{2} (D_2 \omega(x))^2 \frac{\partial}{\partial x_i} [\omega(x_{-}^i) + \omega(x_{+}^i)]. \quad (3.206)$$

В равенствах (3.205) и (3.206) под производными  $\frac{\partial \omega(x_{\pm}^j)}{\partial x_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , подразумеваются соответствующие частные производные от  $\omega(x)$  в точках  $x_{\pm}^j$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\omega(x) \in C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$  удовлетворяет условиям нормализованности до первого порядка

$$\omega(x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 1. \quad (3.207)$$

Тогда

$$а) D_1 h(x)|_{\partial\Omega} = -\nabla \omega(x)|_{\partial\Omega}; \quad (3.208)$$

б) если  $N(x) = D_2 h(x)|_{\partial\Omega}$ , то скалярное произведение  $(N(x), \tau_0(x)) = 0$  ( $\tau_0(x)$  — единичный вектор какой-либо касательной к  $\partial\Omega$ ).  
**Доказательство:** а) переходя в формуле (3.205) к пределу при  $\omega(x) \rightarrow 0$ , учитывая второе из свойств (3.207) и непрерывность производных от  $\omega(x)$ , получаем  $D_1 h_i(x)|_{\partial\Omega} = -\frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \Big|_{\partial\Omega}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), или  $D_1 h(x)|_{\partial\Omega} = -\nabla \omega(x)|_{\partial\Omega}$ ; б) переходя в формуле (3.206) к пределу при  $\omega(x) \rightarrow 0$ , с учетом второго из условий (3.207) и непрерывности производных от  $\omega(x)$ , получаем

$$D_2 h_i(x)|_{\partial\Omega} = \left[ -2 \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} D_2 \omega(x) \right] \Big|_{\partial\Omega} = \\ = \left[ -2D_1 \left( \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} D_2 \omega(x) \right] \Big|_{\partial\Omega} \quad (i = 1, \dots, n),$$



или

$$\begin{aligned} D_2 h(x) &= [-2D_1 \nabla \omega(x) - D_2 \omega(x) \nabla \omega(x)]|_{\partial \Omega} = \\ &= [-\nabla D_1 \omega(x) - D_2 \omega(x) \nabla \omega(x)]|_{\partial \Omega}. \end{aligned} \quad (3.209)$$

(Последнее равенство записано на основе формулы (3.67).) Рассмотрим

$$\begin{aligned} (N(x), \tau^0(x)) &= (D_2 h(x), \tau^0(x))|_{\partial \Omega} = -(\tau^0(x), \nabla D_1 \omega(x)) - \\ &\quad - D_2 \omega(x) (\tau^0(x), \nabla \omega(x))|_{\partial \Omega} = \\ &= -[(\tau^0(x), \nabla) D_1 \omega(x) + D_2 \omega(x) (\tau^0(x), \nabla) \omega(x)]|_{\partial \Omega} = \\ &= -[T_1(D_1 \omega(x)) + D_2 \omega(x) T_1 \omega(x)]|_{\partial \Omega}. \end{aligned}$$

Это равенство написано с учетом того, что  $T_h = (\tau(x) M, \nabla)^k$ . Так как  $\partial \Omega$  является для функций  $D_1 \omega(x)$  и  $\omega(x)$  гиперповерхностью уровня, получаем

$$(N(x), \tau^0(x)) = -\frac{\partial}{\partial \tau^0} \left( D_1 \omega(x) - D_2 \omega(x) \frac{\partial \omega(x)}{\partial \tau^0} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0.$$

Лемма доказана.

*Следствие.* Пусть  $x^0 \in \partial \Omega$  и  $\omega(x)$  удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда для достаточно малых  $\varepsilon > 0$  и для точек  $x \in N(x^0) \cap \partial \Omega_\varepsilon$ , где  $\partial \Omega_\varepsilon$  —  $\varepsilon$ -окрестность  $\partial \Omega$  в области  $\Omega$ , справедливы эквивалентные представления

$$u(x) = x + h(x) = x^0 + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 D_2 h(x^0) + O(\rho^3); \quad (3.210)$$

$$u(x) = v_1(x) = x^0 + \frac{1}{2} \omega^2(x) D_2 h(x^0) + O(\omega^3(x)). \quad (3.211)$$

Действительно, разложим функцию  $u(x)$  по формуле Тейлора на  $N(x^0)$  в окрестности точки  $x^0$ :

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x^0) + \|x - x^0\| D_1 u(x^0) + \frac{1}{2!} \|x - x^0\|^2 D_2 u(x^0) + \\ &\quad + O(\|x - x^0\|^3). \end{aligned} \quad (3.212)$$

Вследствие того что  $x^0 \in \partial \Omega$ , с учетом (3.199) и (3.202) получаем  $u(x^0) = x^0$ . Так как  $D_1 x = \nabla \omega(x)$ , с учетом условия «а» леммы 1 получаем

$$D_1 u(x^0) = (D_1 x + D_1 h(x))|_{x=x^0 \in \partial \Omega} = 0. \quad (3.213)$$

Учитывая, что  $D_2 x \equiv 0$ , получаем

$$D_2 u(x)|_{x=x^0 \in \partial \Omega} = D_2 h(x^0). \quad (3.214)$$

Подставляя формулы (3.213), (3.214) в (3.212), приходим к (3.210). Так как  $\omega(x)$  удовлетворяет на  $\partial \Omega$  условиям нормализованности до первого порядка, то  $\|x - x^0\| = \omega(x) + O(\omega^2(x))$ ,  $x \in \partial \Omega_\varepsilon$ . Следовательно, равенство (3.210) можно записать в виде (3.211), что и требовалось доказать.

**Лемма 2.** Пусть  $\omega(x) \in C^m(\Omega \cup \partial \Omega)$  — нормализована на  $\partial \Omega$  до первого порядка, а функция  $v_k(x)$  определяется формулами

(3.203). Тогда

$$D_j v_k(x)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (j = 1, \dots, 2^{k-1}), \quad (3.215)$$

где  $m \geq 2^{k-1}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим разложение (3.211) и вспомогательную функцию  $\hat{u}(x) = x^0 + \omega^2(x) D_2 h(x^0)$ ,  $x \in N(x^0) \cap \partial\Omega_\varepsilon$ . Из утверждения «б» леммы 1 имеем:  $\hat{u}(x) \in N(x^0)$ . Исходя из того что  $\omega(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x^0$  и условий нормализованности  $\omega(x)$ , можно найти такое  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , при котором для всех  $x \in N(x^0) \cap \partial\Omega_{\varepsilon_1}$  будет  $\hat{u}(x) \in N(x^0) \cap \partial\Omega_{\varepsilon_2}$ . Кроме того, из (3.211) следует, что

$$u(x) = \hat{u}(x) + O(\omega^3(x)). \quad (3.216)$$

Покажем, что  $\omega(\hat{u}(x)) = O(\omega^2(x))$ . Для этого применим формулу Тейлора к функции  $\omega(x)$  в окрестности точки  $x^0$ :

$$\begin{aligned} \omega(\hat{u}(x)) &= \omega\left(x^0 + \frac{1}{2} \omega^2(x) D_2 h(x^0)\right) = \\ &= \omega(x^0) + \frac{1}{2} \omega^2(x) (\nabla \omega(x^0), D_2 h(x^0)) + O(\omega^4(x)) = \\ &= C \omega^2(x) + O(\omega^4(x)). \end{aligned} \quad (3.217)$$

Здесь  $\omega(x^0) = 0$ , так как  $x^0 \in \partial\Omega$ ,  $C = \frac{1}{2} (\nabla \omega, D_2 h(x))$ .

Установим справедливость следующих равенств:

$$v_k(x) = x^0 + A_k \omega^{2^k}(x) + O(\omega^{2^{k+1}}(x)) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3.218)$$

где  $x \in N(x^0) \cap \partial\Omega_\varepsilon$ . При  $k \doteq 1$  равенство (3.218) справедливо на основании следствия леммы 1. Пусть (3.218) верно при  $k = r$ . Докажем, что это равенство справедливо и при  $k = r + 1$ .

Поскольку  $\hat{u}(x) \in N(x^0) \cap \partial\Omega_\varepsilon$  при  $x \in N(x^0) \cap \partial\Omega_\varepsilon$ , поэтому равенство (3.218) при  $k = 2$  можно рассматривать в точке  $\hat{u}(x)$ :

$$\begin{aligned} v_r(\hat{u}(x)) &= x^0 + A_r C^{2^r} \omega^{2^{r+1}}(x) + O(\omega^{2^{r+1}+2}(x)) = \\ &= x^0 + A_{r+1} \omega^{2^{r+1}}(x) + O(\omega^{2^{r+1}+2}(x)). \end{aligned} \quad (3.219)$$

Рассмотрим  $v_{r+1}(x) = v_r(u(x)) = v_r(\hat{u}(x)) + O(\omega^3(x))$  (на основании (3.216)) и применим формулу Тейлора к функции  $v_r(x)$  в окрестности точки  $\hat{u}(x)$ :

$$\begin{aligned} v_{r+1}(x) &= v_r(\hat{u}(x) + O(\omega^3(x))) = \\ &= v_r(\hat{u}(x)) + (O(\omega^3(x)), \nabla) v_r(\hat{u}(x)) + O((O(\omega^3(x)), \nabla)^2 v_r(\hat{u}(x))). \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} (O(\omega^3(x)), \nabla) v_r(\hat{u}(x)) &= (O(\omega^3(x)), \nabla) [x^0 + A_{r+1}\omega^{2^{r+1}}(x) + \\ &+ O(\omega^{2^{r+1}+2}(x))] = A_{r+1}(O(\omega^3(x)), \nabla) \omega^{2^{r+1}}(x) + O(\omega^{2^{r+1}+4}(x)) = \\ &= A_{r+1}O(\omega^{2^{r+1}+2}(x)) + O(\omega^{2^{r+1}+4}(x)) = O(\omega^{2^{r+1}+2}(x)). \end{aligned}$$

Аналогично

$$O(O(\omega^3(x)), \nabla)^2 v_r(\hat{u}(x)) = O(\omega^{2^{r+1}+4}(x)).$$

Таким образом, получаем  $v_{r+1}(x) = v_r(\hat{u}(x)) + O(\omega^{2^{r+1}+2}(x))$ . Применяв формулу (3.219), получим (3.218) при  $k = r + 1$ . Справедливость (3.218) доказана. Отсюда легко вытекает утверждение леммы 2:

$$\begin{aligned} D_j v_k(x)|_{\partial\Omega} &= D_j [x^0 + A_k \omega^{2^k}(x) + O(\omega^{2^k+1}(x))] = \\ &= [A_k \cdot 2^k(2^k - 1) \dots (2^k - j + 1)] \omega^{2^k-1}(x) D_j \omega(x) + \\ &+ O(\omega^{2^k+1-j}(x))|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Теорема 4.** Если  $f(x), \omega(x) \in C^r(\partial\Omega_\varepsilon)$ , а функция  $\omega(x)$  — нормализована до первого порядка, то нормализанта  $f^{(*m)}(x)$   $m$ -го уровня функции  $f(x)$  по функции  $\omega(x)$ , определенная формулой (3.204), удовлетворяет условиям

$$f^{(*m)}(x)|_{\partial\Omega} = f(x)|_{\partial\Omega}; \quad \frac{\partial^k f^{(*m)}(x)}{\partial v^k} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.220)$$

где  $1 \leq k \leq 2^m - 1 \leq r$ .

**Доказательство.** По определению  $h(x)|_{\partial\Omega} = 0$ , поэтому  $v_k(x)|_{\partial\Omega} = x$  для всех натуральных  $k$ . Следовательно,  $f^{(*m)}(x)|_{\partial\Omega} = f(v_m(x))|_{\partial\Omega} = f(x)|_{\partial\Omega}$ .

Применяя операторы  $D_k$  к  $f^{(*m)}$  и используя формулы (3.63), получаем

$$D_k f^{(*m)}(x)|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^k}{\partial v^k} f^{(*m)}(x)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (k = 1, \dots, 2^m - 1). \quad (3.221)$$

Теорема доказана.

**Замечание 1.** Если условия (3.220) требуется выполнить при  $k = 1, \dots, p$ , то уровень нормализанты  $f(x)$  по  $\omega(x)$  определяется соотношением, которое вытекает из формулы (3.221):

$$m = [\log_2 p] + 1, \quad (3.222)$$

где  $[a]$  — целая часть числа  $a$ .

4. Рассмотрим вопрос о построении обобщенной формулы Тейлора, в которой используются рассмотренные выше нормализанты  $m$ -го

уровня, получающиеся путем подстановки вместо аргументов некоторых разностных форм, содержащих функцию  $\omega = \omega_1(x)$ , нормализованную на  $\partial\Omega$  лишь до первого порядка.

Обозначим  $\omega_m(x) = 0$  уравнение  $\partial\Omega \in \mathfrak{M}(H)$ , нормализованное до порядка  $m$ . Предположим, что функция  $f(x) \in C^m(\Omega \cup \partial\Omega)$  на  $\partial\Omega$  удовлетворяет условиям (3.182). Обозначим также  $\kappa = [\log_2 m] + 1$ .

**Теорема 5.** Если  $\omega_1(x)$ ,  $\omega_m(x)$  и  $f_k(x) \in C^m(\Omega \cup \partial\Omega)$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ), то функция

$$P_m(x) = f_0^{(\kappa)}(x) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} f_k^{(\kappa)}(x) \omega_m^k(x) \quad (3.223)$$

удовлетворяет условиям

$$P_m(x)|_{\partial\Omega} = f_0(x); \quad \left. \frac{\partial^k P_m(x)}{\partial \nu^k} \right|_{\partial\Omega} = f_k(x)|_{\partial\Omega}; \quad P_m(x) \in \mathfrak{M}(H). \quad (3.224)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

**Замечание 2.** Если рассматривать  $\omega_k(x) = 0$  как уравнения  $\partial\Omega$ , нормализованные до порядка  $k$ , и обозначить  $\kappa_k = [\log_2(m-k)] + 1$  ( $k = 0, 1, \dots, m-1$ ), то формулу (3.223) можно заменить формулой

$$P_m(x) = f_0^{(\kappa_0)}(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} f_k^{(\kappa_k)}(x) \omega_{m-k+1}^k(x) + \frac{1}{m!} f_m(x) \omega_m^m(x) \quad (3.225)$$

и при этом условия (3.224) будут выполняться.

**Теорема 6.** Пусть  $f(x) \in C^{m+1}(\Omega \cap \partial\Omega)$  и

$$f(x)|_{\partial\Omega} = f_0(x)|_{\partial\Omega}, \quad \left. \frac{\partial^k f(x)}{\partial \nu^k} \right|_{\partial\Omega} = f_k(x)|_{\partial\Omega}, \quad (3.226)$$

где  $f_k(x) \in \mathfrak{M}(H)$ . Тогда при выполнении условий предыдущей теоремы справедливо равенство

$$f(x) = P_m(x) + \omega_1^{m+1} \Phi. \quad (3.227)$$

**Доказательство.** Пусть  $x^0 \in \partial\Omega$ . Рассмотрим поведение функции  $f(x)$  на нормали  $N(x^0)$ , проведенной к  $\partial\Omega$  в точке  $x^0$ . Согласно условию  $\left. \frac{\partial \omega_1}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = 1$  любую точку  $x \in \partial\Omega_\epsilon \cap N(x^0)$  можно представить в виде  $x = x^0 + \|x - x^0\| \nabla \omega_1(x)$ ,  $x^0 \in \partial\Omega$ . Разложим функцию  $f(x^0 + \|x - x^0\| \nabla \omega_1(x))$  по степеням  $\rho = \|x - x^0\|$  в окрестности точки  $x^0$ :

$$f(x^0 + \rho \nabla \omega_1(x)) = f(x^0) + \rho (\nabla \omega_1(x^0), \nabla) f(x^0) + \\ + \frac{\rho^2}{2} (\nabla \omega_1(x^0), \nabla)^2 f(x^0) + \dots + \frac{1}{m!} \rho^m (\nabla \omega_1(x^0), \nabla)^m f(x^0) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!} (\nabla \omega_1(x^0), \nabla)^{m+1} f(x^0 + \theta \rho \nabla \omega_1(x^0)) = \\
 & = f(x^0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(x^0)}{\partial v^k} \rho^k + \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(x^0 + \theta \rho \nabla \omega_1(x))}{\partial v^{m+1}}.
 \end{aligned}$$

На основании формул (3.221), (3.222) и условий теоремы имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^k f(x^0)}{\partial v^k} & = f_k(x^0) = f_k^{(*)}(\rho)(x) + O(\rho^{m+1}) \quad (3.228) \\
 & (k = 0, 1, \dots, m).
 \end{aligned}$$

Из нормализованности функций  $\omega_m(x)$  получаем

$$\rho = \omega_k(x) + O(\omega_1^{k+1}) \quad (k = 0, 1, \dots, m). \quad (3.229)$$

Поэтому формула (3.228) преобразуется в равенство

$$\frac{\partial^k f(x^0)}{\partial v^k} = f_k(x^0) = f_k^{(*)}(\rho)(x) + O(\omega_1^{m+1}(x)).$$

Вследствие полученных соотношений разложение (3.227) принимает вид

$$\begin{aligned}
 f(x^0 + \rho \nabla \omega_1(x^0)) & = f_0^{(*)}(\rho)(x) + O(\omega_1^{m+1}(x)) + \\
 & + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} (f_k^{(*)}(\rho)(x) + O(\omega_1^{m+1}(x))) (\omega_m^k(x) + O(\omega_1^{m+k}(x))) + \\
 & + \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(x^0 + \theta \nabla \omega_1(x^0))}{\partial v^{m+1}} (\omega_m^{m+1}(x) + O(\omega_1^{2m+1}(x))) = \\
 & = P_m(x) + O(\omega_1^{m+1}(x)) = P_m(x) + \omega_1^{m+1}(x) \Phi(x), \quad (3.230)
 \end{aligned}$$

где  $\Phi \in C(\Omega \cap \partial\Omega)$ , что и требовалось доказать.

*Замечание 3.* Проведя аналогичные рассуждения, можно показать, что такого же порядка малости остаточный член получается для разложения (3.225).

5. В предыдущем пункте предполагались известными нормализованные до  $k$ -го порядка уравнения  $\omega_k(x) = 0$  границы  $\partial\Omega$ .

Такие функции можно строить, применяя рекуррентные соотношения (3.133), которые, однако, содержат операцию дифференцирования функции  $\omega_1(x)$ . Опишем метод, позволяющий получать формулы разностного вида для функций  $\omega_k(x)$ .

Пусть  $\omega_1(x) = 0$  — уравнение  $\partial\Omega$ , нормализованное до первого порядка. Функцию  $\omega_2(x)$ , нормализованную до второго порядка, будем искать в виде

$$\omega_2(x) = \omega_1(x) + \alpha_1 \omega_1(x + h(x)), \quad (3.231)$$

где  $\alpha_1$  — постоянная, подлежащая определению. Так как  $h(x)|_{\partial\Omega} = 0$  и  $\omega_1(x)|_{\partial\Omega} = 0$ , имеем  $\omega_2(x)|_{\partial\Omega} = 0$ . Рассмотрим  $D_1 \omega_2(x)|_{\partial\Omega}$ :

$$\begin{aligned}
 D_1 \omega_2(x)|_{\partial\Omega} & = D_1 \omega_1(x) + \alpha_1 D_1 \omega_1(x + h(x))|_{\partial\Omega} = \\
 & = D_1 \omega_1(x) + \alpha_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_1(x + h(x))}{\partial x_i} D_1(x_i + h_i(x))|_{\partial\Omega} = 1.
 \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из нормализованности  $\omega_1(x)$  и леммы 2. Найдем выражение  $D_2\omega_2(x)|_{\partial\Omega}$  и приравняем его к нулю:

$$\begin{aligned} D_2\omega_2(x)|_{\partial\Omega} &= \{D_2\omega_1(x) + \alpha_1 D_2\omega_1(x+h(x))\}|_{\partial\Omega} = \\ &= \left\{ D_2\omega_1(x) + \alpha_1 \left[ \sum_{i=1}^n D_1(x_i + h_i(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^2 \omega_1(x+h(x)) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_1 \left[ \sum_{i=1}^n D_2(x_i + h_i(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \omega_1(x+h(x)) \right\} \Big|_{\partial\Omega} = \\ &= \left\{ D_2\omega_1(x) - \alpha_1 (\nabla\omega_1(x), \nabla D_1\omega_1(x)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \alpha_1 D_2\omega_1(x) (\nabla\omega_1(x), \nabla\omega_1(x)) \right\} \Big|_{\partial\Omega} = \\ &= \{D_2\omega_1(x) - 2\alpha_1 (\nabla\omega_1(x), D_1\nabla\omega_1(x)) - \alpha_1 D_2\omega_1(x)\} \Big|_{\partial\Omega} = \\ &= \{D_2\omega_1(x) - 2\alpha_1 D_2\omega_1(x) - \alpha_1 D_2\omega_1(x)\} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ . Таким образом, нормализованное до второго порядка уравнение  $\partial\Omega$  получаем в виде

$$\omega_2(x) = \omega_1(x) + \frac{1}{3} \omega_1(x+h(x)). \quad (3.232)$$

Располагая функцией  $\omega_2(x)$  (3.232), нормализованной до второго порядка, можем по тому же правилу  $\omega_3(x) = \omega_2(x) + \alpha_2\omega_2(x+h(x))$  найти функцию  $\omega_3(x)$ , нормализованную до третьего порядка и т. д.

**Теорема 7.** Пусть  $\omega_i(x) = 0$  — нормализованные до  $(m_i + 1)$ -го порядка уравнения непересекающихся чертежей  $\Gamma_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ), а  $P_n^i(x)$  — обобщенные полиномы Тейлора (того или иного вида), удовлетворяющие условиям:  $P_n^i(x)|_{\Gamma_i} = f_{0i}(x)|_{\Gamma_i}$ ,  $\frac{\partial^k P_n^i(x)}{\partial \nu_i^k} \Big|_{\Gamma_i} = f_{ki}(x)|_{\Gamma_i}$ .

Тогда функция

$$Q(x) = \frac{\sum_{i=1}^s P_n^i(x) \tau_i^{m_i+1}}{\sum_{i=1}^s \tau_i^{m_i+1}} + \Phi(x) \prod_{i=1}^s [\omega_i(x)]^{m_i+1}, \quad (3.233)$$

где  $\tau_i(x) = \omega_i^{-1}(x)$ , определяет пучок функций (с неопределенной компонентой  $\Phi$ ), удовлетворяющих условиям

$$Q(x)|_{\Gamma_i} = f_{0i}(x)|_{\Gamma_i}, \quad \frac{\partial^k Q(x)}{\partial \nu_i^k} = f_{ki}(x)|_{\Gamma_i} \quad (3.234)$$

$$(k = 1, \dots, m_k).$$

Формула (3.233) построена по образцу формулы склейки (3.11). Первое слагаемое в формуле (3.233) представляет собой обобщение интерполяционного полинома Эрмита (3.158) для одномерного

пространства, в котором роль чертежей  $\Gamma_i$  играли точки  $x^i$ . Второе слагаемое — остаточный член. Доказательство теоремы можно осуществить простой подстановкой  $Q(x)$  вместо  $P_m(x)$  в условия (3.184), (3.185).

*Упражнения и задачи.* 1. Чему равна нормализанта  $f^*(x)$  функции  $f(x)$  по функции  $\omega(x)$ , если  $\omega(x) = 0$  — нормальное уравнение  $\partial\Omega$ ? В каких точках она терпит разрыв?

2. Обобщить приведенные в данном параграфе результаты для дифференцируемых многообразий размерности  $(n-1)$  в  $\mathbb{R}^n$  (т. е. гиперповерхностей) на многообразия других размерностей.

3. Предложить общую формулу для констант  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) в алгоритме, описанном в п. 5 данного параграфа.

4. Показать, что из формулы (3.192) следует обычная формула Тейлора разложения функции  $f(x) \in C^m(\mathbb{R}^n)$ , в окрестности точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , если положить в формуле (3.192)  $\omega(x) = \|x - x^0\|$  и считать известными  $f(x^0)$ ,  $\frac{\partial^k f(x^0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  ( $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ ),  $k = 1, \dots, m$

### § 8. Пучки функций, удовлетворяющих дифференциальным и смешанным граничным условиям

В прикладной математике часто встречаются задачи, в которых необходимо рассматривать функции (вектор-функции, тензоры и т. п.), удовлетворяющие в точках некоторого чертежа условиям дифференциального характера. Так, например, в задачах теплопроводности краевое условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \quad (3.235)$$

где  $\varphi(x) = q(x) \lambda^{-1}$ ,  $\nu$  — нормаль к  $\partial\Omega$ , возникает тогда, когда на границе  $\partial\Omega$  тела задан тепловой поток  $q(x)$  ( $\lambda$  — коэффициент теплопроводности среды). Условие (3.235) в математической физике принято называть условием *второго рода*, или условием *Неймана*. (Напомним, что условием первого рода, или условием Дирихле, называется условие (3.5) или, в более общей постановке, условие (3.27), рассмотренные в § 1.) Условие Неймана (3.235) встречается не только в теплофизике, но и в других областях (электродинамике, гидродинамике и т. д.). В частности если тепловой поток на  $\partial\Omega$ ,  $\subset \subset \partial\Omega$  равен нулю, то условие (3.235) превращается в однородное условие Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad (3.236)$$

соответствующее теплоизоляции участка  $\partial\Omega_1$  границы  $\partial\Omega$ . (В электростатике условие (3.236) соответствует электроизоляции на  $\partial\Omega$ .)

Более общим, чем условие (3.235), является условие третьего рода

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu \right) \Big|_{\partial \Omega_1} = \varphi. \quad (3.237)$$

В теплофизике оно моделирует условие конвективного теплообмена на  $\partial \Omega_1$ . (В этом случае  $h = \alpha \lambda^{-1}$ ;  $\varphi = \alpha \lambda^{-1} u_0$ ,  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи,  $u_0$  — температура окружающей среды, а  $\nu$  — внутренняя нормаль.)

Встречаются и нелинейные краевые условия дифференциального типа. Одним из них, например, является условие Стефана — Больцмана

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega_1} = \varepsilon \sigma (u^4 - u_0^4), \quad (3.238)$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана,  $\varepsilon$  — степень черноты граничной поверхности, характеризующая ее излучательную способность,  $u$  — абсолютная температура окружающей среды [64].

В некоторых краевых задачах функция  $u$  удовлетворяет двум или большему числу краевых условий на одном и том же участке границы. Так, например, в задаче о поперечном изгибе пластины встречаются следующие типы краевых условий:

а) условия жесткого защемления по границе

$$u \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0; \quad (3.239)$$

б) условия свободного опирания

$$u \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (3.240)$$

где  $\tau$  — касательная к  $\partial \Omega$ ;

в) условия упругого опирания

$$u \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \left( \frac{1 - \nu_0}{\rho} + k_0 \right) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (3.241)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны границы  $\partial \Omega$ ,  $k_0$  — величина, характеризующая жесткость заделки пластинки;

г) условия на свободном крае

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (3.242)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u + (1 - \nu_0) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \nu \partial \tau^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \right] \right\} \Big|_{\partial \Omega} = 0.$$

При расчете оболочек встречаются краевые условия более высоких порядков. В большинстве прикладных задач встречаются так называемые смешанные краевые условия, в которых на различных участках границы заданы различные типы краевых условий. Например, если пластинка жестко защемлена по участку  $\partial \Omega_1$  границы  $\partial \Omega$ , а остальная часть границы  $\partial \Omega_2 = \partial \Omega \setminus \partial \Omega_1$  — свободно оперта, то на  $\partial \Omega_1$  заданы условия (3.239), а на  $\partial \Omega_2$  — условия (3.240).



*Замечание 1.* Даже в том случае, когда краевые условия имеют один и тот же тип, входящие в них функции (коэффициенты и правые части) могут быть заданы по-разному (различными формулами, таблицами) на различных участках границы. Так, если на участке  $\partial\Omega_1$  тепловой поток равен нулю, а на участке  $\partial\Omega_2$  — отличен от нуля, то получаем условие

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \begin{cases} 0, & x \in \partial\Omega_1; \\ \varphi, & x \in \partial\Omega_2. \end{cases} \quad (3.243)$$

Аналогичное явление может наблюдаться для величины  $h$  в краевом условии (3.237), для радиуса кривизны  $\rho$  в условиях (3.241), (3.242) и т. д. Во всех таких случаях можно осуществить склейку рассматриваемых величин (для функций, заданных в виде таблицы, предварительно надо построить аппроксимирующую формулу), применив оператор продолжения  $EC$ , описанный в § 1. Так, например, краевое условие (3.243) можно заменить условием  $\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = \varphi_1$ ,

$$\text{где } \varphi_1 = \frac{\frac{1}{\varphi} \frac{\omega_1}{\omega_2}}{\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}} = \varphi \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}; \quad \partial\Omega_i = (\omega_i = 0) \quad (i = 1, 2).$$

*Замечание 2.* Для продолжения кривизны  $k = 1/\rho$  в формулах (3.421), (3.242) внутрь области  $\Omega$  можно воспользоваться тем, что согласно формуле (3.106)  $S_2 = \frac{1}{\rho} D_1 + T_2$ . Если применим оператор  $S_2$  к нормализованной функции  $\omega$  ( $\partial\Omega = (\omega = 0)$ ), то получим

$$S_2\omega = \frac{1}{\rho} D_1\omega + T_2\omega \Big|_{\partial\Omega} = \frac{1}{\rho} + T_2\omega \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Отсюда

$$T_2\omega \Big|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{\rho}. \quad (3.244)$$

Таким образом, выражение

$$-T_2\omega = -\left[ \frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2\omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \frac{\partial\omega}{\partial x_2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \right)^2 \right], \quad (3.245)$$

имеющее смысл везде внутри  $\Omega$ , на границе  $\partial\Omega$  равняется кривизне  $k = \frac{1}{\rho}$ . (Конечно, для продолжения кривизны можно использовать и оператор  $EC$ , о котором говорится в § 1.)

**Пример 1.** Построим функцию, продолжающую внутрь области  $\Omega$  (рис. 101) кривизну  $k = 1/\rho$  ее границы  $\partial\Omega$ . Для построения уравнения  $\omega = 0$  границы  $\partial\Omega$  выберем опорные области:

$$\Omega_1 = \left[ \frac{1}{2R} (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \geq 0 \right] \quad (\text{круг радиуса } R \text{ с центром в начале координат});$$

$$\Omega_2 = \left[ \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2) \geq 0 \right] \quad (\text{вертикальная полоса между прямыми } x_1 = \pm a);$$

$$\Omega_3 = \left[ \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2) \geq 0 \right] \quad (\text{горизонтальная полоса между прямыми } x_2 = \pm b).$$

(Все неравенства предварительно нормализованы.)

Область  $\Omega$  может быть задана логической формулой

$$\Omega = \bar{\Omega}_1 \wedge (\Omega_2 \wedge \Omega_3).$$

Следовательно, нормализованное уравнение границы  $\partial\Omega$  можем написать в виде

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \frac{1}{2R} (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \wedge_0 \left[ \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2) \wedge_0 \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2) \right] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2R} (x_1^2 + x_2^2 - R^2) \wedge_0 \left[ \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2) \wedge_0 \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2) \right] = 0. \end{aligned}$$

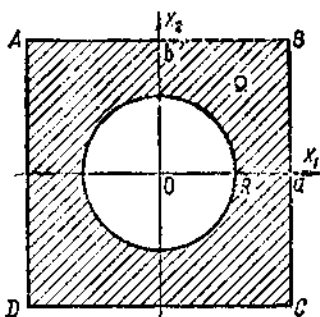


Рис. 101.

Напомним, что символ  $R$ -конъюнкции  $\wedge_0$  можно исключить согласно формуле  $x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$  и в результате функцию  $\omega(x_1, x_2)$  получить в виде обычной элементарной функции. Подставив эту функцию в формулу (3.245), получим согласно (3.244) элементарную функцию  $k(x_1, x_2)$ , которая на границе  $\partial\Omega$  совпадает с кривизной этой границы.

Другой путь, который в данном случае более просто приводит к решению поставленной задачи, состоит в использовании формул склейки, описанных в § 1. Пусть  $\partial\Omega_1$  есть внешний контур  $ABCD$  области  $\Omega$ , а  $\partial\Omega_2$  — окружность радиуса  $R$ . Тогда

$$\omega_1 = \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2) \wedge_0 \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2) = 0;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2R} (R^2 - x_1^2 - x_2^2) = 0.$$

Для искомой функции  $k(x_1, x_2)$  имеем такие условия на границе:

$$k(x_1, x_2)|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 0, & x \in \partial\Omega_1 \\ \frac{1}{R}, & x \in \partial\Omega_2. \end{cases}$$

По формуле склейки (3.8) получаем

$$\begin{aligned} k(x_1, x_2) &= \frac{\frac{1}{R\omega_2}}{\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}} = \frac{\omega_1}{R(\omega_1 + \omega_2)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2) \wedge_0 \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2)}{R \left[ \frac{1}{2R} (R^2 - x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2) \wedge_0 \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2) \right]}. \end{aligned}$$

*Замечание 3.* Приведенными выше типами краевых условий далеко не исчерпываются краевые условия, встречающиеся на практике. Есть ряд других более сложных типов краевых условий (например, условия для систем уравнений, условия в задачах с неизвестной заранее границей, интегро-дифференциальные условия и др.). Некоторые условия такого типа будут приведены в последующем при рассмотрении конкретных краевых задач.

*Замечание 4.* Краевые задачи для уравнений с частными производными, связанные с расчетом различного рода физико-механических полей, не единственный, хотя, пожалуй, и наиболее обширный класс задач, в которых необходимо учитывать информацию функционального или дифференциального характера на некоторых чертежах. Такого же рода задачи встречаются, например, при построении интерполяционных формул типа обобщенных формул Тейлора — Эрмита, рассмотренных в предыдущем параграфе и аналогичных известной формуле Эрмита, в которых информация о функции и ее производных задается не в отдельных точках, а на некоторых линиях, поверхностях или гиперповерхностях (в зависимости от размерности пространства). Такая информация может явиться следствием обработки экспериментальных данных в задачах, связанных с совместной переработкой аналитической и геометрической информации.

1. Рассмотрим вначале методику построения пучка функций, удовлетворяющих одному краевому условию.

Пусть на  $\partial\Omega = (\omega = 0)$  выполняется краевое условие

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} + \sum_{|\gamma| = k} a_\gamma^0 \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial \nu^{\gamma_0} (\partial \tau^1)^{\gamma_1} \dots (\partial \tau^{n-1})^{\gamma_{n-1}}} + F_1 \left( x, u, \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial \nu^{\gamma_0} (\partial \tau^1)^{\gamma_1} \dots (\partial \tau^{n-1})^{\gamma_{n-1}}} \right) = 0, \quad (3.246)$$

где  $|\gamma| = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1}$ ,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  — внутренняя нормаль к  $\partial\Omega$ ;  $\tau^i = (\tau_1^i, \dots, \tau_n^i)$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) — базис в касательном к  $\partial\Omega$  в точке  $x \in \partial\Omega$  пространстве  $T_x \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a_\gamma^0 = a_\gamma^0(x) \in C^1(\partial\Omega)$ ,  $F_1 \in C^1$  (в области изменения аргументов  $x, u, \dots$ ).

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} &= (\nu, \nabla)^k u = \left( \nu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \nu_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k u; \\ \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial \nu^{\gamma_0} (\partial \tau^1)^{\gamma_1} \dots (\partial \tau^{n-1})^{\gamma_{n-1}}} &= (\nu, \nabla)^{\gamma_0} (\tau^1, \nabla)^{\gamma_1} \dots (\tau^{n-1}, \nabla)^{\gamma_{n-1}} u = \\ &= \left( \nu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \nu_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\gamma_0} \left( \tau_1^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \tau_n^1 \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\gamma_1} \dots \\ &\dots \left( \tau_1^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \tau_n^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\gamma_{n-1}} u, \end{aligned} \quad (3.247)$$

условие (3.246) преобразуем к виду

$$\left[ \sum_{|\alpha|=k} B_{\alpha}^0 D^{\alpha} u + F_1(x, u, D^{\alpha} u) \right] \Big|_{\partial\Omega} = 0; \quad (3.248)$$

$$(\forall \alpha, |\alpha| < k)$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $D^{\alpha} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ .

Покажем, что при этом выполняется равенство

$$\sum_{|\alpha|=k} b_{\alpha}^0 v^{\alpha} = 1 \quad (v^{\alpha} = v_1^{\alpha_1} \dots v_n^{\alpha_n}). \quad (3.249)$$

Действительно, формулу (3.248) можно получить, подставляя (3.247) в (3.246) и группируя члены, содержащие одинаковые производные  $D^{\alpha} u$ . Замена в выражении  $\sum_{|\alpha|=k} b_{\alpha}^0 D^{\alpha} u$  производных  $D^{\alpha} u$  величинами

$v^{\alpha} = v_1^{\alpha_1} \dots v_n^{\alpha_n}$ , в результате которой получается левая часть формулы (3.249), равнозначна замене вектора  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$  вектором  $v = (v_1, \dots, v_n)$ . Но из (3.247) следует, что при такой замене вследствие того, что  $(v, v) = 1$ ,  $(v, \tau^i) = 0$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ), производная  $\frac{\partial^k u}{\partial v^k}$  заменится единицей, а выражение

$$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial v^{\alpha_1} (\partial \tau^1)^{\alpha_2} \dots (\partial \tau^{n-1})^{\alpha_{n-1}}}$$

заменится нулем. В результате получим формулу (3.249).

Пусть  $b_{\alpha} = EC b_{\alpha}^0$ ,  $F(x, u, D^{\alpha} u) = ECF_1(x, u, D^{\alpha} u)$ , где  $EC$  — оператор продолжения граничных значений в  $\Omega$  (см. § 1). Тогда выражение

$$\sum_{|\alpha|=k} b_{\alpha} D^{\alpha} u + F(x, u, D^{\alpha} u) \quad (|\alpha| < k) \quad (3.250)$$

определено везде в области  $\Omega$ , а на  $\partial\Omega$  согласно (3.248) равняется нулю. Поэтому его можно рассматривать как элемент некоторого пучка  $\omega\Psi$  функций, равных нулю на  $\partial\Omega$ , т. е.

$$\sum_{|\alpha|=k} b_{\alpha} D^{\alpha} u + F(x, u, D^{\alpha} u) = \omega\Psi. \quad (3.251)$$

Формула (3.251) представляет собой продолжение граничного условия (3.248) внутрь  $\Omega$ .

Для построения пучка функций, удовлетворяющих условию (3.248), положим

$$u = \Phi_1 + \omega^k \Psi_1, \quad (3.252)$$

где  $\omega = 0$ ,  $\omega \in C^{k+1}(\Omega \cup \partial\Omega)$  — нормализованное уравнение  $\partial\Omega$ , а  $\Phi_1, \Psi_1 \in C^{k+1}(\Omega \cup \partial\Omega)$ . Учитывая, что

$$D^{\alpha}(\omega^k \Psi_1) = k! \Psi_1 \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} + O(\omega);$$

$$\begin{aligned}
 F[x, \Phi_1 + \omega^k \Psi_1, D^\alpha \Phi_1 + D^\alpha (\omega^k \Psi_1)] &= & (3.253) \\
 = F[x, \Phi_1 + O(\omega^k), D^\alpha \Phi_1 + O(\omega^{k-|\alpha|})] &= \\
 = F(x, \Phi_1, D^\alpha \Phi_1) + O(\omega) & \quad (|\alpha| < k)
 \end{aligned}$$

и включая слагаемые порядка  $O(\omega)$  в правую часть формулы (3.251), последнюю преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
 \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha D^\alpha \Phi_1 + k! \Psi_1 \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} + \\
 + F(x, \Phi_1, D^\alpha \Phi_1)_{(|\alpha| < k)} = \omega \Psi_2, & \quad (3.254)
 \end{aligned}$$

где  $\Psi_2$  — новая неопределенная функция. Так как  $\left( \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) \Big|_{\partial \Omega} = v_i$ , вторая сумма в формуле (3.254) согласно (3.249) равна единице на  $\partial \Omega$ . Поэтому

$$\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} = 1 + O(\omega). \quad (3.255)$$

Включая слагаемое  $O(\omega)$  в выражение  $\omega \Psi_2$ , формулу (3.254) перепишем в виде

$$\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha D^\alpha \Phi_1 + k! \Psi_1 + F(x, \Phi_1, D^\alpha \Phi_1)_{(|\alpha| < k)} = \omega \Phi_2, \quad (3.256)$$

где  $\Phi_2$  — новая неопределенная функция. Отсюда

$$\Psi_1 = \frac{1}{k!} \left[ \omega \Phi_2 - \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha D^\alpha \Phi_1 - F(x, \Phi_1, D^\alpha \Phi_1)_{(|\alpha| < k)} \right]. \quad (3.257)$$

Подставляя формулу (3.257) в (3.252), получаем

$$u = \Phi_1 + \frac{\omega^k}{k!} \left[ \omega \Phi_2 - \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha D^\alpha \Phi_1 - F(x, \Phi_1, D^\alpha \Phi_1)_{(|\alpha| < k)} \right]. \quad (3.258)$$

Формула (3.258) определяет пучок функций, удовлетворяющих на  $\partial \Omega$  условию (3.248). Неопределенной компонентой пучка является  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ .

2. Пусть на  $\partial \Omega$  задана система условий вида (3.248)

$$B_i^0 u \equiv \left\{ \sum_{|\alpha|=k_i} b_\alpha^0 D^\alpha u + F_{i1}(x, u, D^\alpha u) \right\} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (3.259)$$

где  $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ , и для каждого  $k_i$  выполняется условие (3.249). (Такую нормировку краевых условий всегда можно произвести.) Как и ранее, обозначим  $b_{\alpha i}^0 = E C b_{\alpha i}^0$ ,  $F_i = E C F_{i1}$ ,  $B_i = E C B_i^0$ . Для пучка функций, удовлетворяющих  $i$ -му условию, согласно (3.258) получаем

$$\begin{aligned}
 u = \Phi_{i1} + \frac{1}{k_i!} \omega^{k_i+1} \Phi_{2i} - \frac{1}{k_i!} B_i(\Phi_{1i}) = \\
 = W[\Phi_{1i}, \Phi_{2i}, B_i(\Phi_{1i})]. & \quad (3.260)
 \end{aligned}$$

Построение пучка, удовлетворяющего всем условиям, в принципе можно выполнить следующим образом. Вначале строим пучок функций

$$u = W_m [\Phi_{1m}, \Phi_{2m}, B_m (\Phi_{1m})],$$

соответствующий краевому условию наивысшего порядка  $k_m$ . При подстановке этой формулы в  $(m+1)$ -е условие слагаемые, содержащие множитель  $\omega^{k_m}$ , обратятся на  $\partial\Omega$  в нуль. Поэтому достаточно выбрать первое слагаемое  $\Phi_{1m}$  так, чтобы оно удовлетворяло рассматриваемому условию. Для этого его можно взять в виде пучка функций

$$\Phi_{1m} = W_{m-1} [\Phi_{1,m-1}, \Phi_{2,m-1}, B_{m-1} (\Phi_{1,m-1})].$$

Таким образом, условия порядка  $k_m$  и  $k_{m-1}$  будут выполняться, если положить

$$u = W_m \{ W_{m-1} [\Phi_{1,m-1}, \Phi_{2,m-1}, B_{m-1} (\Phi_{1,m-1})]; \\ \Phi_{2m}, B_m [W_{m-1} (\Phi_{1,m-1}, \Phi_{2,m-1}, B_{m-1} (\Phi_{1,m-1}))] \}. \quad (3.261)$$

Аналогично можем удовлетворить следующему краевому условию, если подставим в (3.261) вместо компоненты  $\Phi_{1,m-1}$  выражение

$$W_{m-2} [\Phi_{1,m-2}, \Phi_{2,m-2}, B_{m-2} (\Phi_{1,m-2})],$$

и т. д.

Описанный путь построения пучка, удовлетворяющего условиям (3.259), обуславливает для этого случая равенство наибольшего порядка дифференцирования неопределенных компонент сумме порядков операторов  $B_i$ . Это в конечном итоге приводит к плохим аппроксимационным свойствам пучка [127]. Однако фактически указанный порядок можно понизить. Для этого нужно учесть, что в формулах (3.260) возле членов  $B_i$ , содержащих производные наивысших порядков, стоят множители  $\omega^{k_i}$  и при  $q$ -кратном дифференцировании произведения вида  $\omega^k P$  все производные от  $P$  порядка выше  $q - k$  имеют множитель  $\omega^p$  ( $p \geq 1$ ) и соответствующие им слагаемые на границе  $\partial\Omega$  равны нулю. Если в формуле, полученной по описанной выше методике, опустим все такие слагаемые, то получим формулу для пучка функций с более низким наибольшим порядком дифференцирования [53, 54]. В дальнейшем описанный общий подход будет применен при рассмотрении конкретных задач.

3. Пусть  $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{i=s} \partial\Omega_i$ , где  $\partial\Omega_i$  не имеют общих внутренних точек:  $\text{int } \partial\Omega_i \cap \text{int } \partial\Omega_j = \emptyset, \forall i \neq j$ , и на каждом из  $\partial\Omega_i$  задана своя система граничных условий вида (3.259).

Предположим, что

$$u = Q_i (\Phi^i); \quad \Phi^i = (\Phi_1^i, \dots, \Phi_{m_i}^i)$$

есть пучок, удовлетворяющий всем условиям на  $\partial\Omega_i$ , старшая степень которых равна  $k_i$ . Тогда согласно (3.11) и (3.12), если исполь-

звать формулу

$$u = \frac{Q_1(\Phi^1) \tau_1^{k_1+1} + \dots + Q_s(\Phi^s) \tau_s^{k_s+1}}{\tau_1^{k_1+1} + \dots + \tau_s^{k_s+1}}, \quad (3.262)$$

то при любом выборе  $\Phi^1, \dots, \Phi^s$  (в соответствующих допустимых для каждой неопределенной компоненты множествах) все краевые условия будут удовлетворены.

Описанный подход построения пучка функций, удовлетворяющих смешанным граничным условиям, не является единственно возможным. Неудобство этого подхода состоит в том, что с ростом числа участков увеличивается количество неопределенных компонент, а это создает определенные неудобства при использовании пучков на практике. (Об этом речь будет идти ниже, при рассмотрении конкретных прикладных задач.) В некоторых частных ситуациях (см., например, § 11) возможны другие, более экономичные решения.

*Замечание 5.* В § 5 показано, что вместо операторов  $D_k$  и  $T_k$  можно использовать их разностные аналоги (3.122). Это обстоятельство позволяет строить пучки разностного типа для различных вариантов краевых условий. Примеры построения таких пучков будут приведены в дальнейшем.

*Замечание 6.* Выше мы ограничились рассмотрением пучков вида  $u = B(\Phi)$ , где  $u$  есть функция. При решении краевых задач для систем дифференциальных уравнений (например, уравнений Ламе в теории упругости или уравнений Максвелла в электродинамике) приходится рассматривать краевые условия для вектор-функций, тензоров или элементов других пространств. Основная идея описанного выше подхода применима и в этих ситуациях, хотя, конечно, математические выкладки становятся более громоздкими и, кроме того, более сложно решаются вопросы полноты пучков [52, 128]. Этот подход будет показан в последующих главах на примерах из области теории упругости.

*Упражнения и задачи.* 1. Построить пучки функций для краевых условий (3.238), (3.241) и (3.242).

2. Пластика на одном участке жестко закреплена, на другом свободно оперта, а третий участок границы свободен. Построить пучок функций, удовлетворяющих всем трем условиям.

3. Для построенных выше пучков функций исследовать вопрос их полноты в пространствах  $\mathfrak{M} \cap C^1(\Omega)$ ;  $\mathfrak{M} \cap H^1(\Omega)$ , где  $\mathfrak{M}$  — множество всех функций, удовлетворяющих рассматриваемым краевым условиям.

## § 9. Краевая задача и структура ее решения

Создание эффективных методов исследования и расчета физико-механических полей (температурных, силовых, деформационных, электродинамических, гидродинамических и др.) — одна из важнейших и в то же время наиболее трудных задач прикладной математики.

С математической точки зрения задача расчета поля относится к числу краевых задач для уравнений с частными производными и обычно сводится к поиску в некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  решения уравнения

$$Au = f, \quad (3.263)$$

где  $A : X(\Omega) \rightarrow Y(\Omega)$ ,  $X(\Omega)$ ,  $Y(\Omega)$  — некоторые функциональные пространства, с краевыми условиями

$$L_i u = \varphi_i \quad \text{на } \partial\Omega_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.264)$$

( $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_m$  — покрытие границы  $\partial\Omega$ ). При этом участки  $\partial\Omega_i$  не обязательно все разные и могут совпадать с  $\partial\Omega$ . Такая постановка краевой задачи называется классической. Возможны и другие, обобщенные постановки краевых задач, например, когда равенства в формулах (3.263) и (3.264) понимаются в том или ином обобщенном смысле или вместо решения уравнения (3.263) минимизируется некоторый функционал [88]. (Подробнее об этом речь будет идти при рассмотрении различных конкретных типов краевых задач.)

К числу краевых задач относятся и так называемые задачи на собственные значения, в которых необходимо находить отличные от нуля решения уравнения вида

$$Au + \lambda Bu = 0, \quad (3.265)$$

удовлетворяющие однородным краевым условиям

$$L_i u = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.266)$$

В некоторых случаях параметр  $\lambda$  может входить в краевые условия [181].

В зависимости от характера рассматриваемого поля при решении соответствующей ему краевой задачи отыскиваются функция, вектор-функция, тензор и т. д. Однако для простоты в дальнейшем будем употреблять термин «функция». Все введенные ниже понятия без труда распространяются и на другие случаи.

Приведенные в постановке краевой задачи функции  $u$ ,  $f$ ,  $\varphi$  и операторы  $A$ ,  $L_i$  назовем *аналитическими компонентами* краевой задачи, а область  $\Omega$ , ее границу  $\partial\Omega$ , участки  $\partial\Omega_i$  — *геометрическими компонентами*.

Метод  $R$ -функций (называемый часто структурным), который излагается в данной работе, указывает пути учета геометрической информации на аналитическом уровне без какой-либо ее аппроксимации. Для достижения этой цели будет использован тот конструктивный аппарат, который описан в предыдущих параграфах.

Пусть  $X(\Omega)$  — область определения оператора  $A$ , входящего в уравнение (3.263), а

$$L_k u = \varphi_k \quad (k = 1, \dots, q) \quad (3.267)$$

некоторые из равенств (3.263), (3.264) (т. е. в (3.267) может входить и уравнение  $Au = f$ ).

**Определение 1.** Формула  $u = B(\varphi)$ , где  $\varphi$  — элемент некоторого множества  $\mathfrak{M}$ , а  $B : \mathfrak{M} \rightarrow X(\Omega)$ , называется *структурой решения, учитывающей условия* (3.267) и *определенной на  $\mathfrak{M}$ , если*



для всех  $\Phi \in \mathfrak{M}$

$$L_k B(\Phi) = \varphi_k \quad (k = 1, \dots, q). \quad (3.268)$$

Структура, учитывающая все краевые условия (3.264), называется *общей структурой*. Если удовлетворяется лишь уравнение (3.263), то  $u = B(\Phi)$  называется *общим решением* (3.263). Если удовлетворяется лишь часть условий (3.267), то структура называется *частичной*. Очевидно, что всем условиям (3.267) удовлетворяет точное решение задачи.

*Замечание 1.* Удовлетворение условиям (3.267) иногда понимается в том или ином обобщенном смысле (по стремящейся к нулю норме или метрике некоторого пространства и т. п.). В этом случае будем говорить об *обобщенных структурах*.

Нетрудно заметить, что структура решения, учитывающая те или иные краевые условия, определяет пучок функций, удовлетворяющих этим условиям. Таким образом, для построения структур решения можно воспользоваться методами, изложенными в предыдущих параграфах.

Структура  $u = B(\Phi)$ ,  $\Phi$  принадлежит  $\mathfrak{M}$ , определяет некоторое множество  $D_B \subset X(\Omega)$ ,  $D_B = \{u : u = B(\Phi) \forall \Phi \in \mathfrak{M}\}$ . Однако может оказаться, что искомое решение  $u_0$  краевой задачи не содержится в  $D_B$ . В этом случае структуру  $u = B(\Phi)$  будем называть *неполной*. Если  $u_0 \in D_B$ , то структура  $u = B(\Phi)$  называется *полной* (в классическом смысле). Во многих случаях не существует классического решения краевой задачи, а если оно и существует, то неизвестны или трудно реализуемы методы его получения. Поэтому часто речь идет о приближенных методах решения (в том или ином смысле).

*Определение 2.* Структура  $u = B(\Phi)$ ,  $\Phi \in \mathfrak{M}$ , называется *полной в смысле метрики  $\rho(u, v)$  (или по норме  $\|\cdot\|_A$ )*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Phi_\varepsilon \in \mathfrak{M}, \rho[u_0, B(\Phi_\varepsilon)] < \varepsilon \quad (3.269)$$

(или  $\|u_0 - B(\Phi_\varepsilon)\|_A < \varepsilon$ ),

где  $u_0$  — классическое (или обобщенное) решение задачи.

*Замечание 2.* Данное выше определение 1 структуры решения краевой задачи является несколько более общим, чем определение, приведенное в работах [110, 118]. Именно благодаря этому теперь можно рассматривать всякое общее решение уравнения (3.263) как структуру, учитывающую это уравнение, независимо от того, удовлетворяются при этом какие-нибудь краевые условия или нет.

*Пример 1.* Известное интегральное представление гармонической в  $\mathbb{R}^n$  функции

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial \Phi_1(\xi)}{\partial \nu} - \Phi_2(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{n-2}} \right) d\xi \Gamma, \quad (3.270)$$

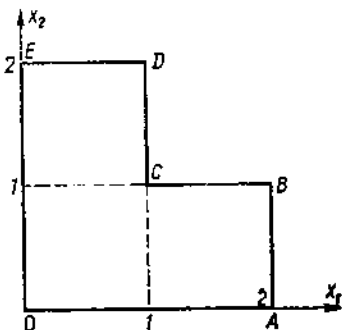


Рис. 102.

где  $\Phi_1 = u(\xi)$ ;  $\Phi_2 = \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu}$ , а  $|S_1|$  — площадь поверхности сферы единичного радиуса в  $\mathbb{R}^n$ , может рассматриваться как структура решения краевой задачи любого типа для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0, \quad (3.271)$$

учитывающая это уравнение. Неопределенной компонентой этой структуры является  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2); \Gamma^0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Пример 2.** Рассмотрим краевую задачу в области  $OABCDEO$  (рис. 102) для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 1 \quad (3.272)$$

со смешанными краевыми условиями

$$u = 0, \quad x \in (OE) \cup (AB); \quad (3.273)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x_1}{2}, & x \in OA; \\ \frac{\pi}{2} e^{-\pi} \sin \frac{\pi x_1}{2}, & x \in DE; \\ \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi x_1}{2}, & x \in BC; \\ -\frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi x_2}{2}}, & x \in CD. \end{cases} \quad (3.274)$$

Функция

$$u = \sum_{k=1}^N C_k e^{-\frac{k\pi x_2}{2}} \sin \frac{k\pi x_1}{2} + \frac{1}{2} x_1 (x_1 - 2) \quad (3.275)$$

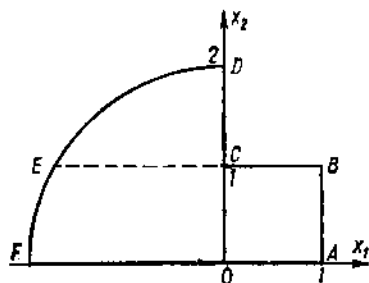


Рис. 103.

при любом выборе вектора  $\Phi = (C_1, \dots, C_N)$  удовлетворяет уравнению (3.272) и краевому условию (3.273). Таким образом, это частичная структура с неопределенной компонентой  $\Phi$ . На первый взгляд эта структура неполная, так как имеется свобода выбора лишь  $N$  неопределенных констант. Однако конкретные краевые условия (3.274) таковы, что при  $C_1 = 1; C_2 = 0, \dots, C_N = 0$  они удовлетворяются. А так как остальным краевым условиям (3.273) и уравнению (3.272) формула (3.275) удовлетворяет независимо от выбора вектора  $\Phi = (C_1, \dots, C_N)$ , при указанных

значениях  $C_i$  все условия задачи удовлетворяются и из (3.275) получаем точное решение

$$u = e^{-\frac{\pi x_2}{2}} \sin \frac{\pi x_1}{2} + \frac{1}{2} x_1 (x_1 - 2). \quad (3.276)$$

Заметим, что для других правых частей в (3.274) структура (3.275) может оказаться неполной. Неопределенной компонентой этой структуры является вектор  $\Phi = (C_0, C_1, \dots, C_m)$ .

**Пример 3.** Рассмотрим краевую задачу для двумерного эллиптического уравнения второго порядка в области  $\Omega$  (рис. 103) с краевыми условиями

$$u = \begin{cases} 4, & x \in DEF; \\ x_2^2, & x \in DC; \\ 1 + x_1^2, & x \in CB; \\ 1 + x_2^2, & x \in AB; \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{AF} = 0. \quad (3.277)$$

Структурами, учитывающими условия (3.277), являются

$$u = (4 - x_1^2 - x_2^2)(1 - x_1)(x_1 \wedge_0(x_2^2 - 1)) \Phi(x_1, x_2^2) + x_1^2 + x_2^2, \quad (3.278)$$

$$u = (4 - x_1^2 - x_2^2)(1 - x_1)x_1(x_2^2 - 1) \Phi(x_1, x_2^2) + x_1^2 + x_2^2. \quad (3.279)$$

Легко проверить, что при любом выборе  $\Phi \in C^1(\Omega \cup \partial\Omega)$  функции (3.278) и (3.279) удовлетворяют условиям (3.277). Нетрудно также убедиться в том, что вторая из формул не обладает, вообще, свойством полноты. Действительно, множитель при  $\Phi(x_1, x_2^2)$  обращается в нуль не только на границе области, но и на отрезках  $CO$  и  $CE$  внутри области. Поэтому  $u = x_2^2$  на  $CO$  и  $u = 1 + x_1^2$  на  $CE$  независимо от выбора  $\Phi$ . Точное решение на этих отрезках может иметь другой характер.

В отличие от сказанного, формула (3.278) имеет множитель перед  $\Phi$ , не обращающийся в нуль внутри  $\Omega$  (это легко проверить). Поэтому, какое бы значение внутри области ни принимало точное решение  $u_0$ , всегда найдется такая функция  $\Phi_0$ , что внутри  $\Omega$  будет выполняться тождество

$$u_0 \equiv (4 - x_1^2 - x_2^2)(1 - x_1)(x_1 \wedge_0(x_2^2 - 1)) \Phi_0(x_1, x_2^2) + x_1^2 + x_2^2. \quad (3.280)$$

**Пример 4.** Рассмотрим краевую задачу третьего рода для двумерного уравнения Лапласа с краевым условием

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \nu} + u \right) \Big|_{\partial\Omega} = x_1^2, \quad (3.281)$$

где  $\partial\Omega$  — окружность (рис. 104), определяемая уравнением  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ . Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что при любом выборе пары функций  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ ,  $(\Phi_1, \Phi_2) \in C^2(\Omega \cup \partial\Omega) \times C^1(\Omega \cup \partial\Omega)$ , функция

$$u = \frac{1}{4} \left[ 2(1 + x_1^2 + x_2^2) \Phi_1 + 2(1 - x_1^2 - x_2^2) \left( x_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \right) + 2x_1^2(1 - x_1^2 - x_2^2) + (1 - x_2^2 - x_2^2)^2 \Phi_2 \right] \quad (3.282)$$

удовлетворяет краевому условию (3.281) и, следовательно, является структурой, учитывающей это условие.

Нетрудно заметить, что на  $\partial\Omega$  выполняется условие  $u|_{\partial\Omega} = \Phi_1|_{\partial\Omega}$ . Это означает, что надлежащим выбором функции  $\Phi_1$  можно получить, используя формулу (3.282), значения  $u$ , совпадающие со значениями точного решения краевой задачи. Внутри области, как бы ни была выбрана до этого функция  $\Phi_1$ , отличен от нуля множитель при  $\Phi_2$  и, следовательно, можно выбрать  $\Phi_2$  так, что (3.282) будет равняться  $u_0$  и внутри области. Следовательно, формула (3.282) также обладает свойством полноты.

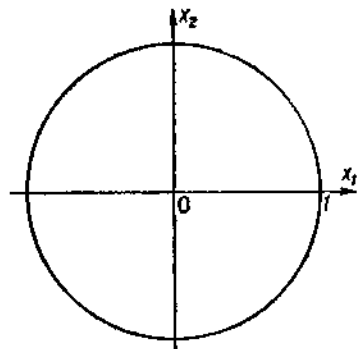


Рис. 104.

**Замечание 3.** Приведенные выше рассуждения о полноте структур (3.278) и (3.282) имеют лишь описательный характер и, вообще, должны быть переведены на строгий математический язык. Решение этого вопроса потребует от нас привлечения дополнительных понятий.

Легко показать, что для одной и той же краевой задачи можно, вообще, строить различные структуры, обладающие свойством полноты. Например, в краевой задаче, рассмотренной в примере 4, можно в качестве неопределенной компоненты взять неизвестное значение  $\Phi(\theta)$  точного решения  $u_0(x_1, x_2)$  на границе:

$$u(\cos \theta, \sin \theta) = \Phi(\theta).$$

Тогда полная структура для этой краевой задачи может быть представлена в виде известной формулы Пуассона [44]:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - \theta)} \Phi(\theta) d\theta, \quad (3.283)$$

где  $(\rho, \varphi)$  — полярные координаты точки  $x = (x_1, x_2)$ .

Сравнение структур (3.282) и (3.283) показывает, что области определения неопределенных компонент их различны. В формуле (3.282) неизвестной является функция двух переменных  $\Phi(x_1, x_2)$  внутри и на границе круга  $\Omega$ , а в формуле (3.283) — функция  $\Phi(\theta)$  одного аргумента и только лишь на границе этого круга. Кроме того, структура (3.282) удовлетворяет краевому условию (3.281), а неопределенная компонента должна выбираться из условия удовлетворения (в том или ином смысле) уравнению Лапласа. Наоборот, структура (3.283) удовлетворяет уравнению Лапласа при любом выборе функции  $\Phi(\theta)$ , которую необходимо выбрать из краевого условия (3.281) (эта задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода).

Пусть  $u = B_i(\Phi_i)$ ,  $\Phi_i \in \mathfrak{M}_i$  ( $i = 1, 2$ ), — полные (или полные в определенном смысле) структуры, учитывающие некоторую систему условий. Тогда, если  $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$ ,  $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$ , структуру  $u = B_1(\Phi_1)$  будем называть *структурой лучшего качества*, чем  $u = B_2(\Phi_2)$ . Чем лучше качество структуры, тем уже множество  $\mathfrak{M}$ , в котором следует искать неопределенную компоненту  $\Phi$ , соответствующую точному решению задачи или достаточно хорошему его приближению.

**Пример 5.** Структура (3.283) лучшего качества, чем структура (3.282).

**Замечание 4.** Введенное понятие качества структуры имеет весьма ограниченное значение, так как не затрагивает важных вычислительных аспектов, связанных с использованием структур. Например, структура лучшего качества может оказаться более громоздкой, требовать большего числа вычислительных операций, затрат машинного времени и т. п.

Пусть  $u = B_i(\Phi^i)$  ( $i = 1, 2$ ) — две структуры, соответствующие одной и той же краевой задаче. Здесь  $\Phi^i = (\Phi_1^i, \dots, \Phi_{m_i}^i) \in \mathfrak{M}^i =$

$= \mathfrak{M}_1^t \times \dots \times \mathfrak{M}_{m_i}^t (i = 1, 2)$ ,  $\mathfrak{M}_i^t$  — некоторые функциональные метрические пространства. Будем считать, что структура  $u = B_2(\Phi^2)$  подчинена (в смысле метрики  $\rho$  на  $X(\Omega)$ ) структуре  $u = B_1(\Phi^1)$ , если для всякой неопределенной компоненты  $\Phi^2 \in \mathfrak{M}^2$  существует такая компонента  $\Phi^1 \in \mathfrak{M}^1$ , что  $B_1(\Phi^1) \equiv B_2(\Phi^2)$  (или для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такая компонента  $\Phi_1$ , что  $\rho[B_1(\Phi^1), B_2(\Phi^2)] < \varepsilon$ ).

**Определение 3.** Если структура  $B_1(\Phi^1)$  подчинена структуре  $B_2(\Phi^2)$ , а структура  $B_2(\Phi^2)$  подчинена структуре  $B_1(\Phi^1)$ , то структуры  $u = B_1(\Phi^1)$  и  $u = B_2(\Phi^2)$  называются эквивалентными.

*Упражнения и задачи.* 1. Показать, что формулы

$$\begin{aligned} u(x) &= \Phi_1(x) - \omega(x) D_1 \Phi_1(x) + \omega^2(x) \Phi_2(x); \\ u(x) &= \Phi(x - \omega(x) \nabla \omega(x)), \end{aligned} \quad (3.284)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ;  $\Phi(x)$  — неопределенная компонента,  $\omega = 0$  — нормализованное уравнение  $\partial\Omega$ , являются структурами, учитывающими на  $\partial\Omega$  краевое условие  $\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = 0$ . Показать, что вторая из этих структур — структура лучшего качества.

2. Сформулировать условия, при которых структуры (3.284) эквивалентны.

### § 10. Структуры решений основных типов краевых задач для уравнений второго порядка

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (3.285)$$

где  $A = \{a_{ij}\}$  — симметричная матрица. Как известно [179] характеристические числа матрицы  $A$  вещественны. Уравнение (3.285) называется *эллиптическим* в области  $\Omega$ , если во всех точках  $\Omega$  характеристические числа матрицы  $A$  имеют один и тот же знак. Основными типами краевых условий для уравнения (3.285) являются следующие.

**1. Задача Дирихле.** Краевое условие на  $\partial\Omega$  имеет вид

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi_0, \quad (3.286)$$

где  $\varphi_0: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{R}^n$ , если  $u$  — вектор-функция). Функция  $\varphi_0$  может быть задана лишь на границе  $\partial\Omega$  и иметь на различных участках  $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$  различные аналитические выражения  $\varphi_i$ :

$$u = \begin{cases} \varphi_1, & x \in \partial\Omega_1; \\ \dots & \dots \\ \varphi_m, & x \in \partial\Omega_m. \end{cases} \quad (3.287)$$

Будем предполагать, что  $\varphi_i \in \mathfrak{M}(H)$  — некоторые  $H$ -реализуемые функции. (На практике чаще всего  $H = H_e$ , т. е.  $\mathfrak{M}(H)$  — множество элементарных функций.)

Эти граничные значения можно продолжить внутрь области и склечь с помощью оператора  $ES$ , описанного в § 1. (Для этого оператора в § 1 приведены различные варианты формул.) Пусть  $ES\varphi_0 = \varphi$ . Тогда, как показано Л. В. Канторовичем [44], решение краевой задачи можно искать в виде

$$u = \varphi + \omega\Phi, \quad (3.288)$$

где  $\omega = 0$  на  $\partial\Omega$  и  $\omega > 0$  внутри  $\Omega$ . (Обычно предполагается также, что  $|\nabla\omega| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ .)

**2. Задача Неймана.** Краевое условие для этой задачи имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \varphi_0 \quad (3.289)$$

( $\nu$  — нормаль к  $\partial\Omega$ ). (Случай, когда  $\partial\Omega$  имеет точки, в которых направление  $\nu$  не определено, требует специального рассмотрения.) Пусть, как и в предыдущем пункте,  $ES\varphi_0 = \varphi$ . Это позволяет условие (3.289) переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}. \quad (3.290)$$

Условие (3.290) есть частный случай условия (3.246), рассмотренного в § 8, который получается из последнего при  $a_y^0 = 0$ ,  $k = 1$ ,  $F_1 = -\varphi_0$ .

Преобразуя рассматриваемое условие Неймана к виду (3.251), получим

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial\omega}{\partial x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} = \varphi(x) + \omega(x)\Psi(x)$$

или

$$D_1 u = \varphi(x) + \omega(x)\Psi(x). \quad (3.291)$$

Согласно (3.258) соответствующую структуру получаем в виде

$$u = \Phi_1 + \omega(\omega\Phi_2 - D_1\Phi_1 + \varphi),$$

или

$$u = \Phi_1 - \omega \sum_{k=1}^n \frac{\partial\omega}{\partial x_k} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_k} + \omega^2\Phi_2 + \omega\varphi. \quad (3.292)$$

Из формулы (3.292) видно, что на границе области выполняется условие

$$u|_{\partial\Omega} = \Phi_1|_{\partial\Omega}, \quad (3.293)$$

т. е. путем надлежащего выбора функции  $\Phi_1$  можно обеспечить равенство  $\Phi_1|_{\partial\Omega} = u_0|_{\partial\Omega}$ , где  $u_0$  — точное (неизвестное заранее) решение, или добиться близости  $\Phi_1$  к  $u_0$  в некотором приближенном смысле. Если допустить, что функция  $\Phi_1$  некоторым образом выбрана в  $\Omega \cup \partial\Omega$ , то выбором  $\Phi_2$  можно и внутри области

обеспечить равенство значений (3.292) со значениями точного решения. Эти простые рассуждения (их можно оформить надлежащим образом, введя ограничения на классы рассматриваемых функций) свидетельствуют о том, что структура (3.292) полная.

*Замечание 1.* Формулу (3.292) можно получить непосредственно из (3.291), повторив рассуждения § 8, которые в данном случае становятся особенно простыми. А именно найдем решение в виде

$$u = \Phi_1 + \omega \Psi_1. \quad (3.294)$$

Подставляя (3.294) в (3.291), получаем

$$D_1 \Phi_1 + \Psi_1 D_1 \omega + \omega D_1 \Psi_1 = \varphi + \omega \Psi. \quad (3.295)$$

Учитывая, что  $D_1 \omega = 1 + O(\omega) = 1 + \omega \chi$ , и включая слагаемые левой части (3.295), содержащие множитель  $\omega$ , в член  $\omega \Psi$ , получаем

$$D \Phi_1 + \Psi_1 = \varphi + \omega \Phi_2, \quad (3.296)$$

где  $\Phi_2 = \Psi - \chi \Psi_1 - \omega D_1 \Psi_1$  — новая неопределенная функция. Отсюда

$$\Psi_1 = -D_1 \Phi_1 + \varphi + \omega \Phi_2. \quad (3.297)$$

Подставляя  $\Psi_1$  из (3.297) в (3.294), приходим к структуре (3.292).

Применим для получения структуры решения задачи Неймана обобщенную формулу Тейлора (3.192). Положим в этой формуле  $m = 1$ :

$$u(x) = f_0^*(x) + f_1^*(x) \omega(x) + O(\omega^2). \quad (3.298)$$

В формуле (3.298) согласно краевому условию (3.289) можно положить  $f_1^*(x) = \varphi(x)$ . Кроме того, обозначим  $f_0^*(x) = \Phi(x)$ ,  $O(\omega^2) = \omega^2 \Phi(x)$ . Тогда по формуле (3.192) получим

$$\begin{aligned} u(x) &= \Phi_1^*(x) + \varphi^*(x) \omega(x) + \omega^2(x) \Phi_2(x) = \\ &= \Phi_1(x - \omega \nabla \omega) + \varphi(x - \omega \nabla \omega) \omega(x) + \omega^2(x) \Phi_2(x). \end{aligned} \quad (3.299)$$

Напомним, что в данном случае функция  $\omega(x)$  должна быть нормализована на  $\partial \Omega$  до первого порядка. Формула (3.299) представляет собой второй вариант решения задачи Неймана. Здесь, как и в формуле (3.292), неопределенной компонентой является пара функций  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ , однако в отличие от (3.292) в формуле (3.299) к неопределенной компоненте  $\Phi_1$  дифференцирование не применяется. Это означает, что в последнем случае множество  $\mathfrak{M}_1$ , которое пробегает неопределенная компонента  $\Phi_1$ , можно взять более широким, чем для этой же компоненты в формуле (3.292).

Еще один вариант структуры решения задачи Неймана получаем, используя разностное представление нормализанты (3.204) функций  $\Phi_1$  и  $\varphi$ :

$$\Phi_1^{(*1)}(x) = \Phi_1(x + h(x)), \quad \varphi^{(*1)}(x) = \varphi(x + h(x)),$$

где

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x)), \quad h_l(x) = \omega(x_-^l) - \omega(x_+^l);$$

$$x_-^i = \left( x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - \frac{1}{2} \omega(x), x_{i+1}, \dots, x_n \right);$$

$$x_+^i = \left( x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \frac{1}{2} \omega(x), x_{i+1}, \dots, x_n \right).$$

Вместо формулы (3.299) получаем

$$u(x) = \Phi_1(x + h(x)) + \varphi(x + h(x)) \omega(x) + \omega^2(x) \Phi_2(x). \quad (3.300)$$

В отличие от формул (3.292) и (3.299), функция (3.300) не содержит производных ни от неопределенных компонент, ни от функции  $\omega(x)$ . Таким образом, в формуле (3.300) функции  $\Phi$  и  $\varphi$  можно предполагать (если это необходимо) менее гладкими, чем в формуле (3.299).

*Замечание 2.* Из формул (3.299) и (3.300) можно получить структуру решения задачи Неймана (3.292), если предположить, что  $\omega(x)$ ,  $\Phi_1(x) \in C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} h_i(x) &= \omega(x_-^i) - \omega(x_+^i) = \\ &= \omega\left(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - \frac{1}{2} \omega(x), x_{i+1}, \dots, x_n\right) - \\ &\quad - \omega\left(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \frac{1}{2} \omega(x), x_{i+1}, \dots, x_n\right) = \\ &= \omega(x) - \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{2} \omega(x) + O(\omega^2(x)) - \omega(x) - \\ &\quad - \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{2} \omega(x) + O(\omega^2(x)) = \\ &= -\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \omega(x) + O(\omega^2(x)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$h(x) = -\omega(x) \nabla \omega(x) + \omega^2(x) \Psi(x), \quad (3.301)$$

где  $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_n)$  — непрерывная в  $\Omega \cup \partial\Omega$  вектор-функция.

Учитывая, что  $\omega(x)$ ,  $\Phi_1(x) \in C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$ , по формуле конечных разностей можем написать

$$\begin{aligned} \Phi_1(x + h(x)) &= \Phi_1(x - \omega(x) \nabla \omega(x)) + O(\omega^2(x)); \\ \varphi(x + h(x)) &= \varphi(x - \omega(x) \nabla \omega(x)) + O(\omega^2(x)). \end{aligned} \quad (3.302)$$

Подставляя эти выражения в (3.300) и включая слагаемые порядка  $O(\omega^2(x))$  в последнее слагаемое, получаем формулу (3.299). Аналогично замечая, что по той же формуле конечных разностей

$$\begin{aligned} \Phi_1(x - \omega(x) \nabla \omega(x)) &= \\ &= \Phi_1(x) - \omega(x) \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_k} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_k} + O(\omega^2(x)); \end{aligned}$$

$$\varphi(x - \omega(x) \nabla \omega(x)) = \varphi(x) - \omega(x) \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_k} + O(\omega^2(x)),$$

и подставляя эти выражения в (3.299), приходим к формуле (3.292).



3. Задача третьего типа. Краевое условие этой задачи имеет вид

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \nu} + h_0(x) u \right) \Big|_{\partial \Omega} = \varphi_0. \quad (3.303)$$

Здесь  $h_0$  и  $\varphi_0$  — функции из  $\mathfrak{M}(H)$ , заданные, вообще, лишь на границе. Пусть  $EC h_0 = h_1(x)$ ,  $EC \varphi_0 = \varphi(x)$ . Тогда условие (3.303) можно заменить условием

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \nu} + h_1(x) u \right) \Big|_{\partial \Omega} = \varphi(x) |_{\partial \Omega}. \quad (3.304)$$

Продолжая это краевое условие внутрь области  $\Omega$ , приходим к формуле

$$D_1 u + h_1(x) u = \varphi(x) + \omega(x) \Psi(x). \quad (3.305)$$

Согласно формуле (3.258) соответствующую структуру решения получаем в виде

$$u = \Phi_1(x) - \omega(x) D_1 \Phi_1(x) - h_1(x) \Phi_1(x) \omega(x) + \varphi(x) \omega(x) + \omega^2(x) \Phi_2(x). \quad (3.306)$$

Как и в задаче Неймана, можно перейти к разностным формам этой структуры:

$$u = \Phi_1(x - \omega(x) \nabla \omega(x)) + \varphi(x - \omega(x) \nabla \omega(x)) \omega(x) - h_1(x) \Phi_1(x) \omega(x) + \omega^2(x) \Phi_2(x), \quad (3.307)$$

$$u = \Phi_1(x + h(x)) + \varphi(x + h(x)) \omega(x) - h_1(x) \Phi_1(x) \omega(x) + \omega^2(x) \Phi_2(x). \quad (3.308)$$

Сказанное в замечании 2 относится и к структурам решения (3.306) — (3.308).

4. Смешанные краевые условия. Краевые условия этой задачи имеют вид

$$u |_{\partial \Omega_1} = \varphi_0, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} + h_0 u \right) \Big|_{\partial \Omega_2} = \psi_0. \quad (3.309)$$

Функции  $\varphi_0$ ,  $h_0$  и  $\psi_0$  предполагаются, как и ранее, заданными на  $\partial \Omega$  (возможно, различными формулами из  $\mathfrak{M}(H)$  на разных участках границы). Их продолжения в области  $\Omega$  обозначим  $EC h_0 = h_1$ ;  $EC \varphi_0 = \varphi$ ;  $EC \psi_0 = \psi$ . Тогда вместо (3.309) получим

$$u |_{\partial \Omega_1} = \varphi |_{\partial \Omega_1}, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} + h_1 u \right) \Big|_{\partial \Omega_2} = \psi |_{\partial \Omega_2}. \quad (3.310)$$

Пучок функций, удовлетворяющих первому из условий, очевидно, имеет вид

$$u = \omega_1 \Phi + \varphi, \quad (3.311)$$

где  $\Phi$  — неопределенная компонента, а  $\omega_1 = 0$  — уравнение  $\partial \Omega_1$ .

Представим функцию  $\Phi$  в виде

$$\Phi = \Phi_1 + \omega_2 \Psi_1 \quad (3.312)$$

и выберем  $\Psi_1$  так, чтобы удовлетворялось и второе условие (3.310). Последнее условие продолжим по методике § 8 в область  $\Omega$ :

$$D_1^{(2)}u + h_1u = \psi + \omega_2\Psi_2, \quad (3.313)$$

где  $\Psi_2$  — некоторая ограниченная функция;  $D_1^{(2)} = (\nabla\omega_2, \nabla)$ ;  $\omega_2 = 0$  — нормализованное уравнение  $\partial\Omega_2$ . Подставим (3.312) в (3.311):

$$u = \omega_1\Phi_1 + \omega_1\omega_2\Psi_1 + \varphi. \quad (3.314)$$

Подставляя формулу (3.314) в (3.313) и учитывая свойства оператора  $D_1^{(2)}$  (см. § 3), получаем

$$D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_1) + \omega_1\Psi_1 D_1^{(2)}\omega_2 + \omega_2 D_1^{(2)}(\omega_1\Psi_1) + D_1^{(2)}\varphi + \\ + h_1\omega_1\Phi_1 + h_1\omega_1\omega_2\Psi_1 + h_1\varphi = \psi + \omega_2\Psi_2. \quad (3.315)$$

Учитывая, что  $D_1^{(2)}\omega_2 = 1 + 0(\omega_2) = 1 + \omega_2\chi$ , и вводя обозначение

$$\Phi_2 = \Psi_2 - h_1\omega_1\Psi_1 - D_1^{(2)}(\omega_1\Psi_1) - \chi\omega_1\Psi_1 + \Psi_1,$$

условие (3.315) записываем в виде

$$D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_1) + (\omega_1 + \omega_2)\Psi_1 + D_1^{(2)}\varphi + \\ + h_1\omega_1\Phi_1 + h_1\varphi = \psi + \omega_2\Phi_2. \quad (3.316)$$

Отсюда

$$\Psi_1 = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} [\psi + \omega_2\Phi_2 - D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_1) - D_1^{(2)}\varphi - h_1\omega_1\Phi_1 - h_1\varphi]. \quad (3.317)$$

Подставляя это выражение в (3.314), получаем

$$u = \omega_1\Phi_1 + \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} [\psi + \omega_2\Phi_2 - D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_1) - D_1^{(2)}\varphi - \\ - h_1\omega_1\Phi_1 - h_1\varphi] + \varphi. \quad (3.318)$$

Множитель  $\omega_1 + \omega_2$  во втором слагаемом формулы (3.316) введен для того, чтобы при нахождении  $\Psi_1$  избежать деления на нуль. Формула (3.318) представляет собой структуру решения, учитывающую условия (3.309) смешанной краевой задачи. Неопределенной компонентой структуры является  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ .

Другой вариант структуры решения этой краевой задачи можем получить по формуле (3.262). А именно структурой решения, удовлетворяющей первому из условий (3.309), является формула (3.288). Для второго краевого условия, представляющего собой условие третьего рода, согласно (3.258) имеем

$$u = \Phi_2 - \omega_2 D_1^{(2)}\Phi_2 - h_1\Phi_2\omega_2 + \psi\omega_2 + \omega_2^2\Phi_3. \quad (3.319)$$

Тогда согласно (3.262), принимая  $k_1 = 0$ ;  $k_2 = 1$ , получаем

$$u = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2^2} \{ \tau_1\omega_1\Phi_1 + \tau_1\varphi + \tau_2^2 [\Phi_2 - \omega_2 D_1^{(2)}\Phi_2 - h_1\Phi_2\omega_2 + \\ + \psi\omega_2 + \omega_2^2\Phi_3] \}.$$

Учитывая, что  $\tau_1 = \omega_1^{-1}$ ;  $\tau_2 = \omega_2^{-1}$ , эту формулу преобразуем к виду

$$u = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2^2} \{ \omega_1 \omega_2^2 \Phi_1' + \omega_2^2 \varphi + \omega_1 [\Phi_2 - \omega_2 D_1^{(2)} \Phi_2 - h_1 \Phi_2 \omega_2 + \psi \omega_2 + \omega_2^2 \Phi_3] \}. \quad (3.320)$$

Последнее слагаемое можно включить в слагаемое  $\Phi_1' \omega_1 \omega_2^2$ . Таким образом, получим

$$u = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2^2} \{ \omega_1 \omega_2^2 \Phi_1 + \omega_2^2 \varphi + \omega_1 [\Phi_2 - \omega_2 D_1^{(2)} \Phi_2 - h_1 \Phi_2 \omega_2 + \psi \omega_2] \}, \quad (3.321)$$

где  $\Phi_1 = \Phi_1' + \Phi_3$ . В структурах (3.320) и (3.321) знаменатель обращается в нуль при одновременном равенстве нулю функций  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , т. е. в точках стыка граничных условий. В этих же точках равны нулю и выражения в фигурных скобках. Таким образом, в этих особых точках должна раскрываться неопределенность типа 0/0. Исключение представляет собой случай, когда  $\partial\Omega_1$  и  $\partial\Omega_2$  не пересекаются (рис. 105). Опишем еще один подход [49, 50], который приводит к структуре решения, не содержащей упомянутой выше неопределенности. Предположим, что, как и ранее  $\omega_i = 0$ , есть уравнение  $\partial\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ), а  $\omega = 0$  — уравнение  $\partial\Omega$ , нормализованное на участке  $\partial\Omega_2$ .

Первому из условий (3.309) удовлетворяет структура решения (3.311), а второму — (3.319). Поскольку функция  $u$ , которую определяют эти структуры, должна быть одна и та же, то должно выполняться тождество

$$\omega_1 \Phi + \varphi \equiv \Phi_1 - \omega D_1^{(2)} \Phi_1 - h_1 \Phi_1 \omega + \psi \omega + \omega^2 \Phi_2. \quad (3.322)$$

Все слагаемые правой части этой формулы, кроме первого, содержат множитель  $\omega$  и, следовательно, их можно включить в более широкий пучок  $\omega_1 \Phi$ . Таким образом, получаем  $\omega_1 \Phi_1' + \varphi \equiv \Phi_1$ , где  $\Phi_1'$  — новая неопределенная функция. Подставляя  $\Phi_1$  в формулу (3.319) (там она обозначена  $\Phi_2$ , а  $\Phi_2$  обозначено  $\Phi_3$ ), получаем

$$u = \omega_1 \Phi_1' + \varphi - \omega D_1^{(2)} (\omega_1 \Phi_1') - \omega D_1^{(2)} \varphi - h_1 \omega_1 \omega \Phi_1' - h_1 \varphi \omega + \psi \omega + \omega^2 \Phi_2. \quad (3.323)$$

Здесь неопределенной компонентой является  $\Phi = (\Phi_1', \Phi_2)$ .

*Замечание 3.* Как и в случае структур решения краевой задачи третьего типа (и в частности, Неймана), при построении структур

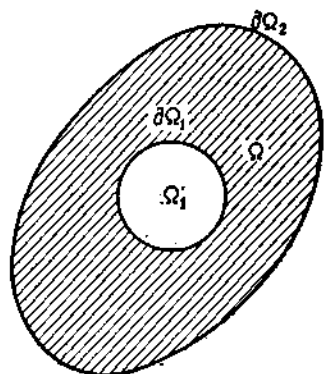


Рис. 105.

решений смешанной задачи можно воспользоваться разностными формами операторов  $D_1$  и нормализант.

*Замечание 4.* Сравнительный анализ приведенных в настоящем параграфе структур решений еще недостаточно исследован. Возможность применять различные структуры для решения одних и тех же краевых задач на практике используется для сравнения результатов и получения косвенных оценок точности приближенных решений. Эксперименты, проведенные О. Н. Бобылевой при решении

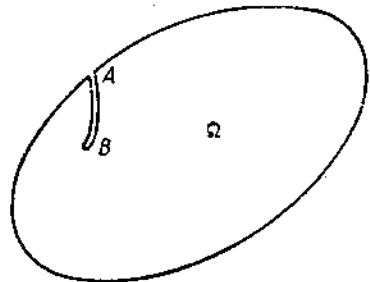


Рис. 106.

задач третьего типа для областей сложной формы, подтвердили теоретические выводы о большей устойчивости (к накоплению погрешностей) структур решений разностного типа.

*Упражнения и задачи. 1.* Исследовать вопрос о полноте рассмотренных в данном параграфе структур решений при различных предположениях относительно аналитических и геометрических компонент краевой задачи. (До сих пор эти компоненты предпо-

лагались «достаточно хорошими». Уточнение «качеств» этих компонент, обеспечивающих полноту рассмотренных структур решений, представляет несомненный теоретический и практический интерес.)

2. Область  $\Omega$  имеет узкий врез  $AB$  (рис. 106). Показать, что структура решения однородной задачи Дирихле  $u = \omega\Phi$ , где  $\omega = 0$  — уравнение  $\partial\Omega$  (вместе с врезом  $AB$ ), в этом случае, вообще, неприемлема. Предложить структуры решения для этой ситуации. Оценить для таких областей структурные формулы третьего типа (в частности, Неймана).

## § 11. Структуры решений основных типов краевых задач для уравнений четвертого порядка

Как уже отмечалось, описанный в § 8 общий подход к построению структур решений краевых задач применим и в том случае, когда на одном и том же участке границы задано несколько краевых условий. Рассмотрим различные ситуации, возникающие в краевых задачах для уравнений четвертого порядка эллиптического типа. При этом для простоты изложения рассмотрим задачи о поперечном изгибе тонких пластин [174]. Изложенные ниже подходы — типичные и для других краевых задач для уравнений высоких порядков (задачи о деформации оболочек, полигармонические задачи и др. [11, 41, 174]). (О физических предпосылках, при которых выводятся уравнения об изгибе и колебаниях тонких пластин, см. § 10 гл. 4, где рассмотрены и конкретные примеры.)

В задачах о поперечном изгибе тонких пластин на границе  $\partial\Omega$  (или ее участках) задается по два краевых условия (см. § 8).

1. Жестко заземленная пластина. На контуре пластины равны нулю прогибы и углы поворота:

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.324)$$

(Здесь  $u(x_1, x_2)$  — поперечный прогиб пластины в области  $\Omega$ .) В этом случае можно использовать пучок функций

$$u = \omega^2 \Phi. \quad (3.325)$$

При этом предполагается, что  $|\nabla \omega| > 0$  на  $\partial\Omega$ .

На практике встречаются варианты жесткого защемления с поперечными смещениями и поворотами кромки пластины. Для него вместо краевых условий (3.324) есть условия

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \psi_0, \quad (3.326)$$

где  $\varphi_0, \psi_0$  — заданные на  $\partial\Omega$  функции. Обозначив продолжения в область  $\Omega$  как  $EC\varphi_0 = \varphi$ ;  $EC\psi_0 = \psi$ , продолжим в  $\partial\Omega$  также и условия (3.326):

$$u = \varphi + \omega \Phi_1; \quad D_1 u = \psi + \omega \Psi_1. \quad (3.327)$$

Подставляя первое выражение во второе, получаем

$$D_1 \varphi + \Phi_1 D_1 \omega + \omega D_1 \Phi_1 = \psi + \omega \Psi_1. \quad (3.328)$$

Учитывая, что  $D_1 \omega = 1 + O(\omega) = 1 + \omega \chi$ , и включая слагаемые стоящие в левой части этой формулы в член  $\omega \Psi_1 = O(\omega)$ , имеем,

$$D_1 \varphi + \Phi_1 = \psi + \omega \Phi, \quad (3.329)$$

где  $\Phi = \Psi_1 - \Phi_1 \chi + D_1 \Phi_1$ . Отсюда

$$\Phi_1 = \psi + \omega \Phi - D_1 \varphi. \quad (3.330)$$

Подставляя полученное выражение в первую из формул (3.327), получаем

$$u = \varphi + \omega \psi - \omega D_1 \varphi + \omega^2 \Phi. \quad (3.331)$$

Формула (3.331) является структурой решения неоднородной краевой задачи (3.326).

*Замечание 1.* Замена  $u = \varphi + \omega \psi + \omega D_1 \varphi = v$  позволяет перейти от неоднородной краевой задачи (3.326) к однородной (3.324). Если известная функция  $\varphi + \omega \psi - \omega D_1 \varphi$  достаточно гладкая («не хуже», чем искомое решение), то упомянутые в § 1 оценки, полученные И. Ю. Харрик [182], а также результаты М. Х. Шульца [205] остаются в силе. Из этих результатов, в частности, следует полнота структуры (3.331) (при выполнении указанных в § 1 условий), если выбирать  $\Phi$  в виде степенных полиномов или достаточно гладких сплайнов.

2. Свободно опертая пластина. Для нее краевые условия имеют вид

$$u|_{\partial\Omega} = 0; \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.332)$$

где  $\nu$  и  $\tau$  — направления нормали и касательной к  $\partial\Omega$  соответственно. Как было показано в § 4, эти условия можно написать также в виде

$$u|_{\partial\Omega} = 0; \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} - \frac{\nu_0}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.333)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны  $\partial\Omega$ .

Полная структура, учитывающая первое из этих условий, имеет вид

$$u = \omega\Phi. \quad (3.334)$$

Положим

$$\Phi = \Phi_1 + \omega\Phi_1^*, \quad (3.335)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_1^*$  — неопределенные функции. Тогда формула (3.334) может быть переписана в виде

$$u = \omega\Phi_1 + \omega^2\Phi_1^*. \quad (3.336)$$

К выражению (3.336) применим оператор  $A = D_2 + \nu_0 T_2$ . С учетом свойств операторов  $D_2$  и  $T_2$  (см. § 3) получаем

$$\begin{aligned} D_2 u + \nu_0 T_2 u &= D_2 (\omega\Phi_1 + \omega^2\Phi_1^*) + \nu_0 T_2 (\omega\Phi_1 + \omega^2\Phi_1^*) = \\ &= D_2 (\omega\Phi_1) + D_2 (\omega^2\Phi_1^*) + \nu_0 T_2 (\omega\Phi_1) + \nu_0 T_2 (\omega^2\Phi_1^*) = \\ &= D_2 (\omega\Phi_1) + \Phi_1^* D_2 (\omega^2) + 2D_1 \Phi_1^* D_1 (\omega^2) + \omega^2 D_2 \Phi_1^* + \nu_0 \Phi_1 T_2 \omega + \\ &\quad + 2\nu_0 T_1 \omega T_1 \Phi_1 + \nu_0 \omega T_2 \Phi_1 + \nu_0 T_2 (\omega^2) \Phi_1^* + \\ &\quad + 2\nu_0 T_1 (\omega^2) T_1 (\Phi_1^*) + \nu_0 \omega^2 T_2 \Phi_1^*. \end{aligned} \quad (3.337)$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} D_2 (\omega^2) &= 2 (D_1 \omega)^2 + 2\omega D_2 \omega = 2 + O(\omega) = 2 + \omega\Psi_1; \\ D_1 (\omega^2) &= 2\omega D_1 \omega = O(\omega) = \omega\Psi_2; \quad T_1 (\omega^2) = 2\omega T_1 \omega \equiv 0; \\ T_2 (\omega^2) &= 2 (T_1 \omega)^2 + 2\omega T_2 \omega = O(\omega) = \omega\Psi_3, \end{aligned}$$

и предполагая величины порядка  $O(\omega)$  принадлежащими классу  $C^1(\Omega \cup \partial\Omega)$ , выражение (3.337) можем преобразовать к виду

$$Au \equiv D_2 u + \nu_0 T_2 u = D_2 (\omega\Phi_1) + \nu_0 T_2 (\omega\Phi_1) + 2\Phi_1^* + \omega\Psi, \quad (3.338)$$

где

$$\Psi = \Phi_1^* \Psi_1 + \nu_0 \Psi_3 + 2\Psi_1 D_1 \Phi + \omega (D_2 \Phi_1^* + \nu_0 T_2 \Phi_1^*).$$

Из второго условия (3.332) следует, что  $D_2 u + \nu_0 T_2 u = \omega\Psi_4$ . Подставляя в это условие выражение (3.338) и объединяя слагаемые порядка  $O(\omega)$ , имеем

$$D_2 (\omega\Phi_1) + \nu_0 T_2 (\omega\Phi_1) + 2\Phi_1^* = \omega\Phi_2,$$

где  $\Phi_2 = \Psi - \Psi_4$ . Отсюда

$$\Phi_1^* = \frac{1}{2} [\omega\Phi_2 - D_2 (\omega\Phi_1) - \nu_0 T_2 (\omega\Phi_1)].$$

Подставляя это выражение в (3.336), получаем

$$u = \omega \Phi_1 - \frac{\omega^2}{2} [D_2(\omega \Phi_1) + \nu_0 T_2(\omega \Phi_1) - \omega \Phi_2]. \quad (3.339)$$

Это и есть структура решения краевой задачи (3.332). Другой вид этой формулы получим, если учтем, что

$$D_2(\omega \Phi_1) = \Phi_1 D_2 \omega + 2D_1 \Phi_1 D_1 \omega + \omega D_2 \Phi_1 = \Phi_1 D_2 \omega + 2D_1 \Phi + O(\omega);$$

$$T_2(\omega \Phi_1) = \Phi_1 T_2 \omega + 2T_1 \Phi_1 T_1 \omega + \omega T_2 \Phi_1 = \Phi_1 T_2 \omega + O(\omega).$$

Включая величины порядка  $O(\omega)$  в слагаемое  $\omega \Phi_2$ , имеем

$$u = \omega \Phi_1 - \frac{\omega^2}{2} [\Phi_1 (D_2 \omega + \nu_0 T_2 \omega) + 2D_1 \Phi_1 - \omega \Phi_2]. \quad (3.340)$$

Приведенные выше структуры решений применялись в работах ряда авторов [26, 118].

В § 5 показано, что вместо операторов  $D_k$  и  $T_k$  можно использовать их разностные аналоги. В частности, для  $D_1$ ,  $D_2$  и  $T_2$  можно использовать формулы (3.124), (3.125) и (3.128) соответственно. В результате структура решения (3.332) примет вид

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) = & \omega(x_1, x_2) \Phi_1(x_1, x_2) + \frac{1}{2} \omega^3(x_1, x_2) \Phi_2(x_1, x_2) - \\ & - \frac{1}{2} (D_2 \omega + \nu_0 T_2 \omega) \Phi_1(x_1, x_2) \omega^2(x_1, x_2) + \\ & + \omega(x_1, x_2) \left\{ \Phi_1 \left[ x_1 - \omega \left( x_1 + \frac{1}{2} \omega(x_1, x_2), x_2 \right) + \right. \right. \\ & + \omega \left( x_1 - \frac{1}{2} \omega(x_1, x_2), x_2 \right), x_2 - \omega \left( x_1, x_2 + \frac{1}{2} \omega(x_1, x_2) \right) + \\ & \left. \left. + \omega \left( x_1, x_2 - \frac{1}{2} \omega(x_1, x_2) \right) \right] - \Phi_1(x_1, x_2) \right\}. \quad (3.341) \end{aligned}$$

Используя понятие нормализанты и обобщенную формулу Тейлора (3.192), позволяющую написать разложение  $u(x_1, x_2)$  в окрестности границы  $\partial\Omega$  по степеням функции  $\omega(x_1, x_2)$ , нормализованной на  $\partial\Omega$  до второго порядка, можно получить еще одну формулу структуры решения краевой задачи (3.332). Действительно, пусть  $f_0^*$ ,  $f_1^*$ ,  $f_2^*$  есть нормализанты функций  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  по функции  $\omega(x_1, x_2)$ , удовлетворяющей условиям

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\nu} \Big|_{\partial\Omega} = 1, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial\nu^2} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.342)$$

Кроме того, пусть

$$u|_{\partial\Omega} = f_0|_{\partial\Omega}; \quad \frac{\partial u}{\partial\nu} \Big|_{\partial\Omega} = f_1|_{\partial\Omega}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2} \Big|_{\partial\Omega} = f_2|_{\partial\Omega}. \quad (3.343)$$

Так как функция  $u$  равна нулю на  $\partial\Omega$ , можно принять  $f_0 \equiv 0$ , а следовательно, и  $f_0^* \equiv 0$ . Тогда согласно обобщенной формуле

Тейлора (3.192) имеем

$$u(x_1, x_2) = f_1^* \omega + \frac{1}{2} f_2^* \omega^2 + \omega^3 \Psi, \quad (3.344)$$

где  $\Psi$  — неопределенная функция.

На основании свойств операторов  $D_2$  и  $T_2$  (см. § 3) получаем

$$D_2(f_1^* \omega) = \{f_1^* D_2 \omega + 2D_1 f_1^* D_1 \omega + \omega D_2 f_1^*\} |_{\partial \Omega} = 0;$$

$$D_2\left(\frac{1}{2} f_2^* \omega^2\right) = \left\{[(D_1 \omega)^2 + \omega D_2 \omega] f_2^* + \right. \\ \left. + D_1(\omega^2) D_1 f_2^* + \frac{1}{2} \omega^2 D_2 f_2^*\right\} |_{\partial \Omega} = f_2^*;$$

$$D_2(\Psi \omega^3) |_{\partial \Omega} = 0; \quad T_2(f_1^* \omega) |_{\partial \Omega} = f_1^* T_2 \omega;$$

$$T_2\left(\frac{1}{2} f_2^* \omega^2\right) |_{\partial \Omega} = 0; \quad T_2(\Psi \omega^3) |_{\partial \Omega} = 0.$$

Тогда

$$D_2 u + v_0 T_2 u = f_2^* + v_0 f_1^* T_2 \omega.$$

Следовательно, условие  $D_2 u + v_0 T_2 u = \omega \Phi$ , вытекающее из второго краевого условия (3.332), принимает вид

$$f_2^* + v_0 f_1^* T_2 \omega = \omega \Phi,$$

где  $\Phi$  — неопределенная функция. Из этого условия находим

$$f_2^* = \omega \Phi - v_0 f_1^* T_2 \omega. \quad (3.345)$$

Тогда, если ввести обозначение  $f_1 \equiv \Phi_1$ , формула (3.344) принимает вид

$$u(x_1, x_2) = \Phi_1 \omega + \frac{1}{2} \omega^2 \Phi - \frac{\omega^2}{2} v_0 \Phi_1 T_2 \omega + \omega^3 \Psi. \quad (3.346)$$

Вводя обозначение  $\Phi_2 = \frac{1}{2} \Phi + \omega \Psi$ , получаем

$$u(x_1, x_2) = \Phi_1^* \omega \left[1 - \frac{1}{2} \omega v_0 T_2 \omega\right] + \omega^2 \Phi_2 \equiv \\ \equiv \Phi_1 \left(x_1 - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, x_2 - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right) \omega \left(1 - \frac{1}{2} v_0 \omega T_2 \omega\right) + \omega^2 \Phi_2. \quad (3.347)$$

Аналогичную формулу можно получить, используя обобщенную формулу Тейлора разностного типа (3.227).

*Замечание 2.* В формулах (3.341) и (3.347) предъявляются менее жесткие требования к гладкости неопределенных компонент, чем в формулах (3.339) и (3.340). Если бы речь шла только об удовлетворении краевых условий (3.332), то достаточно было бы в (3.339) предположить  $\Phi_1, \Phi_2 \in C^4(\Omega \cup \partial \Omega)$ , а в формулах (3.341) и (3.347)  $\Phi_1, \Phi_2 \in C^3(\Omega \cup \partial \Omega)$ .

*Замечание 3.* От структуры решения (3.347) можно перейти к структуре (3.340). Действительно, так как по формуле конечных



приращений

$$\begin{aligned} \Phi_1 \left( x_1 - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, x_2 - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) &= \Phi_1(x_1, x_2) - \\ - \omega \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) + \omega^2(x_1, x_2) \Psi(x_1, x_2) &= \\ = \Phi_1 - \omega D_1 \Phi_1 + \omega^2 \Psi, \end{aligned}$$

то выражение (3.347) запишется в виде

$$\begin{aligned} u &= (\Phi_1 - \omega D_1 \Phi_1 + \omega^2 \Psi) \omega \left( 1 - \frac{1}{2} \nu_0 \omega T_2 \omega \right) + \omega^3 \Phi_2 = \\ &= \Phi_1 \omega - \frac{1}{2} \nu_0 \omega^2 \Phi_1 T_2 \omega - \omega^2 D_1 \Phi_1 + \frac{1}{2} \nu_0 \omega^3 T_2 \omega + \omega^3 \Psi - \\ &\quad - \frac{1}{2} \nu_0 \omega^4 T_2 \omega \Psi + \omega^3 \Phi_2. \end{aligned}$$

Включая члены порядка  $O(\omega^3)$  в член  $\omega^3 \Phi_2$ , получаем

$$u = \Phi_1 \omega - \frac{1}{2} \omega^2 \Phi_1 T_2 \omega - \omega^2 D_1 \Phi_1 + \omega^3 \Phi_2^*, \quad (3.348)$$

где  $\Phi_2^* = \Phi_2 + \frac{1}{2} \nu_0 T_2 \omega + \Psi - \frac{1}{2} \nu_0 \omega \Psi$ .

Сравнение формул (3.348) и (3.340) показывает, что если  $D_2 \omega|_{\partial \Omega} = 0$ , то они (с точностью до обозначения функции  $\Phi_2$ ) совпадают. Но условие  $D_2 \omega|_{\partial \Omega} = 0$  есть следствие нормализованности функции  $\omega$  на  $\partial \Omega$  до второго порядка, которая предполагалась. Таким образом, если бы это условие было выполнено и в формуле (3.340), то структуры решений (3.340) и (3.348) полностью совпали бы.

**3. Упруго закрепленные пластины.** Для них функция прогибов  $u(x_1, x_2)$  удовлетворяет на  $\partial \Omega$  краевым условиям

$$u|_{\partial \Omega} = 0; \quad (3.349)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \left( \frac{1 - \nu_0}{\rho_0} + k_0 \right) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (3.350)$$

где  $\rho_0$  — радиус кривизны границы  $\partial \Omega$ , а  $k_0$  — жесткость заделки на изгиб.

Как и в предыдущем пункте, воспользуемся полной структурой решения  $u = \omega \Phi$ , учитывающей условие (3.349), а функцию  $\Phi$  выберем в виде

$$\Phi = \Phi_1 + \omega \Phi_{11}, \quad (3.351)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_{11}$  — новые неопределенные функции. Тогда

$$u = \omega \Phi_1 + \omega^2 \Phi_{11}. \quad (3.352)$$

К функции  $u$  применим оператор

$$B = D_2 + T_2 + \left( \frac{1 - \nu_0}{\rho} + k \right) D_1, \quad (3.353)$$

где  $\rho = EC\rho_0$ ;  $k = ECK_0$  (см. § 1). Принимая во внимание свойства операторов  $D_k$  и  $T_k$ , получаем

$$Bu|_{\partial\Omega} = \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \left( \frac{1-v_0}{\rho} + k \right) \frac{\partial u}{\partial v} \right] \Big|_{\partial\Omega}. \quad (3.354)$$

Таким образом, выражение  $Bu$  определено всюду в области  $\Omega$ , а на границе  $\partial\Omega$  превращается в левую часть краевого условия (3.350). Предполагая  $Bu \in C^1(\Omega \cup \partial\Omega)$ , можно найти такую функцию  $\Psi \in C(\Omega \cup \partial\Omega)$ , что будет справедливо тождество

$$Bu \equiv \omega\Psi. \quad (3.355)$$

Подставляя (3.352) в (3.355) с учетом свойств (3.61) — (3.69) операторов  $D_k$ ,  $T_k$ , имеем

$$D_2(\omega\Phi_1 + \omega^2\Phi_{11}) + T_2(\omega\Phi_1 + \omega^2\Phi_{11}) + \left( \frac{1-v_0}{\rho} + k \right) D_1(\omega\Phi_1 + \omega^2\Phi_{11}) = \omega\Psi, \quad (3.356)$$

или

$$D_2(\omega\Phi_1) + T_2(\omega\Phi_1) + \left( \frac{1-v_0}{\rho} + k \right) [D_1(\omega\Phi_1) + D_1(\omega^2)\Phi_{11} + \omega^2 D_1(\Phi_{11})] + D_2(\omega^2)\Phi_{11} + 2D_1(\omega^2)D_1\Phi_{11} + \omega^2 D_2\Phi_{11} + T_2(\omega^2)\Phi_{11} + 2T_1(\omega^2)T_1\Phi_{11} + \omega^2 T_2\Phi_{11} = \omega\Psi. \quad (3.357)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} D_2(\omega^2) &= [2(D_1\omega)^2 + 2\omega D_2\omega] = 2 + \omega\Psi_1; \\ D_1(\omega^2) &= 2\omega D_1\omega = \omega\Psi_2; \quad T_1(\omega^2) = 2\omega T_1\omega \equiv 0; \\ T_2(\omega^2) &= [2(T_1\omega)^2 + 2\omega T_2\omega] = \omega\Psi_3, \end{aligned} \quad (3.358)$$

условие (3.356) можем заменить новым условием

$$D_2(\omega\Phi_1) + T_2(\omega\Phi_1) + \left( \frac{1-v_0}{\rho} + k \right) D_1(\omega\Phi_1) + 2\Phi_{11} = \omega\Psi_4, \quad (3.359)$$

где в  $\omega\Psi_4$  включены слагаемые порядка  $O(\omega)$ . Из равенства (3.359) находим функцию  $\Phi_{11}$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \frac{1}{2} \omega\Psi_4 - \frac{1}{2} \left[ D_2(\omega\Phi_1) + T_2(\omega\Phi_1) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1-v_0}{\rho} + k \right) D_1(\omega\Phi_1) \right], \end{aligned} \quad (3.360)$$

или, раскрывая выражения  $D_1(\omega\Phi_1)$ ,  $D_2(\omega\Phi_1)$  и  $T_2(\omega\Phi_1)$ , из формулы (3.360), получаем

$$\Phi_{11} = \frac{1}{2} \omega\Phi_2 - \frac{1}{2} \left\{ \Phi_1 \left[ D_2\omega + T_2\omega + \left( \frac{1-v_0}{\rho} + k \right) \right] + 2D_1\Phi_1 \right\}. \quad (3.361)$$

Здесь в слагаемое  $1/2 \omega \Phi_2$  включены все величины порядка  $O(\omega)$ . Подставляя (3.361) в (3.351), получаем

$$u = \omega \Phi_1 + \frac{1}{2} \omega^3 \Phi_2 - \frac{1}{2} \omega^2 \Phi_1 \left[ D_2 \omega + T_2 \omega + \left( \frac{1 - \nu_0}{\rho} + k \right) \right] - \omega^2 D_1 \Phi_1. \quad (3.362)$$

Учитывая, что  $T_2 \omega|_{\partial \Omega} = -\frac{1}{\rho}$  (см. замечание 2 § 8), а следовательно (при достаточной гладкости  $\omega$  и  $\frac{1}{\rho}$ ),  $T_2 \omega = -\frac{1}{\rho} + \omega \chi$ , можем заменить структуру решения (3.362) формулой вида

$$u = \omega \Phi_1 + \frac{1}{2} \omega^3 \Phi_2 - \frac{1}{2} \omega^2 [\Phi_1 (D_2 \omega + \nu_0 T_2 \omega + k) + 2D_1 \Phi_1]. \quad (3.363)$$

Если жесткость заделки  $k \equiv 0$ , то эта формула превращается в структуру решения (3.340) для свободно опертой пластинки.

Применение обобщенной формулы Тейлора позволяет получить для рассматриваемой задачи структуру решения в виде

$$u(x_1, x_2) = \omega \Phi_1 \left( x_1 - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, x_2 - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) \times \times \left\{ 1 - \frac{1}{2} \omega \left[ T_2(\omega) + \left( \frac{1 - \nu_0}{\rho} + k \right) \right] \right\} + \omega^3 \Phi_2. \quad (3.364)$$

Заметим, что эта формула выведена в предположении, что функция  $\omega$  удовлетворяет условиям нормализованности до второго порядка (3.342). (В предыдущих формулах достаточно было нормализованности до первого порядка). Замечание 3, очевидно, касается также и формул (3.363) и (3.364).

*Замечание 4.* Если жесткость заделки  $k_0$  достаточно велика, то в структуре (3.363) главным становится слагаемое  $-\frac{1}{2} \omega^2 \Phi_1 k$ . Поскольку выбор неопределенной компоненты  $\Phi_1$  произволен, то можно принять  $\Phi_1 = 2\Phi_1 k$ , и в результате приходим к формуле  $\omega^2 \Phi_1'$ , представляющей собой структуру решения (3.325) для жестко защемленной пластины.

**4. Частично жестко защемленные и частично упруго закрепленные пластины.** Пусть контур  $\partial \Omega$  пластины состоит из двух непересекающихся частей  $\partial \Omega_1$  и  $\partial \Omega_2$ , на первой из которых пластина жестко защемлена, а на второй — упруго закреплена. Краевые условия в этом случае имеют вид

$$u|_{\partial \Omega_1} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega_1} = 0; \quad (3.365)$$

$$u|_{\partial \Omega_2} = 0; \quad \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \left( \frac{1 - \nu_0}{\rho_0} + k_0 \right) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] \Big|_{\partial \Omega_2} = 0, \quad (3.366)$$

где  $\nu_0$ ,  $\rho_0$  и  $k_0$  есть соответственно коэффициент Пуассона, радиус кривизны  $\partial\Omega_2$  и жесткость закрепления пластины. Как и ранее, будем обозначать  $EC\rho_0^{-1} = \rho^{-1}$ ,  $ECk_0 = k$  ( $EC$  — оператор продолжения граничных значений, рассмотренный в § 1). Кроме того, предположим, что  $\partial\Omega_i = (\omega_i = 0)$  ( $i = 1, 2$ ),  $\omega_2$  — нормализована на  $\partial\Omega_2$ ,  $|\nabla\omega_1|_{\partial\Omega} \neq 0$ . Согласно п. 1 настоящего параграфа формула

$$u = \omega_1^2 \Phi \quad (3.367)$$

учитывает краевые условия (3.365). Для учета краевых условий (3.366) положим

$$\Phi = \omega_2 \Phi_1 + \omega_2^2 \Phi_{11}. \quad (3.368)$$

Подставляя формулу (3.368) в (3.367), получаем

$$u = \omega_1^2 \omega_2 \Phi_1 + \omega_1^2 \omega_2^2 \Phi_{11}, \quad (3.369)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_{11}$  — неопределенные функции. Применяя к выражению (3.369) оператор  $B$  (3.353), как и в предыдущем пункте, находим

$$B(\omega_1^2 \omega_2 \Phi_1 + \omega_1^2 \omega_2^2 \Phi_{11}) = \omega_2 \Psi_1, \quad (3.370)$$

где  $\Psi_1$  — некоторая неопределенная функция. При этом в формуле (3.353) заменим  $D_k, T_k$  на  $D_k^{(2)}, T_k^{(2)}$ , что соответствует замене  $\omega$  на  $\omega_2$ . Раскрывая левую часть формулы (3.370), имеем

$$D_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2 \Phi_1) + D_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2^2 \Phi_{11}) + T_2^{(2)}(\omega_2 \omega_1^2 \Phi_1) + T_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2^2 \Phi_{11}) + \left(\frac{1-\nu_0}{\rho} + k\right) [D_1^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2 \Phi_1) + D_1^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2^2 \Phi_{11})] = \omega_2 \Psi_1. \quad (3.371)$$

Учитывая, что

$$D_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2^2 \Phi_{11}) = 2\Phi_{11} \omega_1^2 + O(\omega_2) = 2\Phi_{11} \omega_1^2 + \omega_2 \Psi_2;$$

$$T_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2^2 \Phi_{11}) = O(\omega_2) = \omega_2 \Psi_3;$$

$$D_1^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2^2 \Phi_{11}) = O(\omega_2) = \omega_2 \Psi_4,$$

равенство (3.371) преобразуем к виду

$$D_2^{(2)}(\omega_2 \omega_1^2 \Phi_1) + T_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2 \Phi_1) + \left(\frac{1-\nu_0}{\rho} + k\right) D_1^{(2)}(\omega_2 \omega_1^2 \Phi_1) + 2\Phi_{11} \omega_1^2 = \omega_2 \Psi_5, \quad (3.372)$$

где  $\Psi_5 = \Psi_1 - \Psi_2 - \Psi_3 - \left(\frac{1-\nu_0}{\rho} + k\right) \Psi_4$ .

Функцию  $\Psi_5$  представим в виде  $\Psi_5 = \Phi_2 - 2\omega_2 \Phi_{11}$ . Подставляя это выражение в (3.372), получаем

$$D_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2 \Phi_1) + T_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2 \Phi_1) + \left(\frac{1-\nu_0}{\rho_0} + k\right) D_1^{(2)}(\omega_2 \omega_1^2 \Phi_1) + 2\Phi_{11}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = \omega_2 \Phi_2.$$

Отсюда находим

$$\Phi_{11} = \frac{1}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)} \left\{ \omega_2 \Phi_2 - D_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2 \Phi_1) - T_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2 \Phi_1) - \left( \frac{1 - \nu_0}{\rho} + k \right) D_1^{(2)}(\omega_2 \omega_1^2 \Phi_1) \right\}. \quad (3.373)$$

Подставляя это выражение в формулу (3.369), имеем

$$u = \omega_1^2 \omega_2 \Phi_1 + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)} \left\{ \omega_2 \Phi_2 - D_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2 \Phi_1) - T_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2 \Phi_1) - \left( \frac{1 - \nu_0}{\rho} + k \right) D_1^{(2)}(\omega_2 \omega_1^2 \Phi_1) \right\}. \quad (3.374)$$

Структуру решения (3.374) можно несколько упростить, если учесть равенства

$$\begin{aligned} D_1^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2 \Phi_1) &= \omega_2 D_1^{(2)}(\omega_1^2 \Phi_1) + D_1^{(2)}(\omega_2) \omega_1^2 \Phi_1 = \omega_1^2 \Phi_1 + \omega_2 \chi_1; \\ D_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2 \Phi_1) &= \omega_2 D_2^{(2)}(\omega_1^2 \Phi_1) + 2D_1^{(2)} \omega_2 D_1^{(2)}(\omega_1^2 \Phi_1) + \\ &+ \omega_1^2 \Phi_1 D_2^{(2)} \omega_2 = 2D_1^{(2)}(\omega_1^2 \Phi_1) + \omega_1^2 \Phi_1 D_2^{(2)} \omega_2 + \omega_2 \chi_2; \\ T_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2 \Phi_1) &= \omega_2 T_2^{(2)}(\omega_1^2 \Phi_1) + 2T_1^{(2)} \omega_2 T_1^{(2)}(\omega_1^2 \Phi_1) + \\ &+ \omega_1^2 \Phi_1 T_2^{(2)} \omega_2 = \omega_1^2 \Phi_1 T_2^{(2)} \omega_2 + \omega_2 \chi_3 \end{aligned}$$

и включить слагаемые  $\omega_2 \chi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в член  $\omega_2 \Phi_2$ :

$$u = \omega_1^2 \omega_2 \Phi_1 + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)} \left\{ \omega_2 \Phi_2 - 2D_1^{(2)}(\omega_1^2 \Phi_1) - \omega_1^2 \Phi_1 D_2^{(2)} \omega_2 - \omega_1^2 \Phi_1 T_2^{(2)} \omega_2 - \left( \frac{1 - \nu_0}{\rho} + k \right) \omega_1^2 \Phi_1 \right\}. \quad (3.375)$$

Формулы (3.374) и (3.375) точно удовлетворяют краевым условиям (3.365), (3.366) при любом выборе достаточно гладких функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ .

Следует обратить внимание на то, что при наличии точек стыка участков границы  $\partial\Omega_1$  и  $\partial\Omega_2$  в этих точках значения функции  $u$ , определяемые приведенными выше структурами, получаются в результате раскрытия неопределенности типа 0/0. Если априори известен характер поведения функции  $u$  вблизи этих точек (степень гладкости, вид особенности для производных), то соответствующим образом следует выбирать и функции  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ .

Опишем следующий способ построения структуры решения рассматриваемой смешанной задачи, используя структурные формулы для жестко защемленной пластины (3.325) и упруго закрепленной пластины, например формулу (3.363). Для рассматриваемого

случая, введя новую индексацию функций  $\Phi_i$  и  $\omega_i$ , получим

$$u = \omega_1^2 \Phi_1; \quad (3.376)$$

$$u = \omega_2 \Phi_2 + \frac{1}{2} \omega_2^3 \Phi_3 - \frac{\omega_2^2}{2} [\Phi_2 (D_2^{(2)} \omega_2 + \nu_0 T_2^{(2)} \omega_2 + k) + 2D_1^{(2)} \Phi_2]. \quad (3.377)$$

Выберем функции  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  так, чтобы выражения (3.376) и (3.377) были тождественно равны между собой:

$$\omega_1^2 \Phi_1 \equiv \omega_2 \Phi_2 + \frac{1}{2} \omega_2^3 \Phi_3 - \frac{\omega_2^2}{2} [\Phi_2 (D_2^{(2)} \omega_2 + \nu_0 T_2^{(2)} \omega_2 + k) + 2D_1^{(2)} \Phi_2].$$

Пусть  $\Phi_3 = 2\Phi'_1 - 2\Phi_1$ . Тогда

$$\Phi_1 = \frac{1}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \left\{ \omega_2 \Phi_2 + \omega_2^3 \Phi'_1 - \frac{\omega_2^2}{2} [\Phi_2 (D_2^{(2)} \omega_2 + \nu_0 T_2^{(2)} \omega_2 + k) + 2D_1^{(2)} \Phi_2] \right\}.$$

Подставляя это выражение в формулу (3.376) и переименовав  $\Phi_2$  на  $\Phi_1$ , а  $\Phi'_1$  на  $\Phi_2$ , получим структуру решения рассматриваемой смешанной задачи в виде

$$u = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \left\{ \omega_2 \Phi_1 + \omega_2^3 \Phi_2 - \frac{\omega_2^2}{2} [\Phi_1 (D_2^{(2)} \omega_2 + \nu_0 T_2^{(2)} \omega_2 + k) + 2D_1^{(2)} \Phi_1] \right\}. \quad (3.378)$$

В частности, при  $k = 0$  формула (3.378) превращается в структуру решения задачи об изгибе частично защемленной и частично свободно опертой пластины.

*Замечание 5.* Из полученной структуры решения смешанной задачи (3.365) — (3.366) можно получить структуру решения, учитывающую только условия (3.366) упругого закрепления пластины по контуру. Для этого достаточно положить  $\omega_1 \equiv 1$  (в этом случае уравнение  $\omega_1 = 0$  определяет пустое множество) и учесть, что

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \frac{1}{1 + \omega_2^2} = 1 + O(\omega_2^2).$$

Включая слагаемые порядка  $O(\omega_2^2)$  в член  $\omega_2^3 \Phi_2$  и обозначая  $\omega_2 = \omega$ ,  $D_2^{(2)} = D_2$ ,  $T_2^{(2)} = T_2$ , приходим точно к структуре (3.363) решения задачи об упруго закрепленной по контуру пластине.

Заметим, что если вместо (3.377) взять структуру решения (3.364), построенную с помощью обобщенной формулы Тейлора,

то придем к структуре решения вида

$$u = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2} \left\{ \Phi_1 \left( x_1 - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, x_2 - \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) \omega_2 (x_1, x_2) \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 - \frac{1}{2} \omega_2 T_2^{(2)} \omega_2 - \frac{1}{2} \omega_2 \left( \frac{1 - \nu_0}{\rho} + k \right) \right] + \omega_2^3 \Phi_2 (x_1, x_2) \right\}. \quad (3.379)$$

При использовании этой формулы необходимо не забывать требование нормализованности функции  $\omega_2$  до второго порядка.

**5. Пластины, частично жестко заземленные и частично свободные.** Пусть  $\partial\Omega_1$  — участок границы  $\partial\Omega$ , по которому пластина жестко заземлена, а остальная часть границы  $\partial\Omega_2 = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_1$  — свободна. Краевые условия в этом случае имеют вид

$$u|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega_1} = 0; \quad (3.380)$$

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) \Big|_{\partial\Omega_1} = 0; \quad (3.381)$$

$$\left[ \frac{\partial^3 u}{\partial \nu^3} + (2 - \nu_0) \frac{\partial^3 u}{\partial \nu \partial \tau^2} \right] \Big|_{\partial\Omega_1} = 0. \quad (3.382)$$

Как и в предыдущем пункте, краевые условия (3.379) учтем, полагая

$$u = \omega_1^2 \Psi. \quad (3.383)$$

Для того чтобы учесть условие (3.381), положим

$$\Psi = \Phi_1 + \omega_2^2 \Psi_1. \quad (3.384)$$

Тогда

$$u = \omega_1^2 \Phi_1 + \omega_1^2 \omega_2^2 \Psi_1. \quad (3.385)$$

Продолжая граничное условие (3.381) внутрь области  $\Omega$ , получаем

$$D_2^{(2)} u + \nu_0 T_2^{(2)} u = \omega_2 \Psi_2. \quad (3.386)$$

Подставляя в это равенство (3.385) и учитывая свойства операторов  $D_2^{(2)}$  и  $T_2^{(2)}$ , имеем

$$D_2^{(2)} u + \nu_0 T_2^{(2)} u = D_2^{(2)} (\omega_1^2 \Phi_1) + D_2^{(2)} (\omega_2^2 \omega_1^2 \Psi_1) + \\ + \nu_0 T_2^{(2)} (\omega_1^2 \Phi_1) + \nu_0 T_2^{(2)} (\omega_2^2 \omega_1^2 \Psi_1) = D_2^{(2)} (\omega_1^2 \Phi_1) + \\ + \omega_1^2 \Psi_1 D_2^{(2)} (\omega_2^2) + 2 D_1^{(2)} (\omega_2^2) D_1^{(2)} (\omega_1^2 \Psi_1) + \\ + \omega_2^2 D_2^{(2)} (\omega_1^2 \Psi_1) + \nu_0 T_2^{(2)} (\omega_1^2 \Phi_1) + \nu_0 \omega_1^2 \Psi_1 T_2 (\omega_2^2) + \\ + 2 \nu_0 T_1^{(2)} (\omega_1^2 \Psi_1) T_1^{(2)} (\omega_2^2) + \nu_0 \omega_2^2 T_2^{(2)} (\omega_1^2 \Psi_1) = \omega_2 \Psi_2. \quad (3.387)$$

Учитывая, что

$$D_2^{(2)} (\omega_2^2) = 2 \omega_2 D_2^{(2)} \omega_2 + 2 (D_1^{(2)} \omega_2) = 2 + \omega_2 \chi_2;$$

$$D_1^{(2)} (\omega_2^2) = 2 \omega_2 D_1^{(2)} \omega_2 = \omega_2 \chi_2;$$

$$T_2^{(2)}(\omega_2^2) = 2\omega_2 T_2^{(2)}\omega_2 + 2(T_1^{(2)}\omega_2) = \omega_2 \chi_3;$$

$$T_1^{(2)}(\omega_2^2) = 2\omega_2 T_1^{(2)}\omega_2 = 0,$$

и объединяя слагаемые, содержащие множитель  $\omega_2$ , получаем

$$D_2^{(2)}(\omega_1^2\Phi_1) + 2\omega_1^2\Psi_1 + \nu_0 T_2^{(2)}(\omega_1^2\Phi_1) = \omega_2\Psi_3. \quad (3.388)$$

Введем новую неопределенную функцию  $\Psi_4 = \Psi_3 + 2\omega_2\Psi_1$ . Тогда из (3.388) получим

$$\Psi_1 = \frac{1}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)} [\omega_2\Psi_4 - D_2^{(2)}(\omega_1^2\Phi_1) - \nu_0 T_2^{(2)}(\omega_1^2\Phi_1)]. \quad (3.389)$$

Подставляя  $\Psi_1$  в формулу (3.385), находим структуру решения, учитывающую краевые условия (3.380) и (3.381):

$$u = \omega_1^2\Phi_1 + \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)} [\omega_2\Psi_4 - D_2^{(2)}(\omega_1^2\Phi_1) - \nu_0 T_2^{(2)}(\omega_1^2\Phi_1)], \quad (3.390)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Psi_4$  — неопределенные функции. Эта структура, хотя и не учитывает краевое условие (3.382), представляет самостоятельный интерес, так как в некоторых случаях условие (3.382) можно не учитывать, рассматривая его как естественное [88]. Чтобы учесть условие (3.382), положим

$$\Psi_4 = \Psi_5 + \omega_2\Psi_6. \quad (3.391)$$

Тогда формула (3.390) примет вид

$$u = \omega_1^2\Phi_1 + \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)} [\omega_2\Psi_5 + \omega_2^2\Psi_6 - D_2^{(2)}(\omega_1^2\Phi_1) - \nu_0 T_2^{(2)}(\omega_1^2\Phi_1)]. \quad (3.392)$$

Продолжим внутрь области  $\Omega$  краевое условие (3.382):

$$Ku \equiv D_3^{(2)}u + (2 - \nu_0)(D_1^{(2)}T_2^{(2)})u = \omega_2\Psi_7. \quad (3.393)$$

Формулу (3.392) перепишем в виде

$$u = P + \omega_2^3 Q + \omega_2^4 R, \quad (3.394)$$

где

$$P = \omega_1^2\Phi_1 - \frac{1}{2}\omega_2^2 [D_2^{(2)}(\omega_1^2\Phi_1) + \nu_0 T_2^{(2)}(\omega_1^2\Phi_1)]; \quad Q = \frac{1}{2}\Psi_5;$$

$$R = \frac{\omega_1^2}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}\Psi_6 - \frac{1}{2}\Psi_6 \frac{\omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} + \frac{\omega_1^2}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)} [D_2^{(2)}(\omega_1^2\Phi_1) + \nu_0 T_2^{(2)}(\omega_1^2\Phi_1)]. \quad (3.395)$$

Оператор  $Ku$  (3.393) является дифференциальным оператором третьего порядка, поэтому  $K(\omega_2^4 R) = O(\omega_2)$ , и эту величину можно объединить с правой частью равенства (3.393). Как и в предыдущих



пунктах, находим

$$D_3^{(2)}(\omega_2^3 Q) = \frac{1}{2} D_3^{(2)}(\omega_2^3 \Psi_8) = 3\Psi_5 + O(\omega_2);$$

$$(D_1^{(2)} T_2^{(2)})(\omega_2^3 Q) = O(\omega_2).$$

Поэтому при подстановке формулы (3.394) в (3.393), получим

$$D_3^{(2)} P + 3\Psi_5 + (2 - \nu_0)(D_1^{(2)} T_2^{(2)}) P = \omega_2 \Psi_8, \quad (3.396)$$

где  $\Psi_8$  — новая неопределенная функция. (Слагаемое  $\omega_2 \Psi_8$  включило в себя все слагаемые вида  $O(\omega_2)$ .)

Из формулы (3.396) находим

$$\Psi_5 = \frac{1}{3} [\omega_2 \Psi_8 - D_3^{(2)} P - (2 - \nu_0)(D_1^{(2)} T_2^{(2)}) P]. \quad (3.397)$$

Подставляя полученное выражение  $\Psi_5$  в формулу (3.392), получаем

$$u = \omega_1^2 \Phi_1 + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)} \left\{ \frac{\omega_2}{3} [\omega_2 \Psi_8 - D_3^{(2)} P - (2 - \nu_0)(D_1^{(2)} T_2^{(2)}) P] + \right. \\ \left. + \omega_2^2 \Psi_8 - D_2^{(2)}(\omega_1^2 \Phi_1) - \nu_0 T_2^{(2)}(\omega_1^2 \Phi_1) \right\}. \quad (3.398)$$

Полагая  $\frac{1}{3} \omega_2^2 \Psi_8 + \omega_2^2 \Psi_8 = \omega_2^2 \Phi_2$  и учитывая выражение (3.395) для  $P$ , имеем

$$u = \omega_1^2 \Phi_1 + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)} \left\{ \omega_2^2 \Phi_2 - \frac{\omega_2}{3} [D_3^{(2)} + (2 - \nu_0)(D_1^{(2)} T_2^{(2)})] \times \right. \\ \left. \times \{ \omega_1^2 \Phi_1 - \omega_2^2 [D_2^{(2)}(\omega_1^2 \Phi_1) + \nu_0 T_2^{(2)}(\omega_1^2 \Phi_1)] - \right. \\ \left. - D_2^{(2)}(\omega_1^2 \Phi_1) - \nu_0 T_2^{(2)}(\omega_1^2 \Phi_1) \} \right\}. \quad (3.399)$$

Используя свойства операторов  $D_k$  и  $T_k$ , структуре решения (3.399) можно придать и другие эквивалентные формы [118].

Из структуры решения (3.399) можно получить структуру решения для пластины, весь край  $\partial\Omega$  которой свободен от нагрузок. Для этого можно применить методику, описанную в замечании 5.

А именно: полагая в формуле в (3.399)  $\omega_1 \equiv 1$ ;  $\frac{1}{1 + \omega_2^2} = 1 + O(\omega_2^2)$

и включая величины порядка  $O(\omega_2^4)$  в член  $\omega_2^2 \Phi_2$ , а также обозначая  $D_k^{(2)} = D_k$ ,  $T_k^{(2)} = T_k$ ,  $\omega_2 = \omega$ , получаем

$$u = \Phi_1 + \frac{\omega^2}{2} \left\{ \omega^2 \Phi_2 - \frac{\omega}{3} [D_3 + (2 - \nu_0)(D_1 T_2)] \{ \Phi_1 - \right. \\ \left. - \omega^2 [D_2(\Phi_1) + \nu_0 T_2(\Phi_1)] - D_2(\Phi_1) - \nu_0 T_2(\Phi_1) \} \right\}. \quad (3.400)$$

Эта формула учитывает только условия на свободном крае пластины.

Располагая структурами решений (3.325) и (3.400) соответственно для жестко заземленной и свободной пластин, можем получить еще один вариант структуры решения рассматриваемой смешанной краевой задачи (3.380) — (3.382), применяя процедуру склейки (3.262), описанную в § 8. Учитывая, что максимальный порядок краевых условий (3.380) первый, а условий (3.381) — (3.382) — третий, и обозначая в формуле (3.325)  $\omega = \omega_1$ , а в (3.400)  $\omega = \omega_2$ ,  $D_k = D_k^{(2)}$ ;  $T_k = T_k^{(2)}$ ;  $\Phi_2 = \Psi$ , по формуле (3.262) находим

$$u = \left\{ \frac{\omega_1^2 \Phi}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^4} \left\{ \Phi_1 + \frac{\omega_2^2}{2} \left\{ \omega_2^2 \Psi - \frac{\omega_2}{3} [D_3^{(2)} + (2 - \nu_0) (D_1^{(2)} T_1^{(2)})] (\Phi - \omega_2^2 [D_2^{(2)} (\Phi_1) + \nu_0 T_2^{(2)} (\Phi_1)] - D_2^{(2)} (\Phi_1) - \nu_0 T_2^{(2)} (\Phi_1)] \right\} \right\} \left( \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^4} \right)^{-1} \right\},$$

или

$$u = \frac{\omega_1^2 \omega_2^4 \Phi}{\omega_1^2 + \omega_2^4} + \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^4} \left\{ \Phi_1 + \frac{\omega_2^2}{2} \left\{ \omega_2^2 \Psi - \frac{\omega_2}{3} [D_3^{(2)} + (2 - \nu_0) (D_1^{(2)} T_2^{(2)})] (\Phi_1 - \omega_2^2 [D_2^{(2)} (\Phi_1) + \nu_0 T_2^{(2)} (\Phi_1)] - D_2^{(2)} (\Phi_1) - \nu_0 T_2^{(2)} (\Phi_1)] \right\} \right\}. \quad (3.401)$$

Введя обозначение  $\Phi + \frac{1}{2} \Psi = \Phi_2$ , окончательно получим

$$u = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^4} \left\{ \omega_2^4 \Phi_2 + \Phi_1 - \frac{\omega_2^3}{6} [D_3^{(2)} + (2 - \nu_0) (D_1^{(2)} T_2^{(2)})] (\Phi_1 - \omega_2^2 [D_2^{(2)} (\Phi_1) + \nu_0 T_2^{(2)} (\Phi_1)] - \frac{\omega_2^2}{2} [D_2^{(2)} (\Phi_1) + \nu_0 T_2^{(2)} (\Phi_1)] \right\}. \quad (3.402)$$

Различные структурные формулы, которые строились или могут быть построены для одних и тех же краевых задач, на практике используются для сравнительного анализа приближенных решений с целью получения косвенных оценок их точности.

*Упражнения и задачи.* 1. Используя обобщенную формулу Тейлора и метод склейки, построить структуру решения задачи об изгибе консольной пластинки.

2. Построить структуру решения задачи о пластинке, частично свободно опертой и частично свободной.

3. Описать методику построения структур решений для трех или более участков с различными краевыми условиями.

## § 12. Структуры решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными

До сих пор рассматривались краевые условия, накладываемые на одну искомую функцию. (Предположение о том, что эта функция является действительной функцией не существенно. Описанная выше методика построения структур решений без существенных изменений переносится и на комплекснозначную функцию.) При рассмотрении систем дифференциальных уравнений с частными производными существенно возрастает многообразие различных типов краевых задач, появляются специфические особенности, которые необходимо учитывать при построении структурных формул.

Ниже в качестве модели системы дифференциальных уравнений с частными производными выбраны уравнения теории упругости в перемещениях (уравнения Ламе) и рассмотрены соответствующие им основные типы краевых условий. Однако предлагаемая методика построения структур решений для этих задач «работает», по-видимому, и в случаях, когда в краевые условия входит несколько неизвестных функций.

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  — некоторая (в общем случае многосвязная) область, ограниченная кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ . Будем предполагать, что область  $\Omega$  заполнена упругим телом, характеризующимся коэффициентами Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ . Под действием внешних воздействий и внутренних сил  $F = (F_1, F_2, F_3)$  упругое тело  $\Omega$  деформируется, а соответствующий точке  $x = (x_1, x_2, x_3)$  вектор перемещения  $u = (u_1, u_2, u_3)$  внутри  $\Omega$  удовлетворяет векторному уравнению Ламе

$$Au = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \mu \Delta u = -F, \quad (3.403)$$

которое можно представить в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка,

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \right) + F_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.404)$$

Рассмотрим основные типы краевых задач для уравнений (3.404).

**1. Вторая основная задача теории упругости (векторная задача Дирихле).** На границе упругого тела задан вектор перемещений

$$u|_{\partial\Omega} = u^0, \quad (3.405)$$

где  $u^0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0)$ ,  $u_i^0 \in \mathfrak{M}(H)$ , — известная на  $\partial\Omega$  вектор-функция. Компоненты  $u_i^0$  могут быть продолжены с помощью оператора  $EC$  (см. § 1) внутрь области  $\Omega$ . Пусть  $ECu^0 = \hat{u}^0 = (\hat{u}_1^0, \hat{u}_2^0, \hat{u}_3^0)$ . Тогда условие (3.405) можно заменить условием

$$u|_{\partial\Omega} = \hat{u}^0|_{\partial\Omega}. \quad (3.406)$$

Соответствующая структура решения имеет вид (см. § 1)

$$u = \hat{u}^0 + \omega \Phi, \quad (3.407)$$

где  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ ,  $\Phi_i \in C^2(\Omega)$ , — неопределенная компонента, а  $\omega = 0$ ,  $\omega \in C^2(\Omega)$ , как и ранее, уравнение  $\partial\Omega$ , причем  $\|\nabla\omega\|_{\partial\Omega} \neq 0$ .

**2. Первая основная задача теории упругости.** Эта задача представляет собой аналог задачи Неймана (см. § 10). Краевое условие в векторной форме имеет вид [128]

$$N(u) \equiv \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda (\nu \operatorname{div} u) + \mu (\nu \times \operatorname{rot} u) \right] \Big|_{\partial\Omega} = H^0, \quad (3.408)$$

где  $\nu$  — единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ ;  $H^0$  — заданный на  $\partial\Omega$  вектор напряжений. Заметим, что вектор-функция  $H^0$  не может быть произвольной. Для разрешимости краевой задачи (3.403), (3.408) необходимо, чтобы система сил  $(F, H^0)$  была самоуравновешенной, т. е. должны равняться нулю главный вектор и главный момент всех действующих на тело сил:

$$\int_{\Omega} F d\Omega + \int_{\partial\Omega} H^0 dS = 0; \quad \int_{\Omega} (x \times F) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (x \times H^0) dS = 0, \quad (3.409)$$

где  $dS = d(\partial\Omega)$ .

Для построения структуры решения рассматриваемой задачи продолжим краевое условие (3.408) внутрь области  $\Omega$ . Учитывая, что в формуле (3.408) вектор  $\nu$  — внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ , можем продолжить его в области  $\Omega$  исходя из условия  $\nabla\omega|_{\partial\Omega} = -\nu$ , где  $\omega = 0$  — нормализованное до первого порядка уравнение  $\partial\Omega$  и  $\omega > 0$  внутри  $\Omega$ . Учитывая также, что  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  в данном случае следует заменить на  $(-D_1 u)$ , где  $D_1$  — оператор, введенный в § 3, условие (3.408) заменим равенством

$$N^*(u) \equiv 2\mu D_1 u + \lambda (\nabla\omega) \operatorname{div} u + \mu (\nabla\omega \times \operatorname{rot} u) = -H + \omega \Psi. \quad (3.410)$$

Здесь  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ ,  $\Psi_i \in C(\Omega \cup \partial\Omega)$  — некоторая неопределенная вектор-функция, а  $H = ECH^0$ . Это соотношение определено везде в рассматриваемой области  $\Omega$ , а на границе  $\partial\Omega$  превращается в краевое условие (3.408). Что касается вектор-функции  $\Psi$ , то можно представить, что это та функция, которая превращает равенство (3.410) в тождество, если в левой его части вектор  $u$  представляет собой точное решение краевой задачи. (Если краевая задача имеет лишь некоторое обобщенное решение, то равенство (3.410) следует также понимать в обобщенном смысле.)

Структуру решения сформулированной краевой задачи будем искать в виде

$$u = \Phi^1 + \omega \Psi^1, \quad (3.411)$$

где  $\Phi^1$ ,  $\Psi^1$  — неопределенные достаточное число раз дифференцируемые вектор-функции,  $\Phi^1 = (\Phi_1^1, \Phi_2^1, \Phi_3^1)$ ;  $\Psi^1 = (\Psi_1^1, \Psi_2^1, \Psi_3^1)$ .

(Далее  $\Phi^i, \Psi^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) — неопределенные вектор-функции.) Подставив выражение (3.411) в равенство (3.410), с учетом равенств

$$D_1 u = D_1 \Phi^1 + \Psi^1 + \omega \Psi^2;$$

$$\nabla \omega \operatorname{div} u = \nabla \omega \cdot \operatorname{div} \Phi^1 + \nabla \omega (\Psi^1 \Delta \omega) + \omega \Psi^3;$$

$$\nabla \omega \times \operatorname{rot} u = \nabla \omega \times \operatorname{rot} \Phi^1 - \nabla \omega \times (\Psi^1 \times \nabla \omega) + \omega \Psi^4,$$

получим

$$2\mu \Psi^1 + \lambda \nabla \omega (\Psi^1 \nabla \omega) - \mu \nabla \omega \times (\Psi^1 \times \nabla \omega) + 2\mu D_1 \Phi^1 + \\ + \lambda \nabla \omega \operatorname{div} \Phi^1 + \mu (\nabla \omega \times \operatorname{rot} \Phi^1) = -H + \omega \Psi^5, \quad (3.412)$$

где  $\Psi^5$  — новая неопределенная вектор-функция, в которую включены все слагаемые, имеющие множитель  $\omega$ . Ближайшая задача состоит в том, чтобы из равенства (3.412) найти  $\Psi^1$  через  $\Phi^1$  и величины порядка  $\omega$ .

Используя векторное тождество

$$\nabla \omega \times (\Psi^1 \times \nabla \omega) \equiv \Psi^1 |\nabla \omega|^2 - \nabla \omega (\Psi^1 \nabla \omega)$$

и учитывая, что вследствие нормализованности уравнения  $\omega = 0$ ,  $|\nabla \omega|^2 = 1 + O(\omega)$ , находим

$$\Psi^1 = \nabla \omega \times (\Psi^1 \times \nabla \omega) + \nabla \omega (\Psi^1 \nabla \omega) + \omega \Psi^6. \quad (3.413)$$

С учетом приведенных выше формул (3.412) можем записать в виде

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \omega (\Psi^1 \nabla \omega) + \mu \nabla \omega \times (\Psi^1 \times \nabla \omega) = \omega \Psi^7 + \Phi^*, \quad (3.414)$$

где  $\Phi^* = -H - 2\mu D_1 \Phi^1 - \lambda \nabla \omega \operatorname{div} \Phi^1 - \mu (\nabla \omega \times \operatorname{rot} \Phi^1)$ .

Пусть  $e^1 = \nabla \omega$ ;  $e^2 = |\Psi^1|^{-1} [\nabla \omega \times (\Psi^1 \times \nabla \omega)]$ .

Очевидно, что векторы  $e^1$  и  $e^2$  — единичные и ортогональные. Правую часть равенства (3.414) разложим по векторам  $e^1$  и  $e^2$ . Такое разложение возможно, так как левая часть равенства (3.414) (а следовательно, и правая его часть) есть линейная комбинация векторов  $e^1$  и  $e^2$ . В результате получим

$$\Phi^* + \omega \Psi^7 = \nabla \omega (\Phi^* \nabla \omega) + \nabla \omega \times (\Phi^* \times \nabla \omega) + \\ + \omega [e^1 (\Psi^7 e^1) + e^2 (\Psi^7 e^2)]. \quad (3.415)$$

Из формулы (3.414) с учетом (3.415) найдем

$$(\lambda + \mu) \nabla \omega (\Psi^1 \nabla \omega) = \nabla \omega (\Phi^* \nabla \omega) + \omega e^1 (\Psi^7 e^1); \quad (3.416)$$

$$\mu \nabla \omega \times (\Psi^1 \times \nabla \omega) = \nabla \omega \times (\Phi^* \times \nabla \omega) + \omega e^2 (\Psi^7 e^2). \quad (3.417)$$

Подстановкой найденных выражений (3.416), (3.417) в формулу (3.413) преобразуем ее к виду

$$\Psi^1 = \frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)} [\mu \nabla \omega (\Phi^* \nabla \omega) + (\lambda + 2\mu) \nabla \omega \times (\Phi^* \times \nabla \omega)] + \omega \Phi^2, \quad (3.418)$$

где  $\Phi^2$  — неопределенная вектор-функция.

Подставляя полученное выражение (3.418) для  $\Psi^1$  в формулу (3.411), получаем структуру решения первой краевой задачи теории

упругости в виде

$$u = \Phi^1 + \frac{\omega}{\mu(\lambda + 2\mu)} [\mu \nabla \omega (\Phi^* \nabla \omega) + (\lambda + 2\mu) \nabla \omega \times (\Phi^* \times \nabla \omega)] + \omega^2 \Phi^2, \quad (3.419)$$

где

$$\Phi^* = -2\mu D_1 \Phi^1 - \lambda \nabla \omega \operatorname{div} \Phi^1 - \mu (\nabla \omega \times \operatorname{rot} \Phi^1) - H. \quad (3.420)$$

Таким образом, структура решения, учитывающая векторное краевое условие (3.408), содержит две произвольные вектор-функции  $\Phi^1$  и  $\Phi^2$ , которые надлежит выбрать из некоторого множества (ограниченных, непрерывных в  $\Omega$ ) функций так, чтобы удовлетворялась (возможно, в обобщенном смысле) система уравнений Ламе (3.404).

**3. Смешанная основная задача теории упругости.** На участке  $\partial\Omega_1 \subset \partial\Omega$  заданы перемещения, а на  $\partial\Omega_2 = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_1$  — напряжения:

$$u|_{\partial\Omega_1} = u^0; \quad (3.421)$$

$$N(u) \equiv 2\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda (\nu \operatorname{div} u) + \mu (\nu \times \operatorname{rot} u)|_{\partial\Omega_2} = H|_{\partial\Omega_2}. \quad (3.422)$$

Один из возможных способов построения структуры решения, учитывающей краевые условия (3.421) и (3.422), это — использование формулы (3.262) (см. § 8) при  $s = 2$ . Обозначая, как и ранее,  $\tau_i = \omega_i^{-1}$ , где  $\partial\Omega_i = (\omega_i = 0)$  ( $i = 1, 2$ ), и учитывая, что краевое условие (3.422) содержит производные первого порядка, согласно (3.262) получаем

$$u = \frac{\tau_1 (\hat{u} + \omega \Phi^1) + \tau_2^2 B(\Phi^2, \Phi^3)}{\tau_1 + \tau_2^2}, \quad (3.423)$$

где  $B(\Phi^2, \Phi^3)$  есть результат подстановки в формулу (3.419) вместо  $\Phi^1$ ,  $\Phi^2$  вектор-функций  $\Phi^2$ ,  $\Phi^3$ , а вместо  $\omega$  — функции  $\omega_2$  (нормализованной до первого порядка), т. е.

$$u = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2^2} \left\{ \tau_1 (\hat{u} + \omega_1 \Phi^1) + \tau_2^2 \left\{ \Phi^2 + \frac{\omega_2}{\mu(\lambda + 2\mu)} [\mu \nabla \omega_2 (\hat{\Phi} \nabla \omega_2) + (\lambda + 2\mu) \nabla \omega_2 \times (\hat{\Phi} \times \nabla \omega)] + \omega_2^2 \Phi^3 \right\} \right\}. \quad (3.424)$$

Здесь

$$\hat{\Phi} = -2\mu D_1^{(2)} \Phi^2 - \lambda \nabla \omega_2 \operatorname{div} \Phi^2 - \mu (\nabla \omega_2 \times \operatorname{rot} \Phi^2) - H. \quad (3.425)$$

Полученная структура решения, учитывающая краевые условия (3.421), (3.422), содержит три неопределенные вектор-функции:  $\Phi^1$ ,  $\Phi^2$ ,  $\Phi^3$ . Покажем, что при надлежащем выборе  $\Phi^1$  вектор-функцию  $\Phi^3$  можно из формулы (3.424) исключить.

Действительно, подставляя в формулу (3.424)  $\tau_1 = \omega_1^{-1}$ ;  $\tau_2 = \omega_2^{-1}$  и группируя члены, содержащие  $\Phi^1$  и  $\Phi^3$ , получаем

$$u = \frac{1}{\omega_2^2 + \omega_1} \{ \omega_2^2 \omega_1 (\Phi^1 + \Phi^3) + \omega_2^2 \hat{u} + \omega_1 Q(\Phi^2) \}, \quad (3.426)$$

где  $Q(\Phi^2)$  — выражение, содержащее неопределенную компоненту  $\Phi^2$ . Из формулы (3.426) видно, что, вообще, можно положить  $\Phi^3 \equiv 0$ . В результате приходим к структуре решения смешанной краевой задачи теории упругости (3.421), (3.422) в виде

$$u = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2^2} \left\{ \omega_2^2 \omega_1 \Phi^1 + \omega_2^2 \hat{u} + \omega_1 \left\{ \Phi^2 + \frac{\omega_2}{\mu(\lambda + 2\mu)} [\mu \nabla \omega_2 (\hat{\Phi} \nabla \omega_2) + (\lambda + 2\mu) \nabla \omega_2 \times (\hat{\Phi} \times \nabla \omega_2)] \right\} \right\}. \quad (3.427)$$

**4. Структура решения пространственной контактной задачи теории упругости при отсутствии трения.** Предполагается, что на участке  $\partial\Omega_1$  границы  $\partial\Omega$  известна только нормальная составляющая вектора перемещений, а касательные напряжения равны нулю. Это приводит к крайним условиям

$$u_{(v)}|_{\partial\Omega_1} = u_0; \quad (3.428)$$

$$N(u)_{[\tau]}|_{\partial\Omega} = H^0, \quad (3.429)$$

$$N(u)_{(v)}|_{\partial\Omega_1} = Q_0^{(2)}, \quad (3.430)$$

где индексы  $(v)$  и  $[\tau]$  означают соответственно проектирование на нормальное направление и касательную плоскость к  $\partial\Omega$ ,  $u_0$  и  $Q_0^{(2)}$  — известные функции, а  $H^0$  — известный вектор. Для простоты рассуждений будем считать, что  $u_0$ ,  $Q_0^{(2)}$  и  $H^0$  уже продолжены в замкнутую область  $\Omega \cup \partial\Omega$  и достаточно гладкие.

Пусть  $\partial\Omega_1 = (\omega_1 = 0)$ ;  $\partial\Omega_2 = (\omega_2 = 0)$ ;  $\partial\Omega = (\omega = 0)$ , причем функции  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega$  нормализованы на соответствующих участках границы до первого порядка и положительны внутри  $\Omega$ . Для удобства выкладок положим

$$H^0 = \begin{cases} H^{01}, & x \in \partial\Omega_1; \\ H^{02}, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.431)$$

и введем функцию

$$Q_0 = \begin{cases} Q_0^{(1)}, & x \in \partial\Omega_1, \\ Q_0^{(2)}, & x \in \partial\Omega_2, \end{cases} \quad (3.432)$$

где  $Q_0^{(1)}$  — неизвестная функция.

Структуру решения смешанной задачи (3.428) — (3.430) найдем в виде

$$u = \Phi^0 + \omega_1 \Psi^1 + \omega \Psi, \quad (3.433)$$

где  $\Phi^0$ ,  $\Psi^1$  и  $\Psi$  — неопределенные функции. Условие (3.428) будет удовлетворяться при любых векторах  $\Psi^1$  и  $\Psi$ , если положить

$$\Phi^0 = u_0 \nabla \omega_1 + \nabla \omega_1 \times (\Phi^1 \times \nabla \omega_1), \quad (3.434)$$

где  $\Phi^1$  — произвольная вектор-функция. Действительно, учитывая, что второе слагаемое в формуле (3.434) ортогонально  $\nabla \omega_1$  и  $|\nabla \omega_1|_{\partial \Omega_1} = 1$ , получаем

$$\begin{aligned} u_{(v)}|_{\partial \Omega_1} &= (u \nabla \omega_1)|_{\partial \Omega_1} = (\Phi^0 \nabla \omega_1)|_{\partial \Omega_1} = \\ &= u_0 |\nabla \omega_1|^2 + [\nabla \omega_1 \times (\Phi^1 \times \nabla \omega_1)] \nabla \omega_1|_{\partial \Omega_1} = u_0. \end{aligned} \quad (3.435)$$

Используя формулу (3.408), найдем нормальное напряжение на участке  $\partial \Omega_1$ :

$$\begin{aligned} N(u) \nu|_{\partial \Omega_1} &= N^*(u) (-\nabla \omega_1)|_{\partial \Omega_1} = (\lambda + 2\mu) \nabla \omega_1 (\Psi^1 + \Psi) + \\ &+ \lambda \operatorname{div} \Phi^0 - 2\mu D_1^{(1)} \Phi^0, \end{aligned} \quad (3.436)$$

где  $D_1^{(1)} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3}$ . Потребуем, чтобы на участке  $\partial \Omega_1$  выполнялось условие

$$(\Psi \nabla \omega_1)|_{\partial \Omega_1} = 0. \quad (3.437)$$

Функцию  $Q_0^{(1)}$ , входящую в формулу (3.432), определим равенством

$$Q_0^{(1)} = 2\mu [\nabla \omega_1 D_1^{(1)} \Phi^0 + \Delta \omega_1 \Psi^1] + \lambda (\operatorname{div} \Phi^0 + \nabla \omega_1 \Psi^1). \quad (3.438)$$

С учетом последней формулы построим вспомогательный вектор

$$H = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} [(H^{01} - Q_0^{(1)} \nabla \omega_1) \omega_2 + (H^{02} - Q_0^{(2)} \nabla \omega_1) \omega_1]. \quad (3.439)$$

Этот вектор не зависит от функции  $\Psi$  и на  $\partial \Omega$  является вектором напряжений. Действительно, из формулы (3.439) следует

$$H|_{\partial \Omega} = \begin{cases} Q_0^{(1)} \nu + H^{01}, & x \in \partial \Omega_1; \\ Q_0^{(2)} \nu + H^{02}, & x \in \partial \Omega_2. \end{cases} \quad (3.440)$$

Если предположим вектор  $H$  известным на всей границе  $\partial \Omega$ , то приходим к первой основной задаче теории упругости, для которой структура решения была построена в п. 2. Используя эти результаты, найдем

$$\Psi = \frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)} [\mu \nabla \omega (\Phi^* \nabla \omega) + (\lambda + 2\mu) \nabla \omega \times (\Phi^* \times \nabla \omega)] + \omega \Psi^2, \quad (3.441)$$

где  $\Psi^2$  — неопределенная вектор-функция, а  $\Phi^*$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \Phi^* &= -2\mu D_1^{(1)} (\Phi^0 + \omega_1 \Psi^1) - \lambda \nabla \omega \operatorname{div} (\Phi^0 + \omega_1 \Psi^1) - \\ &- \mu |\nabla \omega \times \operatorname{rot} (\Phi^0 + \omega_1 \Psi^1)| - H. \end{aligned} \quad (3.442)$$



Подставляя полученное выражение для  $\Psi$  в формулу (3.433), получаем требуемую структуру решения:

$$u = \Phi^0 + \omega_1 \Psi^1 + \frac{\omega}{\mu(\lambda + 2\mu)} [\mu \nabla \omega (\Phi^* \nabla \omega) + (\lambda + 2\mu) \nabla \omega \times (\Phi^* \times \nabla \omega)] + \omega^2 \Psi^2. \quad (3.443)$$

Остается проверить выполнение условия (3.437). Для этого найдем выражение для вектора  $\Phi^*$  на участке  $\partial\Omega_1$ . Вычисления приводят к равенству

$$(\Phi^* |_{\partial\Omega_1} = -2\mu (D_1^{(1)} \Phi^0 + \Psi^1) - \lambda \nabla \omega \operatorname{div} \Phi^0 - \lambda \nabla \omega (\Psi^1 \nabla \omega_1) - \mu [\nabla \omega \times \operatorname{rot} \Phi^0 + \nabla \omega \times (\Psi^1 \times \nabla \omega_1)] - (H_0^{(1)} - Q_0^{(1)} \nabla \omega_1).$$

Подставляя это выражение в формулу (3.441), получаем

$$\begin{aligned} \Psi |_{\partial\Omega_1} = & -\frac{2\mu \nabla \omega}{\lambda + 2\mu} [(D_1^{(1)} \Phi^0 + \Psi^1) \nabla \omega] - \frac{\lambda \nabla \omega}{\lambda + 2\mu} (\operatorname{div} \Phi^0 + \\ & + \nabla \omega_1 \Psi^1) + \frac{\nabla \omega}{\lambda + 2\mu} Q_0^{(1)} - 2 \nabla \omega \times [(D_1^{(1)} \Phi^0 + \Psi^1) \times \nabla \omega] - \\ & - \frac{\nabla \omega}{\mu} \times (H_0^{(1)} \times \nabla \omega) + \Delta \omega \times [\nabla \omega \times (\operatorname{rot} \Phi^0 + \Psi^1 \times \nabla \omega_1)]. \end{aligned}$$

Из этой формулы видно, что вектор  $\Psi$  на части границы  $\partial\Omega_1$  не равен, вообще, нулю. Найдем его нормальную составляющую на участке  $\partial\Omega_1$ :

$$\begin{aligned} (\Psi \nabla \omega) |_{\partial\Omega_1} = & -\frac{1}{\lambda + 2\mu} [2\mu (D_1^{(1)} \Phi^0 + \Psi^1) \nabla \omega + \\ & + \lambda (\operatorname{div} \Phi^0 + \Psi^1 \nabla \omega_1) - Q_0^{(1)}]. \end{aligned} \quad (3.444)$$

Подставляя в эту формулу выражение (3.438) для  $Q_0^{(1)}$ , находим

$$\begin{aligned} (\Psi \nabla \omega) |_{\partial\Omega_1} = & -\frac{1}{\lambda + 2\mu} [2\mu (D_1^{(1)} \Phi^0 + \Psi^1) \nabla \omega + \lambda (\operatorname{div} \Phi^0 + \\ & + \Psi^1 \nabla \omega_1) - 2\mu (D_1^{(1)} \Phi^0 + \Psi^1) \nabla \omega_1 + \lambda (\operatorname{div} \Phi^0 + \nabla \omega_1 \Psi^1)] |_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условие (3.437) действительно выполняется.

Описанные выше подходы к построению структур решений различных типов краевых задач объединяет то, что во всех случаях решение находят в виде разложения по степеням функций  $\omega$  и  $\omega_1$ .

### § 13. Учет условий на границе сред с различными физическими характеристиками

Пусть тело  $\Omega$  состоит из двух (рис. 107, а) или больше (рис. 107, б) частей с различными физическими характеристиками. В задаче теплопроводности это могут быть коэффициенты теплопроводности, в электростатике — диэлектрические проницаемости, в теории упругости — упругие постоянные. (В общем случае эти

характеристики являются тензорами.) В этом случае кроме краевых условий на границе рассматриваемого тела  $\Omega$  появляются также условия стыковки на границах  $\partial\Omega_{ij}$  между составляющими его частями. Вид этих условий определяется в зависимости от физической постановки задачи. Например, в задачах теплопроводности и электростатики встречаются условия вида

$$u_i|_{x=0} = u_j|_{x+0}; \quad (3.445)$$

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial v_i} \Big|_{x=0} = \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial v_j} \Big|_{x+0} \quad (x \in \partial\Omega_{ij}), \quad (3.446)$$

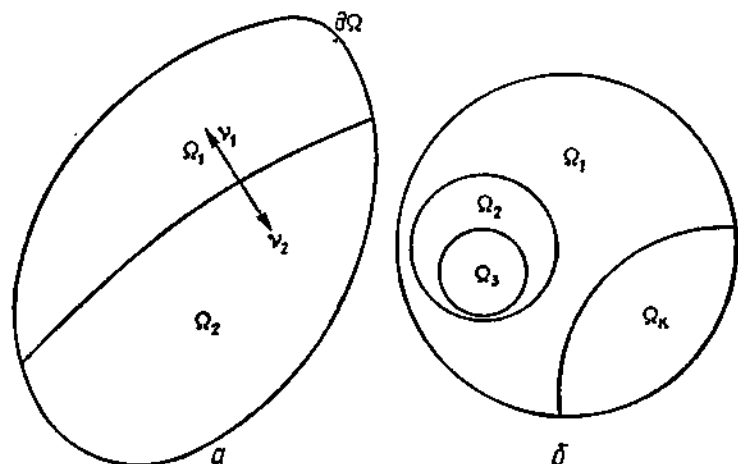


Рис. 107.

где  $u_i, u_j$  — решения в подобластях  $\Omega_i, \Omega_j$ ;  $\lambda_i$  и  $\lambda_j$  — их физические характеристики;  $v_i, v_j$  ( $v_i = -v_j$ ) — нормали к общей границе  $\partial\Omega_{ij}$  между ними;  $x=0$  и  $x+0$  означают стремление к точке  $x \in \partial\Omega_{ij}$  со стороны областей  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  соответственно. Условия (3.446) рассматривались в работах многих авторов [6, 72, 134—137]. Более сложная ситуация возникает в том случае, когда среда характеризуется несколькими параметрами. Так, в работах [34, 185] рассматривается двухмерное магнитное поле в кусочно-

однородной среде, где  $\bar{\sigma}_i = \sigma_{\mu i} \begin{pmatrix} 1 - \beta_i & \\ \beta_i & 1 \end{pmatrix}$  локальный тензор проводимости в каждой из сред  $\Omega_i$ ,  $\sigma_{\mu i} = \sigma_i (1 + \beta_i^2)^{-1}$ ,  $\sigma_i, \beta_i$  — проводимости и параметры Холла. В этом случае для искомого электрического потенциала (как и для функции тока) наряду с условием (3.445) появляется вместо условия (3.446) условие более общего вида:

$$\left( a_i \frac{\partial u_i}{\partial v_i} + b_i \frac{\partial u_i}{\partial \tau_{ij}} \right) \Big|_{x=0} = \left( a_j \frac{\partial u_j}{\partial v_j} + b_j \frac{\partial u_j}{\partial \tau_{ij}} \right) \Big|_{x+0}, \quad (3.447)$$

где постоянные  $a_i, b_i, a_j, b_j$  определяются через названные выше физические характеристики сред, а  $\tau_{ij}$  — касательная к  $\partial\Omega_{ij}$ .

Различные типы условий стыковки встречаются в задачах теории упругости [175]. Один тип таких условий появляется, например, когда части  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  спаяны между собой. При этом вместо условия (3.445) получаем условие равенства на  $\partial\Omega_i$  векторов перемещений  $u^i$  и  $u^j$ , а условия (3.446) заменяются условиями равенства напряжений, которые согласно (3.408) представляют собой линейные комбинации частных производных от компонент векторов  $u^i$  и  $u^j$  соответственно, т. е. приходим к условиям вида

$$u_s^i|_{x=0} = u_s^j|_{x=0}; \quad (3.448)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^3 \left( a_{ms}^i \frac{\partial u_s^i}{\partial v_i} + b_{ms}^{i1} \frac{\partial u_s^i}{\partial \tau_{i1}} + b_{ms}^{i2} \frac{\partial u_s^i}{\partial \tau_{i2}} \right) \Big|_{x=0} = \\ & = \sum_{s=1}^3 \left( a_{ms}^j \frac{\partial u_s^j}{\partial v_j} + b_{ms}^{j1} \frac{\partial u_s^j}{\partial \tau_{j1}} + b_{ms}^{j2} \frac{\partial u_s^j}{\partial \tau_{j2}} \right) \Big|_{x=0}, \end{aligned} \quad (3.449)$$

где  $a$  и  $b$  (с индексами) — известные постоянные, выраженные через упругие постоянные сред,  $\tau_{k1}$ ,  $\tau_{k2}$  ( $k = i, j$ ) — касательные направления к  $\partial\Omega_{ij}$ . Задача несколько усложняется, если упругие тела  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  находятся в состоянии контакта по границе  $\partial\Omega_{ij}$  и допускается проскальзывание вдоль  $\partial\Omega_{ij}$  (с трением или без трения). Наиболее сложной ситуация становится в том случае, когда возможно нарушение контакта между телами  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$ . При этом граница участка контакта  $\partial\Omega_{ij}$  становится, вообще, неизвестной. Аналогичные усложнения возможны и в других задачах, связанных с расчетом полей. Например, в задаче теплопроводности (или электропроводности) на участке  $\partial\Omega_{ij}$  контакта тел  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  может находиться тонкая активно проводящая, непроводящая или частично проводящая тепло (или электрический ток) пленка. То же можно сказать и о задачах об изгибе пластин.

Однако, несмотря на многообразие ситуаций стыковки, описанный в предыдущих параграфах общий подход к построению структур решений краевых задач может быть применен и для учета многих типовых условий стыковки. Решению этого вопроса посвящены работы многих авторов [72, 106, 134—137, 185].

1. Рассмотрим наиболее простую из задач (3.445) — (3.446), при условии, что тело  $\Omega$  состоит всего лишь из двух частей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (см. рис. 107, а). Краевые условия на внешней границе тела  $\Omega$  могут быть любого из типов, рассмотренных в § 10. (Для нас важно лишь то, что в эти условия входят производные по нормали не более чем первого порядка.) Сформулированная задача позволит проследить основные идеи, на которых базируются применяемые в настоящее время подходы к построению структур решений, учитывающих условия стыковки.

Первая идея, предложенная в работе [72] и развитая в ряде других работ [134—137, 185], основана на специальной замене переменных. А именно, построив структуру решения  $u = B(\Phi)$ , учитывающую все краевые условия на внешней границе  $\partial\Omega$ , заменим

затем в ней текущие координаты  $x_1, x_2$  соответственно выражениями вида

$$\begin{aligned} x_1 + \omega^2(x_1, x_2)\alpha(x_1, x_2); \\ x_2 + \omega^2(x_1, x_2)\beta(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (3.450)$$

где  $\alpha, \beta \in C^2 [(\Omega \cup \partial\Omega) \setminus \partial\Omega_{12}]$  — некоторые функции, выбираемые специальным образом, а  $\omega = 0$ ,  $\omega \in C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$ , — уравнение  $\partial\Omega$ . Результат замены обозначим  $B^*(\Phi^*)$ . Множитель  $\omega^2(x_1, x_2)$ , стоящий при  $\alpha$  и  $\beta$  в формулах (3.450), обеспечивает равенство выражений  $B(\Phi)$  и  $B^*(\Phi^*)$  и их частных производных до первого порядка на  $\partial\Omega$ . Вследствие этого формулы  $B^*(\Phi^*)$  и  $B(\Phi)$  удовлетворяют на  $\partial\Omega$  одним и тем же краевым условиям. Таким образом, в формуле  $B^*(\Phi^*)$  остается лишь выбрать функции  $\alpha(x_1, x_2)$  и  $\beta(x_1, x_2)$  так, чтобы удовлетворить условиям стыковки (3.445), (3.446) на  $\partial\Omega_{12}$ .

Очевидно, что условие (3.445) будет выполнено, если  $\alpha$  и  $\beta$  — непрерывные функции. Для выполнения условия (3.446) необходимо, чтобы по нормали к  $\partial\Omega_{12}$  эти функции имели разрыв первого рода.

Такой разрыв можно получить, используя нормализованное уравнение  $|\omega_{12}| = 0$  границы  $\partial\Omega_{12}$  между областями  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . (Знак модуля поставлен, чтобы подчеркнуть, что функция  $\omega_{12}$  в одной из подобластей положительна, а в другой — отрицательна.) В работе [72] показано, что функции  $\alpha$  и  $\beta$  можно выбрать в виде

$$\alpha = \gamma \frac{\omega^2 |\omega_{12}|}{\omega^2 + \omega_{12}^2} \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_1}; \quad \beta = \gamma \frac{\omega^2 |\omega_{12}|}{\omega^2 + \omega_{12}^2} \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_2}; \quad \gamma = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}. \quad (3.451)$$

Чтобы убедиться в этом, примем для определенности, что  $\omega_{12} > 0$  в  $\Omega_1$  и  $\omega_{12} < 0$  в  $\Omega_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma |\omega_{12}| \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_1} + O(\omega_{12}^3); \quad \beta = \gamma |\omega_{12}| \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_2} + O(\omega_{12}^3); \\ \frac{\partial \omega_{12}}{\partial v_1} &= -\frac{\partial \omega_{12}}{\partial v_2} = 1 + O(\omega_{12}); \quad \frac{\partial |\omega_{12}|}{\partial v_1} = \frac{\partial |\omega_{12}|}{\partial v_2} = 1 + O(\omega_{12}); \end{aligned} \quad (3.452)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial v_1} = -\frac{\partial x_1}{\partial v_2} = \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_1} + O(\omega_{12}); \quad \frac{\partial x_2}{\partial v_1} = -\frac{\partial x_2}{\partial v_2} = \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_2} + \\ + O(\omega_{12}). \end{aligned}$$

Обозначив  $B^*(\Phi^*) = F(x_1 + \alpha, x_2 + \beta)$  и подставив это выражение в левую часть формулы (3.446), получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial v_1} F(x_1 + \alpha, x_2 + \beta) \Big|_{x=0} = \lambda_1 \left[ \frac{\partial F(x_1 + \alpha, x_2 + \beta)}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_1} + O(\omega_{12}) \right) + \frac{\partial F(x_1 + \alpha, x_2 + \beta)}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_2} + \gamma \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_2} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + O(\omega_{12}) \Big|_{x \rightarrow 1} = \lambda_1 (1 + \gamma) \left[ \frac{\partial F(x_1 + \alpha, x_2 + \beta)}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_1} + \right. \right. \\
& \left. \left. + O(\omega_{12}) \right) + \frac{\partial F(x_1 + \alpha, x_2 + \beta)}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_2} + O(\omega_{12}) \right) \right] = \\
& = \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[ \frac{\partial F(x_1 + \alpha, x_2 + \beta)}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_1} + O(\omega_{12}) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial F(x_1 + \alpha, x_2 + \beta)}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_2} + O(\omega_{12}) \right) \right] = \\
& = -\lambda_2 \left[ \frac{\partial F(x_1 + \alpha, x_2 + \beta)}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_1} (1 - \gamma) + O(\omega_{12}) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial F(x_1 + \alpha, x_2 + \beta)}{\partial x_2} \left( -\frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_2} (1 - \gamma) + O(\omega_{12}) \right) \right] = \\
& = -\lambda_2 \frac{\partial}{\partial v_2} F(x_1 + \alpha, x_2 + \beta) \Big|_{x \rightarrow 0},
\end{aligned}$$

т. е. приходим к равенству (3.446).

2. Приведенный в п. 1 результат допускает различные обобщения для нескольких подобластей. Пусть, например, подобласти  $\Omega_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) области  $\Omega_0$  расположены так, как показано на рис. 108, а. Чтобы обеспечить стыковочные условия (3.445), (3.446) для этого случая (в области  $\Omega_i$   $\lambda = \lambda_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ ), достаточно в выражениях (3.450) положить  $\omega = \omega_0$ , а

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left[ \sum_{s=1}^k \gamma_s \frac{\omega_0^2 |\omega_s|}{\omega_0^2 + \omega_s^2} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_1} \tau_s^2 \right] \left[ \sum_{s=1}^k \tau_s^2 \right]^{-1}; \\
\beta &= \left[ \sum_{s=1}^k \gamma_s \frac{\omega_0^2 |\omega_s|}{\omega_0^2 + \omega_s^2} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_2} \tau_s^2 \right] \left[ \sum_{s=1}^k \tau_s^2 \right]^{-1}; \quad (3.453)
\end{aligned}$$

$$\gamma_s = (\lambda_0 - \lambda_s) (\lambda_0 + \lambda_s)^{-1}, \quad (3.454)$$

где  $\tau_s = \omega_s^{-1}$  ( $s = 1, \dots, k$ ). Нетрудно видеть, что здесь применена формула склейки (3.262) по отношению к формулам (3.451) для  $\alpha$  и  $\beta$ , в которых введены индексы, соответствующие индексам каждой пары подобластей. Поскольку формула (3.262) при вторых степенях  $\tau_s$  сохраняет не только значения функций на  $\partial\Omega_s$ , но и значения их первых производных, то все сказанное в п. 1 справедливо и в этом случае.

Для расположения подобластей, изображенных на рис. 108, б, выражения (3.453) также пригодны, но следует положить

$$\gamma_s = \frac{\lambda_{s-1} - \lambda_s}{\lambda_{s-1} + \lambda_s}. \quad (3.455)$$

В общем случае (рис. 108, в) в формулах (3.453) необходимо комбинировать формулы (3.454) и (3.455).

3. Приведем еще один вариант построения функций  $\alpha$  и  $\beta$  для упоминавшейся замены переменных (3.450), который, по-видимому, наиболее простой в алгоритмическом отношении.

Пусть область  $\Omega_0 = (\omega_0 \geq 0)$  есть соединение подобластей  $\Omega_i = (\omega_i \geq 0)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) таких, что  $\text{int } \Omega_i \cap \text{int } \Omega_j = \emptyset$  для всех  $i, j = 1, \dots, k, i \neq j$ . Предположим, что каждая подобласть  $\partial\Omega_i$  характеризуется своей физической константой  $\lambda_i$ , а в точках  $\partial\Omega_{ij}$  (рис. 108, з), которые являются граничными для подобластей  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$ , выполняются условия стыковки (3.445), (3.446). Уравнения  $\omega_i = 0$  границ подобластей  $\Omega_i$  построим таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\omega_i > 0, x \in \Omega_i; \quad \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial \nu_i} \right|_{\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega} = 1; \quad (3.456)$$

$$\omega_i |_{\partial\Omega_0} = \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial \nu_i} \right|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad (3.457)$$

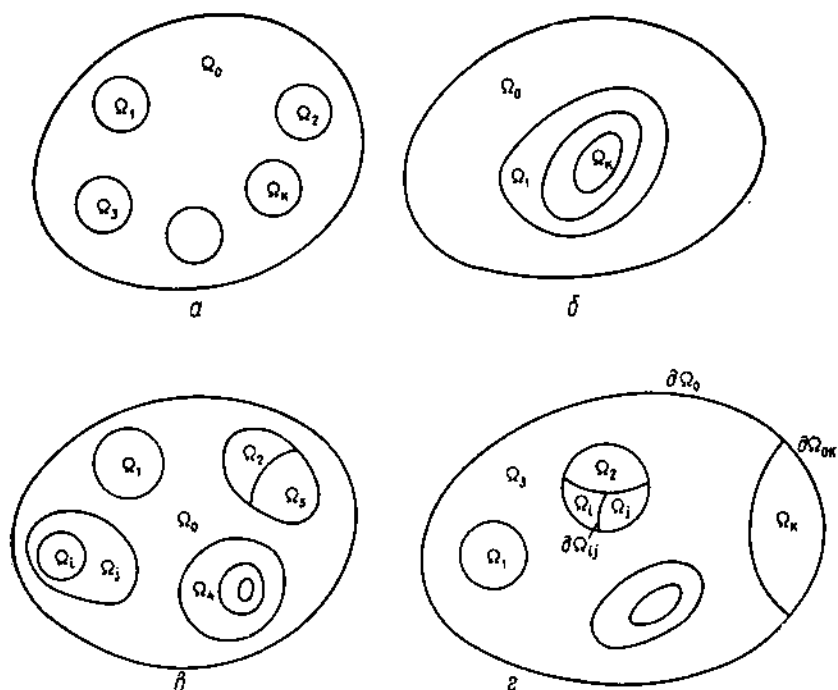


Рис. 108.

где  $\nu_i$  — внутренняя нормаль к  $\partial\Omega_i$ , а  $\partial\Omega_{0i} = \partial\Omega \cap \partial\Omega_i$ . (Последнее условие предполагается выполненным, если  $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset$ .) Заметим, что условие (3.456) является обычным условием нормализованности уравнения  $\omega_i = 0$  до первого порядка. Но теперь оно предполагается выполненным лишь в тех точках границы  $\partial\Omega_i$ , которые не принадлежат внешней границе  $\partial\Omega$ . В последних согласно условию (3.457) функция  $\omega_i$  является величиной второго порядка малости. Оказывается, условия стыковки (3.445), (3.446) будут выполнены, если в структуру  $B(\Phi) = F(x_1, x_2)$  вместо  $x_1, x_2$  под-

ставить соответственно выражения

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i - A_0}{\lambda_i} \frac{|\omega_i| + \omega_i}{2} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1}; \\ x_2 &= \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i - A_0}{\lambda_i} \frac{|\omega_i| + \omega_i}{2} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (3.458)$$

где  $A_0 > 0$  — произвольное число. Нетрудно заметить, что  $1/2(|\omega_i| + \omega_i) \equiv 0$  вне  $\Omega_i$ , поэтому фактически в каждой из подобластей  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) осуществляется подстановка вместо  $x_1, x_2$  выражений

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\lambda_i - A_0}{\lambda_i} \omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1}; \\ x_2 &= \frac{\lambda_i - A_0}{\lambda_i} \omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (3.459)$$

соответственно. Полученная структура в  $\Omega_i$  будет иметь вид

$$B^*(\varphi) \equiv F \left( x_1 - \frac{\lambda_i - A_0}{\lambda_i} \omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1}, x_2 - \frac{\lambda_i - A_0}{\lambda_i} \omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2} \right). \quad (3.460)$$

Вследствие того что  $\omega_i$  есть величина второго порядка малости на  $\partial\Omega_{\alpha_i}$  (если  $\Omega_{\alpha_i} \neq \emptyset$ ), формула (3.460) будет удовлетворять тем же крайевым условиям на  $\partial\Omega_0$ , что и  $B(\Phi) = F(x_1, x_2)$ . Остается проверить выполнение условий (3.445), (3.446). Дифференцируя (3.460) по нормали к  $\partial\Omega_i$ , получаем

$$\begin{aligned} \lambda_i \frac{\partial}{\partial v_i} B^*(\varphi) &= \lambda_i \left\{ \frac{\partial F \left( x_1 - \alpha_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1}, x_2 - \alpha_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2} \right)}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1} - \right. \right. \\ &- \left. \frac{\lambda_i - A_0}{\lambda_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1} + O(\omega_i) \right] + \frac{\partial F \left( x_1 - \alpha_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1}, x_2 - \alpha_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2} \right)}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2} - \right. \\ &\left. \left. - \frac{\lambda_i - A_0}{\lambda_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2} + O(\omega_i) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.461)$$

где  $\alpha_i = \frac{\lambda_i - A_0}{\lambda_i} \omega_i$ . При написании формулы учтено, что  $\frac{\partial x_k}{\partial v_i} = \cos(x_k, v_i) = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + O(\omega_i)$  ( $k = 1, 2$ ). Кроме того, считается, что выражение

$$\frac{\partial F \left( x_1 - \alpha_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1}, x_2 - \alpha_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2} \right)}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2)$$

есть результат подстановки в выражение  $\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_k}$  ( $k = 1, 2$ ) вместо  $x_1, x_2$  выражений  $x_1 - \alpha_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1}, x_2 - \alpha_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2}$  соответственно.

Переходя в формуле (3.461) к пределу при  $\omega_i \rightarrow 0$ , получаем

$$\lambda_i \frac{\partial}{\partial v_i} B^*(\Phi) \Big|_{\partial \Omega_i} = \lambda_i \left( 1 - \frac{\lambda_i - A_0}{\lambda_i} \right) \left( \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2} \right) \Big|_{\partial \Omega_i} = A_0 \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial v_i} \Big|_{\partial \Omega_i}. \quad (3.462)$$

Аналогично получаем

$$\lambda_i \frac{\partial}{\partial v_i} B^*(\Phi) \Big|_{\partial \Omega_i} = A_0 \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial v_i}. \quad (3.463)$$

Сравнивая (3.462) и (3.463), получаем условие (3.446). Выполнение условия (3.445) следует из непрерывности функций (3.458).

Заметим, что постоянную  $A_0 > 0$  можно выбрать произвольно. Например, можно принять  $A_0 = \lambda_1$ , и тогда в области  $\Omega_i$  будет выполняться тождество  $B^*(\Phi) \equiv B(\Phi)$ . Возможно также, что при численной реализации с целью уменьшения «контрастов» в параметрах рационально выбирать  $A_0 = \frac{1}{k} (\lambda_1 + \dots + \lambda_k)$ . Аналогичные замены можно осуществлять и для условий стыковки (3.445) — (3.447). Один из примеров будет приведен в § 12 гл. 4.

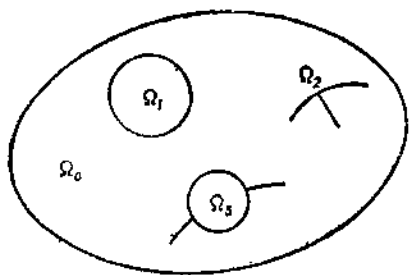


Рис. 109.

*Упражнения и задачи. 1.* Методику, описанную в п. 3 настоящего параграфа, перенести на стыковочные условия (3.445), (3.447), (3.449).

2. Исследовать случаи вырождения подобластей  $\Omega_i$  в тонкие щели (рис. 109).

3. Какие стыковочные условия должны удовлетворяться в угловых точках подобластей  $\Omega_i$  и в точках, общих для нескольких подобластей?

4. Привести пример краевой задачи, в которой на линиях внутри области возможны разрывы значений искомой функции, но выполняется условие равенства ее производных по нормали.

## § 14. Методы нахождения неопределенных компонент.

### Проблема выбора аппроксимирующих полиномов

1. Краевые задачи удается решать точно лишь для немногих ситуаций. Особенно это касается краевых задач для уравнений с частными производными, в постановке которых, как уже отмечалось в § 9, есть два разнородных вида входной информации — аналитический и геометрический. Всякий метод решения таких задач должен предусматривать учет обоих видов информации, а это возможно лишь на основе полного перехода к аналитическому уровню задания информации. При этом не всякое кодирование геометрической информации годится.



Описанный в предыдущих параграфах метод построения структур решений краевых задач представляет собой конструктивное решение проблемы преобразования геометрической информации в аналитическую. Располагая, например, структурой решения

$$u = B(\Phi, \omega, \omega_i), \quad (3.464)$$

учитывающей заданные краевые условия, необходимо выбрать только неопределенную компоненту  $\Omega$  пучка (3.464) в некотором достаточно широком для каждого конкретного случая своем функциональном пространстве  $\mathfrak{M}$  из соображений наилучшего (в том или ином смысле) удовлетворения основному уравнению (3.263). Напомним, что (3.263) может быть и системой уравнений. И, вообще, искомая величина  $u$  может быть функцией, вектор-функцией, тензором и т. д.

Если (3.464) удовлетворяет основному уравнению и, возможно, части краевых условий (3.264), то задача опять сводится к нахождению такой неопределенной компоненты  $\Phi$ , чтобы как можно лучше удовлетворялись остальные краевые условия.

Для подавляющего большинства приближенных методов характерно сведение бесконечномерной задачи к конечномерной. В данном случае это достигается представлением компоненты  $\Phi$  в виде полинома

$$\Phi(x) \approx \Phi_N(x) = \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i(x), \quad (3.465)$$

где  $\{\varphi_i\}$  — известные элементы некоторого функционального пространства  $\mathfrak{M}$ , содержащего  $\Phi$ , образующие в нем полную (в том или ином смысле) последовательность. Например, если  $\Phi$  есть функция из  $C^k(\Omega \cup \partial\Omega)$ ,  $H^k(\Omega \cup \partial\Omega)$  или другого аналогичного пространства, то в качестве  $\{\varphi_i\}$  можно взять степенные полиномы (обычные, Чебышева, Лежандра и т. д.), тригонометрические полиномы, сплайны [56, 166], атомарные функции [123—128] и т. д.

Если подставим (3.465) в (3.464), то придем к формуле вида

$$u = B_1(x, C_1, \dots, C_N), \quad (3.466)$$

а для линейных краевых условий к формуле

$$u = \sum_{i=1}^N C_i \chi_i(x) + \chi_0(x), \quad (3.467)$$

где  $\{\chi_i(x)\}$  — известная функциональная последовательность. Формулы (3.466), (3.467) также являются структурами решения соответствующей краевой задачи, но неопределенная компонента — уже вектор  $(C_1, \dots, C_N)$ .

*Замечание 1.* Используя неоднородную часть  $\chi_0(x)$  формулы (3.467), легко перейти от краевой задачи (3.263), (3.264) с неоднородными краевыми условиями к краевой задаче

$$Av = f_i; \quad (3.468)$$

$$L_i v = 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (3.469)$$

с однородными краевыми условиями. Для этого достаточно сделать замену искомой функции

$$u = v + \chi_0(x), \quad (3.470)$$

а затем ввести обозначение  $f_1 = f - A\chi_0(x)$ . Заметим, что переход к однородным краевым условиям (3.469) часто имеет принципиальное значение. Во-первых, пространство функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям (если они, конечно, линейные), является линейным функциональным пространством, что немало важно с точки зрения теории. Во-вторых, задача (3.468), (3.469) существенно проще задачи (3.263), (3.264) с алгоритмической точки зрения.

*Замечание 2.* При выполнении преобразования (3.470) выбор функции  $\chi_0(x)$  можно осуществить не единственным образом. (Это соответствует неединственности возможных продолжений граничных значений внутрь области  $\Omega$ .) Например, можно взять  $\chi_0(x) = B(\Phi^*)$ , где  $\Phi^* \neq 0$ . При этом не всякий выбор функции  $\chi_0(x)$  пригоден. Например, может оказаться, что правая часть уравнения (3.468)  $f_1 = f - A\chi_0(x)$  является неинтегрируемой в области  $\Omega$ , а это лишено физического смысла. Поэтому необходим контроль за тем, какой получается неоднородная часть структуры решения, а неопределенную компоненту  $\Phi^*$  следует выбрать так, чтобы дифференциальные свойства функции  $f_1$  оказались достаточно хорошими. Такой выбор можно сделать, используя конструктивные средства теории  $R$ -функций, описанные в предыдущих параграфах. Исследования этого вопроса частично выполнялись в работах [50, 131, 187].

*Замечание 3.* Форма (3.467) представления приближенного решения характерна не только для метода  $R$ -функций, но и практически для всех приближенных методов. Для вариационных методов, о которых в данном параграфе речь будет идти ниже, предоставляемая методом  $R$ -функций возможность построения формул вида (3.467) для практически любых типов краевых условий и геометрии областей означает преодоление основной трудности, возникающей при построении координатных функций (называемых иногда «базисными» или «пробными»). Полнота функций (3.467), получаемых методом  $R$ -функций, может быть доказана при весьма общих допущениях [48, 52—54, 127, 128]. О некоторых специальных ситуациях, возникающих при наличии различного рода вырождений геометрического характера, будет сказано далее (§ 17).

2. Перейдем к характеристике основных методов, применяемых для нахождения неопределенных коэффициентов  $C_1, \dots, C_N$ .

**Метод штрафов.** Этот метод основан на следующей, по-видимому, простейшей идее приближенного решения краевой задачи (3.263), (3.264). Пусть  $u = \Phi(x)$  — структура, не учитывающая

ни основного уравнения (3.263), ни краевых условий, где  $\Phi(x)$  затем будет аппроксимироваться полиномом (3.465).

Составим функционал

$$I(u) = \int_{\Omega} (Au - f)^2 d\Omega + \sum_{i=1}^m \int_{\partial\Omega_i} M_i (L_i u - \varphi_i)^2 d\Gamma_i, \quad (3.471)$$

где  $d\Gamma_i = d\partial\Omega_i$ , а  $M_i > 0$  — некоторые множители. Очевидно, если  $u$  — точное решение краевой задачи, то  $I = 0$ . Для остальных функций  $I(u) > 0$ . Таким образом, минимум функционала  $I(u)$  достигается на точном решении краевой задачи (3.263), (3.264) и в принципе можно, подставив в функционал (3.471) полином (3.465), находить затем коэффициенты  $C_i$  из условия минимума функционала  $I(u)$ . В данном случае это квадратичный функционал и соответствующая ему система уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3.472)$$

является линейной относительно  $C_1, \dots, C_N$ . (Другие варианты метода штрафов получаются при добавлении слагаемых со штрафными множителями к другим функционалам, о которых речь будет идти ниже.)

Казалось бы, описанный подход решает проблему в целом и нет нужды заботиться о том, чтобы удовлетворять краевым условиям или искать какие-то другие методы приближенного решения краевых задач. Однако, к сожалению, это не так. Во-первых, в методе штрафов не ясно, как выбирать множители  $M_i$  («штрафные коэффициенты»). Если эти множители достаточно велики по модулю, то основным по значению в формуле (3.471) будет второе слагаемое и аппроксимирующий полином (3.465) будет «мало заботиться» об удовлетворении основного уравнения (3.263). При малых значениях  $M_i$  будут слабо учитываться краевые условия. Таким образом, есть какой-то оптимальный выбор множителей  $M_i$ , который можно осуществить в каждом конкретном случае на основе численных экспериментов. Дело усложняется и тем, что в формуле (3.471) множители  $M_i$  не обязательно должны быть константами — это могут быть (для того чтобы приближения получались достаточно хорошими) и строго положительные функции, определенные на  $\partial\Omega_i$ . Выбор же функций экспериментальным путем существенно более сложная задача. Во-вторых, указанная выше неопределенность в выборе множителей  $M_i$  накладывает свой отпечаток на систему (3.472): неудачный выбор  $M_i$  приводит к ее плохой обусловленности.

К сказанному добавим, что в методе штрафов, учитывая оном и основное уравнение, и краевые условия лишь в интегральном смысле, нельзя гарантировать хороший тип сходимости (например, по метрике  $C(\Omega)$ ) приближенного решения к точному (при  $N \rightarrow \infty$ ).

Изложенное выше и явилось, по-видимому, основной причиной того, что с помощью метода штрафов решено лишь небольшое число задач (и притом сравнительно простых).

Применение метода  $R$ -функций существенно упрощает применение метода штрафов. В самом деле, структура решения  $u = B(\Phi)$  может быть построена так, чтобы краевые условия (3.264) удовлетворялись точно, и тогда в функционале (3.471) остается лишь первое слагаемое. Заботиться о выборе множителей  $M_i$  в этом случае нет необходимости.

**Метод коллокаций.** Пусть функция  $u = B_1(x, C_1, \dots, C_N)$  (3.466) удовлетворяет всем краевым условиям задачи. Подставив ее в уравнение  $Au - f = 0$ , найдем невязку

$$\delta(x, C_1, \dots, C_N) = AB_1(x, C_1, \dots, C_N) - f(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.473)$$

Необходимо выбрать постоянные  $C_1, \dots, C_N$  так, чтобы получить невязку, наименее уклоняющуюся от нуля.

Метод коллокаций состоит в следующем. Выберем в области  $\Omega$   $N$  точек  $\{x^j\}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , и потребуем, чтобы в этих точках невязка была равна нулю:

$$\delta(x^j, C_1, \dots, C_N) = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.474)$$

Приходим к системе  $N$  уравнений с  $N$  неизвестными. При этом если краевые условия линейны, то линейна и соответствующая формула  $B_1(x, C_1, \dots, C_N)$ . Если к тому же линейным является и уравнение  $Au - f = 0$ , то система (3.472) линейна относительно  $C_1, \dots, C_N$ .

Правомерность применения метода коллокаций многими исследователями ставится под сомнение (в особенности, если речь идет не об одномерных задачах). Во-первых, из равенства нулю невязки в  $N$  точках не следует, что невязка мала в остальных точках. Во-вторых, если невязка равна нулю в нескольких точках области  $\Omega$  (например, двухмерной), то вероятнее всего, что она равна нулю и на некоторых линиях, содержащих эти точки. А тогда при добавлении новых точек коллокации с ростом  $N$  будет возрастать и вероятность их попадания в малые окрестности этих линий. В результате новые уравнения будут почти удовлетворяться, а вся система в целом окажется плохо обусловленной. Более того, если невязка достаточно велика в сколь угодно малой подобласти  $\Omega_1 \subset \Omega$ , приближенное решение может сколь угодно сильно отличаться от точного. Например, краевая задача для уравнений  $y'' = 0$  в  $[-1, 1]$  с краевыми условиями  $y(\pm 1) = 0$  имеет точное решение  $y_0 \equiv 0$ . Если в качестве приближенного решения принять функцию

$$y_1 = \begin{cases} C \left(1 - \frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)^3, & |x| \leq \varepsilon; \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases} \quad (3.475)$$

то  $y_1 \in C^2[-1, 1]$ , а невязка отлична от нуля только на интервале  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . В то же время  $\max |y_0 - y_1| = C$ . Кроме того, в методе коллокаций неясен вопрос о том, как следует выбирать точки  $x^j$ .

Однако, несмотря на эти замечания, метод коллокаций привлекателен простотой вычислений, а также тем, что на практике после

вычисления постоянных  $C_j$  обычно нетрудно проследить характер невязки вне точек  $x^j$  и сделать заключение о погрешности решения.

Метод коллокаций допускает различные модификации. Одна из них состоит в том, что выбирается  $N_1 > N$  точек коллокаций  $x^j$ , а постоянные  $C_j$  находятся по методу наименьших квадратов, т. е. из условия минимума функции

$$q(C_1, \dots, C_N) = \sum_{j=1}^{N_1} \delta^2(x^j, C_1, \dots, C_N). \quad (3.476)$$

Если задача линейна, то соответствующая система уравнений

$$\frac{\partial q}{\partial C_k} = 2 \sum_{j=1}^{N_1} \delta(x^j, C_1, \dots, C_N) \frac{\delta(x^j, C_1, \dots, C_N)}{\partial C_k} = 0 \quad (3.477)$$

также линейна. Другой вариант метода коллокаций получим, если потребуем, чтобы в точках  $x^j$  были равны нулю невязка и ее производные до некоторого порядка.

**Метод наименьших квадратов.** Потребуем, чтобы квадрат нормы невязки по метрике

$$I(C_1, \dots, C_N) = \|\delta(x, C_1, \dots, C_N)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \delta^2(x, C_1, \dots, C_N) d\Omega \quad (3.478)$$

был минимален. Соответствующая система уравнений для нахождения  $C_j$  имеет вид

$$\frac{\partial I}{\partial C_k} = 2 \int_{\Omega} \delta(x, C_1, \dots, C_N) \frac{\partial \delta(x, C_1, \dots, C_N)}{\partial C_k} d\Omega = 0. \quad (3.479)$$

Если, как это обычно необходимо делать на практике, для вычисления интегралов прибегнуть к некоторой квадратурной формуле

$$\int_{\Omega} f(x) d\Omega \approx \sum_{j=1}^{N_1} \alpha_j f(x^j), \quad (3.480)$$

то придем к системе

$$\sum_{j=1}^{N_1} \alpha_j \delta(x^j, C_1, \dots, C_N) \frac{\partial \delta(x^j, C_1, \dots, C_N)}{\partial C_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, N), \quad (3.481)$$

совпадающей с точностью до весовых коэффициентов  $\alpha_j$  с системой (3.477) обобщенного метода коллокаций.

**Метод Бубнова — Галеркина.** Этот метод основан на требовании ортогональности невязки системе функций  $\chi_k(x)$  из (3.467):

$$(\delta(x, C_1, \dots, C_N), \chi_k(x)) = \int_{\Omega} \delta(x, C_1, \dots, C_N) \chi_k(x) d\Omega = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, N-1). \quad (3.482)$$

Если уравнение  $Au = f$  линейное, то эта система также линейная. Модификация метода Бубнова — Галеркина (метод Петрова) состоит в замене системы  $\{\chi_k\}$  некоторой другой полной в  $L_2(\Omega)$  системой функций  $\{\psi_k\}$ . В частности, в качестве функций  $\{\psi_k\}$  удобно взять характеристические функции областей  $\Omega_k$ ,  $\bigcup_{k=1}^N \Omega_k = \Omega$  (или финитные функции  $\alpha_k(x) \geq 0$  с носителями  $\Omega_k$ ). В этом случае система уравнений принимает вид

$$\int_{\Omega_k} \alpha_k \delta(x, C_1, \dots, C_N) d\Omega = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, N) \quad (3.483)$$

и после применения теоремы о среднем оказывается эквивалентной системе (3.474) метода коллокаций.

Применение описанных методов обеспечивает сходимость в среднем, а в некоторых случаях — равномерную сходимость к решению краевой задачи. Для улучшения типа сходимости можно вместо скалярного произведения (и соответствующей нормы) в  $L_2$  использовать скалярное произведение пространства  $H^s(\Omega)$ :

$$(u, v)_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq s} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)} \quad (s \geq 1). \quad (3.484)$$

(Естественно, что вычисления при этом существенно усложняются.)

**Метод Ритца.** Этот метод — один из наиболее употребительных. В нем краевая задача заменяется задачей о минимуме некоторого функционала  $I(u)$ . При этом обычно используются те или иные физические принципы, характеризующие данное физическое поле.

Если краевые условия (3.264) линейны и однородны (см. замечание 1), то множество функций, удовлетворяющих им, образует линейное пространство  $X(\Omega)$ . Предположим, что оператор  $A$  положителен на  $X(\Omega)$ , т. е.

$$(Au, u) \geq 0, \quad \forall u \in X(\Omega), \quad u \neq 0. \quad (3.485)$$

(Величина  $(Au, u)$  обычно пропорциональна энергии, необходимой для возбуждения поля  $u(x)$ .) Поле, соответствующее уравнению  $Au = f$ , сообщает минимум функционалу [88]:

$$I(u) = (Au, u) - 2(u, f) = \|u\|_A^2 - 2(u, f). \quad (3.486)$$

Действительно, если существует точное решение  $u_0$ , т. е. если  $Au_0 = f$ , то

$$\begin{aligned} I(u) &= \|u\|_A^2 - 2(u, Au_0) = \|u\|_A^2 - 2(u, u_0)_A + \|u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 = \\ &= \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2. \end{aligned} \quad (3.487)$$

Отсюда видно, что экстремум функционала  $I(u)$  достигается при  $u = u_0$ . Подставим формулу (3.467) в (3.486) и учтем, что при этом в

результате однородности краевых условий  $\chi_0(x) \equiv 0$ . Тогда

$$I(C_1, \dots, C_N) = \left\| \sum_{j=1}^N C_j \chi_j(x) \right\|_A^2 - 2 \sum_{j=1}^N C_j (\chi_j, f). \quad (3.488)$$

Приравняв нулю частные производные  $\frac{\partial I}{\partial C_k}$ , получим линейную систему алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N (A\chi_j, \chi_k) C_j = (\chi_k, f) \quad (k = 1, \dots, N), \quad (3.489)$$

называемую системой Ритца. Определитель этой системы — определитель Грама — отличен от нуля, если система  $\{\chi_j\}$  линейно независима [88]. Если к тому же система  $\{\chi_j\}$  полна в  $X(\Omega)$  по норме  $\|\cdot\|_A$  («по энергии») и выполняется условие коэрцитивности  $(Au, u) \geq \gamma \|u\|^2$ ,  $\gamma = \text{const} > 0$  (т. е. оператор  $A$  является положительно определенным на  $X(\Omega)$ ), то существует единственное решение  $u_0$  краевой задачи и

$$\left\| \sum_{j=1}^N C_j \chi_j(x) - u_0(x) \right\|_A \rightarrow 0 \quad (3.490)$$

при  $N \rightarrow \infty$  [88].

Простейшим примером положительно определенного оператора является оператор умножения на единицу:  $Au = 1 \cdot u$ . Действительно,

$$(Au, u) = \int_{\Omega} u^2 d\Omega = \|u\|^2 > \gamma^2 \|u\|^2 \quad (\gamma < 1).$$

В этом случае метод Ритца приводит к минимуму функционала

$$\begin{aligned} I(u) &= (Au, u) - 2(u, f) = (u, u) - 2(u, f) + (f, f) - (f, f) = \\ &= \|u - f\|^2 - \|f\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к задаче о приближении в среднем правой части  $f$ . Это хорошо исследованная в теории приближений [40] проблема, и полученные в этой области результаты могут служить своего рода простейшей моделью при рассмотрении краевых задач для положительно определенных операторов в общих позициях. (Например, для этих задач нельзя забывать об эффекте Гиббса.) Нетрудно заметить, что система Ритца (3.489) эквивалентна системе, используемой в методе Бубнова — Галеркина. Преимущество системы Ритца состоит в том, что при этом из условия симметричности  $(Au, v) = (u, Av)$  оператора  $A$  следует возможность преобразовать коэффициенты  $(A\chi_j, \chi_k)$  к симметричному виду  $[\chi_j, \chi_k]$  с понижением порядка производных функций  $\chi_j$  [88]. В то же время метод Бубнова — Галеркина в принципе можно применять не только тогда, когда оператор  $A$  положителен.

Метод Ритца, определяемый формулой (3.486), можно рассматривать как частный случай метода Куранта, который позволяет получать более сильную сходимость, чем (3.486). В этом случае

минимизируется функционал

$$\Phi(u) = (Au, u) - 2(u, f) + \|Au - f\|_{H^s(\Omega)}^2, \quad (3.491)$$

где

$$\|u\|_{H^s(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq s} (D^\alpha u, D^\alpha u)_{L_2(\Omega)}. \quad (3.492)$$

Если краевая задача линейна, то метод Куранта также приводит к линейной системе алгебраических уравнений.

При рассмотрении конкретных физико-механических полей к аналогичным, а иногда и более сильным результатам приводит использование вариационных принципов, таких как, например, принципы Лагранжа и Клапейрона в механике, смешанный принцип стационарности Е. Рейснера и др. [58].

**Разностно-аналитический метод.** Возьмем некоторую систему

$$A_h^j u = f^j, \quad j = 1, \dots, N_1, \quad N_1 > N, \quad (3.493)$$

конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих уравнение  $Au = f$ . Подставим в эту систему структуру решения (3.466) и получим систему  $N_1$  уравнений относительно постоянных  $C_j$ :

$$A_h^j B_j(x, C_1, \dots, C_N) = f^j, \quad j = 1, \dots, N_1, \quad (3.494)$$

которую затем решим методом наименьших квадратов.

**Метод Трефтца.** Предположим, что  $u = B(\Phi)$  — полная структура, учитывающая лишь основное уравнение  $Au = f$ . (Формулу такого вида принято называть *общим решением* краевой задачи.) В этом случае (3.466) при любом выборе постоянных  $C_j$  удовлетворяет уравнению  $Au = f$  и, следовательно, остается так выбрать эти постоянные, чтобы наилучшим образом удовлетворить граничным условиям. Для этой цели можно применить методы, рассмотренные выше. На практике чаще всего применяют тот или иной вариант метода коллокаций, требуя, чтобы граничные условия удовлетворялись на некоторой системе точек границы рассматриваемой области.

Когда оператор  $A$  полигармонический:  $Au = \Delta^m u$  ( $m \geq 1$  — целое), можно использовать различного вида элементарные решения и так называемые полигармонические полиномы [11]. Преимущество метода Трефтца перед другими методами состоит в том, что в нем приближение осуществляется лишь на границе области. Это означает, что при одной и той же размерности  $N$  аппроксимирующего пространства достижима, вообще, большая точность аппроксимации. Кроме того, в методе Трефтца обычно более просто решается вопрос о погрешности получаемого приближенного решения. Например, если (3.466) есть точное решение уравнения Пуассона  $\Delta u = f$  при любых  $C_1, \dots, C_N$ , то из принципа максимума следует, что максимальная погрешность приближенного решения будет достигаться на границе. Для краевого условия Дирихле  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$  максимальную погрешность на границе легко получить. Это и будет оценка приближения. Недостаток метода Трефтца — труд-



ность учета особенностей решения в угловых и других особых точках, на границе раздела сред и т. п.

**Метод математического программирования.** Рассмотрим систему неравенств

$$- \varepsilon \leq A'_k B_1(x^i, C_1, \dots, C_N) - f^i \leq \varepsilon \quad (j = 1, \dots, N_1), \quad (3.495)$$

выписанную для всех внутренних узлов системы разностных уравнений (3.493). Эту систему неравенств можно заменить системой  $2N_1$  неравенств вида

$$\varphi_k(C_1, \dots, C_N, \varepsilon) \geq 0 \quad (k = 1, \dots, 2N_1). \quad (3.496)$$

Очевидно, что наилучшему равномерному приближению (по всем  $N_1$  узлам) будет соответствовать минимум функции

$$z = \varepsilon. \quad (3.497)$$

Нахождение экстремума (3.497) («функции цели») при наличии ограничений (3.495) — это пример задачи математического программирования. В частности, если оператор  $A$  линейный, то система ограничений (3.495) также линейна. В результате приходим к задаче линейного программирования. Для задач линейного программирования, которые имеют обширную сферу применения в экономике, есть ряд методов решения, базирующихся на методах линейной алгебры, и создано специальное математическое обеспечение ЭВМ (см. § 26 гл. 2).

Другие варианты описанного подхода получим, если систему неравенств (3.495) заменим системой

$$- \varepsilon \leq \delta B_1(x^i, C_1, \dots, C_N) \leq \varepsilon \quad (j = 1, \dots, N_1), \quad (3.498)$$

где  $\delta$  — невязка, взятая в смысле той или иной метрики.

**Комбинирование метода Трэфтца с методом  $R$ -функций.** Опишем предложенный В. А. Рвачевым метод, в котором участвуют две аппроксимирующие последовательности

$$\sum_{i=1}^N C_i \chi_i + \chi_0; \quad \sum_{j=1}^{N_1} D_j \psi_j + \psi_0. \quad (3.499)$$

первая из которых удовлетворяет краевым условиям, а вторая — основному уравнению. (Естественно, предполагается, что последовательности  $\{\chi_i\}$  и  $\{\psi_j\}$  удовлетворяют условиям полноты.) Постоянные  $C_i$  и  $D_j$  выберем из условия, чтобы функционал

$$I = \left\| \sum_{i=1}^N C_i \chi_i + \chi_0 - \sum_{j=1}^{N_1} D_j \psi_j - \psi_0 \right\|_{H^s(\Omega)}^2 \quad (3.500)$$

достигал минимума. Требование минимальности (3.500) приводит к тому, что первая из функций (3.499) должна стремиться к наилучшему удовлетворению (по метрике  $H^s$ ) основного уравнения, а вторая — к удовлетворению краевых условий. В описанном методе (который, впрочем, еще нуждается в теоретическом обосновании) отсутствует необходимость в вычислении производных от структуры

решения, что существенно уменьшает затраты на вычисления и накопление погрешностей.

*Замечание 4.* Перечисленные методы, которыми не исчерпываются применяемые подходы к решению краевых задач, могут сочетаться с различными итерационными методами, методами оптимизации (градиентного типа, случайного поиска) и т. д. Для некоторых классов задач весьма эффективен метод Канторовича [44], с помощью которого краевая задача приводится к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

*Замечание 5.* Наличие в функционалах, к которым сводятся краевые задачи, интегралов по границе создает в некоторых случаях неудобства с точки зрения вычислений или программирования. Переход от интеграла по границе к интегралу по области можно осуществить следующим образом. Пусть  $\omega = 0$ ;  $\omega \in C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$ , есть нормализованное уравнение  $\partial\Omega$ . Тогда для всякой функции  $u \in C^1(C\Omega)$  справедливо равенство

$$\int_{\partial\Omega} u ds = - \int_{\Omega} \left( u \Delta \omega + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) d\Omega. \quad (3.501)$$

Доказательство формулы (3.501) приведено в работе [111].

*Замечание 6.* Пусть для нахождения неопределенных компонент структуры решения применяется некоторый вариационный метод (например, Ритца), вычисление квадратур выполняется по приближенным формулам и точность характеризуется некоторой величиной  $\varepsilon$ . Эксперименты показывают, что при увеличении числа  $N$  координатных функций практически всегда есть такое  $N_0$ , при котором (т. е. при  $N > N_0$ ) происходит потеря устойчивости процесса вычислений. Однако с уменьшением  $\varepsilon$  число  $N_0$  возрастает. Схематически эта зависимость показана на рис. 110 (*I* — зона неустойчивости, *II* — зона устойчивости). В общем случае она зависит от выбранных алгоритмов, от типа геометрических и аналитических компонент краевой задачи и других факторов. Теоретическое установление такой зависимости (ее конкретных параметров) представляло бы большой практический интерес, но трудно рассчитывать на сколько-нибудь серьезные результаты в такой сложной ситуации. Тем не менее сам факт существования зависимости указанного вида между  $N_0$  и  $\varepsilon$  имеет важное значение для организации численных экспериментов, прогнозирования результатов и оценки их достоверности.

3. Эффективность использования структурных формул в сочетании с приведенными методами существенно зависит от выбора аппроксимирующих полиномов  $\{\varphi_i\}$  (3.465). Оператор  $B$  структуры решения, действуя на эти полиномы, «деформирует» их в по

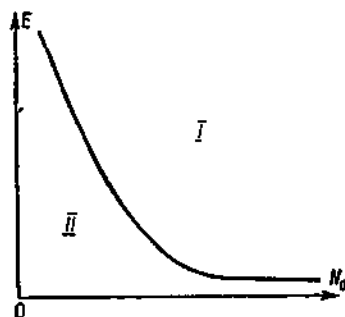


Рис. 110.

следовательность  $\{X_j\}$  (3.467), и поэтому от аппроксимационных свойств функций  $\{X_j\}$  существенно зависит характер приближения к решению краевой задачи. (Идеальный случай возникает тогда, когда при некотором  $N$  формула (3.467) содержит точное решение задачи, однако такой случай, конечно, маловероятен. Более того, такой ситуации следует избегать при решении тестовых задач с известным точным решением.) От последовательности  $\{X_j\}$  зависит также обусловленность и некоторые другие характеристики матрицы  $\{a_{ij}\}$  системы алгебраических уравнений для определения постоянных  $C_j$ . В частности, если число  $N$  постоянных  $C_j$  велико, то объем вычислений может оказаться неприемлемым вследствие того, что оперативная память используемой ЭВМ не вместит всех элементов матрицы  $\{a_{ij}\}$ . Многие из упоминавшихся методов таковы, что коэффициенты  $a_{ij}$  являются интегралами (или суммами с большим числом слагаемых) по области  $\Omega$ . Эти трудности можно в значительной мере уменьшить, если в качестве функций  $\varphi_j$  выбирать финитные функции с носителями малого диаметра. Тогда число ненулевых элементов матрицы  $\{a_{ij}\}$  составит не  $N^2$ , как в общем случае, а  $\alpha N$ ,  $\alpha = \text{const}$ . Их доля в общем числе элементов равна  $\alpha N^{-1}$  и, следовательно, уменьшается с ростом  $N$ . Кроме того, вычисление каждого коэффициента матрицы  $\{a_{ij}\}$  состоит в вычислении интеграла не по всей области  $\Omega$ , а только по пересечениям носителей функций  $\varphi_j$ . Правда, при этом выигрыш будет лишь в том случае, если с уменьшением области интегрирования не придется уменьшать его шаг. Это предъявляет дополнительные требования к функциям  $\varphi_j$ , а именно: под знак интегралов, через которые выражены коэффициенты  $a_{ij}$ , функции  $\varphi_j$  входят сомножителями вида  $Q\varphi_j R\varphi_k$ , где  $Q$  и  $R$  — известные линейные дифференциальные операторы, порядок которых зависит от порядка уравнения  $Au = f$  и выбранного метода. Поэтому, чтобы конструктивный аппарат не зависел от порядка краевой задачи, желательно иметь возможность легко вычислять значения не только функций  $\varphi_j$ , но и их производных до любого порядка. Кроме того, поскольку квадратурные формулы обычно ориентируются на аппроксимацию подынтегральных функций (не считая весовых) полиномами, желательно, чтобы легко вычислялись и интегралы от произведений этих функций на полиномы (для степенных полиномов — это моменты упомянутых функций).

Указанные выше трудности удастся в значительной мере преодолеть, если использовать в качестве аппроксимирующих полиномов сплайны и атомарные функции, о которых речь будет идти в следующих двух параграфах.

*Упражнения и задачи.* 1. Найти уравнение Эйлера для функционала (3.471). Имеет ли оно тот же порядок, что и уравнение  $Au = f$ ?

2. Исследовать сходимость комбинированного метода Третьяка с методом  $R$ -функций.

3. Зависит ли тип сходимости метода штрафов от выбора множителей  $M_i$ ?

4. Предложить (и исследовать) метод, сочетающий методы Бубнова — Галеркина — Петрова и математического программирования.

5. Обосновать применимость метода Рунца к решению смешанной краевой задачи для уравнения второго порядка эллиптического типа.

6. Рассмотрим следующую модификацию метода Куранта: вместо функционала (3.491) минимизируется функционал

$$\Phi(u) = (Au, u) - 2(u, f) + \sum_{|\alpha| \leq s} M_\alpha (D^\alpha u, D^\alpha u)_{L_2(\Omega)}, \quad (3.502)$$

где  $M_\alpha$  — постоянные множители. Исследовать зависимость типа сходимости, соответствующего функционалу (3.502), от выбора множителей  $M_\alpha$ .

7. Построить аналоги интегрального тождества (3.501), основанные на использовании операторов, отличных от оператора Лапласа.

## § 15. Сплайны

Рассмотрим конструирование сплайнов.

1. Пусть интервал  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  разбит на  $N$  частей точками  $x_1 < x_2 < \dots < x_{N+1}$ , причем  $x_1 = a$ ;  $x_{N+1} = b$ . Точки  $x_k$  будем называть *узлами*, а совокупность всех узлов  $\Delta = \{x_k\}$  — *сеткой*. Функция  $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , которая между любыми соседними узлами является целой рациональной функцией (алгебраическим

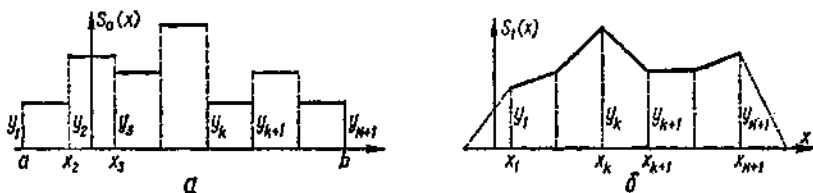


Рис. 111.

полиномом), называется *сплайном*, или, более точно, *полиномиальным сплайном*. Сплайн называется *сплайном степени  $n$* , если степень полиномов не превосходит  $n$ . Реже рассматриваются сплайны других типов — это такие функции, которые между соседними узлами определяются аналитическими формулами другого типа. Используя понятия § 4 гл. 1, можно сказать, что полиномиальные сплайны основаны на использовании системы операций  $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, a \forall a \in \mathbb{R}\}$ , в то время как другие сплайны являются кусочно- $H$ -реализуемыми с другими базисными системами операций. В дальнейшем, если не будет оговорено особо, речь будет идти о полиномиальных сплайнах.

Сетка  $\Delta$  называется *равномерной*, если

$$x_k = a + (k - 1)h, \quad h = (b - a) / (N - 1) \quad (k = 1, \dots, N + 1). \quad (3.503)$$

Пусть сплайн степени  $n$  имеет  $m$  непрерывных производных, а  $(m + 1)$ -я его производная разрывна. Тогда сплайн  $S(x)$  называется *сплайном дефекта*  $n - m$ . Сплайн дефекта один называется *натуральным сплайном* или просто *сплайном*. Сплаины дефекта, выше чем один, часто называются *эрмитовыми*.

Рассмотрим вначале простейшие типы сплайнов на равномерной сетке. Сплайн  $S_0(x)$  порядка 0 есть кусочно-постоянная функция (рис. 111, а), а сплайн  $S_1(x)$  порядка единица — кусочно-линейная функция (рис. 111, б). Для того чтобы функция  $S_0(x)$  была однозначно определена в узлах  $x_i$ , можно условиться, что  $S_0(x_k) = \lim_{x \rightarrow x_k+0} S_0(x)$ , или считать, что  $S_0(x_k) = \frac{1}{2} [\lim_{x \rightarrow x_k+0} S_0(x) + \lim_{x \rightarrow x_k-0} S_0(x)]$ . Сплайн  $S_1(x)$  является непрерывной функцией, но

производная  $S_1'(x)$  является сплайном степени нуль и имеет разрывы в узлах. Нетрудно видеть, что натуральные сплайны более высоких степеней можно получить путем интегрирования сплайнов низших степеней. Так, при интегрировании сплайна  $S_1(x)$  получим

$S_2(x) = y_1 + \int_a^x S_1(x) dx$  — сплайн второго порядка, принимающий в точке  $x_1 = a$  значение  $y_1$ .

Важна с конструктивной точки зрения возможность представления любого натурального сплайна заданного порядка через одну фиксированную финитную функцию. Так, например, любой сплайн нулевого порядка можно выразить через функцию  $h_0(x)$  (рис. 112, а):

$$h_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1; \\ 1 & \text{при } -1 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases} \quad (3.504)$$

А именно

$$S_0(x) = \sum_{k=1}^{N+1} y_k h_0 \left[ \frac{2(x-a) - (2k-1)h}{h} \right]. \quad (3.505)$$

Вне интервала  $[a, b]$  функция  $S_0(x)$ , определяемая формулой (3.505), тождественно равна нулю.

Аналогично можно представить линейный сплайн через функцию  $h_1(x)$  (рис. 112, б):

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \geq 1; \\ 1 - |x| & \text{при } |x| < 1. \end{cases} \quad (3.506)$$

А именно

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^{N+1} y_k h_1 \left[ \frac{x-a - (k-1)h}{h} \right]. \quad (3.507)$$

Сплайн  $S_1(x)$  (3.507) вне интервала  $[a-h, b+h]$  тождественно равен нулю, на интервале  $[a-h, a]$  — изменяется по линейному

закону от нуля до  $y_1$ , а на интервале  $[b, b + h]$  — от  $y_{N+1}$  до нуля. Таким образом,  $S_1(x) \in C(\mathbb{R})$ , т. е. является везде непрерывной функцией.

Другой вариант представления сплайнов через одну функцию (правда, не финитную) можно получить следующим образом. Пусть

$$x_+^n = \begin{cases} x^n & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (3.508)$$

Тогда функция вида

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{N+1} a_k [x - a - (k-1)h]_+^n, \quad (3.509)$$

где  $a_k$  — некоторые постоянные, будет, очевидно, сплайном  $n$ -го порядка.

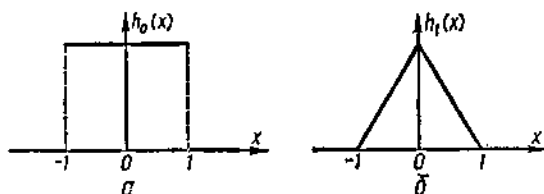


Рис. 112.

Для нахождения постоянных  $a_k$  получаем систему

$$h^n a_0 = y_1;$$

$$(2h)^n a_0 + h^n a_1 = y_2;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(kh)^n + [(k-1)h]^n a_1 + [(k-2)h]^n a_2 + \dots + h^n a_{k-1} = y_k.$$

$$(3.510)$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов  $a_k$  через  $y_1, \dots, y_{N+1}$  необходимо решать систему линейных уравнений (3.510).

То обстоятельство, что функция  $x_+^n$ , с помощью которой строятся сплайны  $n$ -го порядка, не финитная, создает определенные трудности вычислительного характера (некоторые из них отмечались в конце предыдущего параграфа, а о некоторых будет сказано ниже). Оказывается, однако, что функции

$$B_m(x) = \sum_{i=0}^m (-1)^i C_{m+1}^i (x-i)_+^m \quad (3.511)$$

(где, как обычно,  $C_{m+1}^i$  — число сочетаний из  $m+1$  по  $i$ ) являются финитными сплайнами, через сдвиги сжатий которых можно (подобно (3.505) и (3.507)) выражать все остальные натуральные сплайны на равномерной сетке.

Функции (3.511) называются *B-сплайнами* или *финитными сплайнами Шенберга* [101]. На рис. 113, а, б и в приведены гра-

функции  $B_1(x)$ ,  $B_2(x)$  и  $B_3(x)$  соответственно. Часто вместо функций  $B_m(x)$  используют функции  $\Theta_n(x)$ :

$$\Theta_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left( \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^{m+1} dt, \quad (3.512)$$

которые связаны с  $B_m(x)$  простой зависимостью:

$$\Theta_m(x) = \alpha_m B_m \left( x + \frac{m+1}{2} \right), \quad (3.513)$$

где постоянная  $\alpha_m$  выбирается из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta_m(x) dx = 1. \quad (3.514)$$

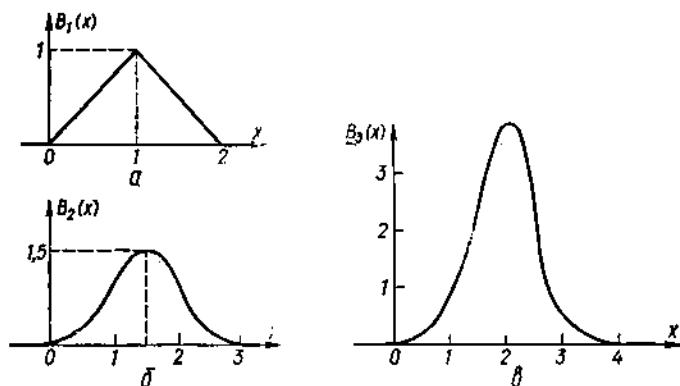


Рис. 113.

Нетрудно убедиться в том, что функции  $\Theta_m(x)$  четны:  $\Theta_m(x) = \Theta_m(-x)$ . Графики функций  $\Theta_1(x)$ ,  $\Theta_2(x)$  и  $\Theta_3(x)$  приведены на рис. 114, а, б и в соответственно. (Нетрудно видеть, что  $\Theta_1(x) \equiv h_1(x)$ .)

Выше были построены  $B$ -сплайны на равномерной сетке. На произвольной сетке также можно ввести  $B$ -сплайны, например, по следующей формуле:

$$B_{m-1}(x) = B_{m-1}(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}, x) = \sum_{s=k}^{k+m} \frac{(x_s - x)_+^{m-1}}{\omega'_k(x_s)}, \quad (3.515)$$

где  $x_k < x_{k+1} < \dots < x_{k+m}$ , а

$$\omega_k(x) = (x - x_k)(x - x_{k+1}) \dots (x - x_{k+m}).$$

Функция (3.515) финитна, т. е.  $B_{m-1}(x) \equiv 0$  при  $x \geq x_{k+m}$  и  $x \leq x_k$ . При  $x_k < x < x_{k+m}$  имеем  $B_{m-1}(x) > 0$ .

2. Приведем примеры финитных полиномиальных сплайнов дефекта, большего, чем единица.

Сплайны второго порядка дефекта два на равномерной сетке с шагом  $h$  можно представить в виде линейной комбинации сдвигов двух функций [101]:

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 1 + 3xh^{-1} + 2x^2h^{-2} & \text{при } -h \leq x \leq 0; \\ 1 - 3xh^{-1} + 2x^2h^{-2} & \text{при } 0 \leq x \leq h; \\ 0 & \text{при } |x| > h; \end{cases} \quad (3.516)$$

$$\psi_2(x) = \begin{cases} 4(xh^{-1} - x^2h^{-2}) & \text{при } 0 \leq x \leq h; \\ 0 & \text{при } (x < 0) \cup (x > h). \end{cases} \quad (3.517)$$

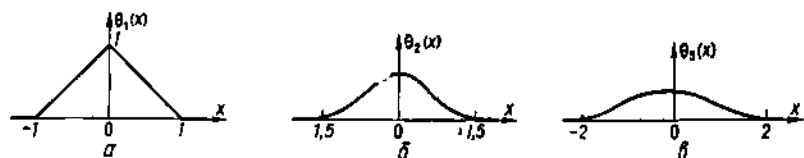


Рис. 114.

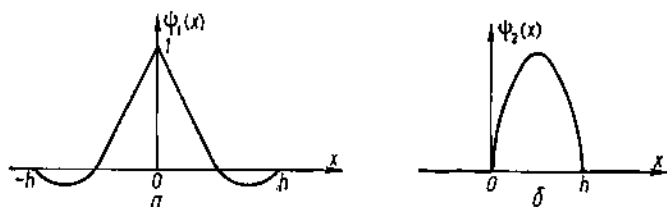


Рис. 115.

Графики функций  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  приведены на рис. 115, а, б. Кубические сплайны дефекта три на равномерной сетке с шагом  $h$  можно представлять в виде линейных комбинаций сдвигов трех функций  $\eta_1(x)$ ,  $\eta_2(x)$  и  $\eta_3(x)$ :

$$\eta_1(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}x^3h^{-3} + 9x^2h^{-2} + \frac{11}{2}xh^{-1} + 1 & \text{при } -h < x < 0; \\ -\frac{9}{2}x^3h^{-3} + 9x^2h^{-2} - \frac{11}{2}xh^{-1} + 1 & \text{при } 0 \leq x < h; \\ 0 & \text{при } |x| \geq h; \end{cases}$$

$$\eta_2(x) = \begin{cases} \frac{27}{2}x^3h^{-3} - \frac{45}{2}x^2h^{-2} + 9xh^{-1} & \text{при } 0 \leq x \leq h; \\ 0 & \text{при } (x < h) \cup (x < 0); \end{cases} \quad (3.518)$$

$$\eta_3(x) = \begin{cases} -\frac{27}{2}x^3h^{-3} - \frac{45}{2}x^2h^{-2} - 9xh^{-1} & \text{при } -h < x < 0; \\ 0 & \text{при } (x > 0) \cup (x < -h). \end{cases}$$



Графики функций  $\eta_1(x)$ ,  $\eta_2(x)$  и  $\eta_3(x)$  приведены на рис. 116, а, б и в соответственно. Финитные кубические сплайны дефекта два  $\xi_1(x)$  и  $\xi_2(x)$  (рис. 117, а и б) определяются формулами

$$\xi_1(x) = \begin{cases} (|x| - 1)^2 (2|x| + 1) & \text{при } |x| \leq 1; \\ 0 & \text{при } |x| > 1; \end{cases} \quad (3.519)$$

$$\xi_2(x) = \begin{cases} x(|x| - 1)^2 & \text{при } |x| \leq 1; \\ 0 & \text{при } |x| > 0. \end{cases}$$

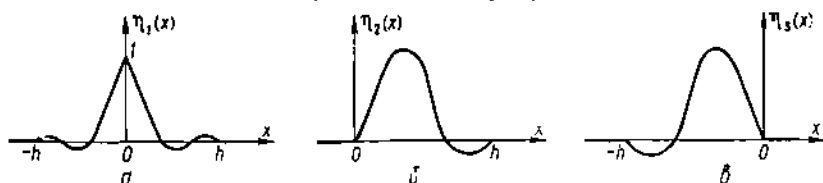


Рис. 116.

3. Выше рассмотрены сплайны, зависящие от одного аргумента. В то же время для аппроксимации неопределенных компонент структур решений (или самих решений) краевых задач для уравнений с частными производными требуются полиномы двух или большего числа аргументов. Опишем, например, один из возможных подходов к построению сплайнов нескольких аргументов.

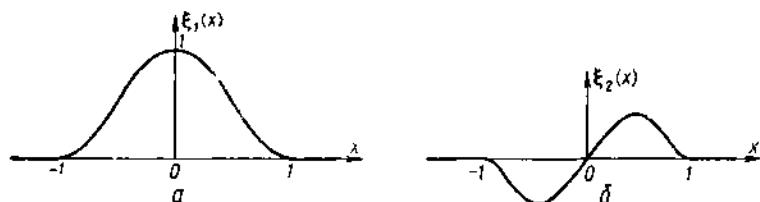


Рис. 117.

Пусть в области  $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  задана функция  $u = f(x_1, x_2)$  двух аргументов. При фиксированном  $x_2 \in [c, d]$  ее можно рассматривать как функцию одного аргумента  $x_1$  и применить для аппроксимации некоторый из сплайнов. Если выбран, например, натуральный сплайн третьего порядка, то можно написать

$$f(x_1, x_2) \approx \sum_{k \in I_1} D_k(x_2) B_3(\alpha x_1 - \beta k), \quad (3.520)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные, определяющие шаг  $h_1$  и сдвиг финитного сплайна  $B_3(x_1)$ ,  $I_1 \subset Z$  — множество индексов, для которых

$$\text{supp } B_3(\alpha x_1 - \beta k) \cap (a, b) \neq \emptyset \quad (3.521)$$

(т. е. носители сдвигов сжатий  $B_3(\alpha x_1 - \beta k)$  пересекаются с  $(a, b)$ ). Коэффициенты  $D_k(x_2)$  разложения (3.520) в данном случае являются некоторыми функциями  $x_2$ . Применяя разложение того же

вида для  $D_k(x_2)$  с некоторым шагом  $h_2$ , получаем

$$D_k(x_2) \approx \sum_{j \in I_2} C_{kj} B_3(\gamma x_2 - \delta j), \quad (3.522)$$

где  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $I_2$  аналогичны  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $I_1$ . Подставляя (3.522) в (3.520), имеем

$$f(x_1, x_2) \approx \sum_{\substack{k \in I_1 \\ j \in I_2}} C_{kj} B_3(\alpha x_1 - \beta k) B_3(\gamma x_2 - \delta j). \quad (3.523)$$

Функции  $B_3(\alpha x_1 - \beta k) B_3(\gamma x_2 - \delta j)$ ;  $k \in I_1$ ;  $j \in I_2$ , представляющие собой произведения финитных функций, имеют в качестве носителей прямоугольники в  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} \text{supp } B_3(\alpha x_1 - \beta k) B_3(\gamma x_2 - \delta j) &= \text{supp } B_3(\alpha x_1 - \beta k) \times \\ &\times \text{supp } B_3(\gamma x_2 - \delta j). \end{aligned} \quad (3.524)$$

Естественно, что аналогичная ситуация будет, если вместо  $B_3(x)$  брать другие финитные сплайны (возможно, и различные для каждого из аргументов). Отличие будет состоять лишь в том, что для сплайнов дефекта, большего единицы, требуется, вообще, пользоваться не одним базисным сплайном, и тогда в формуле (3.523) под знаком суммы будет несколько разнотипных слагаемых. Например, для кубических сплайнов дефекта два соответствующее представление будет иметь вид

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) \approx \sum_{\substack{k \in I_1 \\ j \in I_2}} [C_{kj}^{(2)} \xi_1(\alpha x_1 - \beta k) \xi(\gamma x_2 - \delta j) + \\ + C_{kj}^{(2)} \xi_1(\alpha x_1 - \beta k) \xi_2(\gamma x_2 - \delta j) + C_{kj}^{(3)} \xi_2(\alpha x_1 - \beta k) \xi_1(\gamma x_2 - \delta j) + \\ + C_{kj}^{(4)} \xi_2(\alpha x_1 - \beta k) \xi_2(\gamma x_2 - \delta j)]. \end{aligned} \quad (3.525)$$

Формула (3.523) сохраняет вид и в том случае, если область  $\Omega$  определения функции  $f(x_1, x_2)$  отлична от прямоугольника. Однако при этом будет рассматриваться множество пар  $(k, j)$  индексов, которым соответствуют непустые пересечения носителей соответствующих слагаемых с  $\Omega$ . Аналогичные рассуждения применимы, очевидно, и для функций  $f(x_1, \dots, x_n)$  ( $n \geq 3$ ). Указанный путь построения сплайнов нескольких аргументов далеко не исчерпывает все многомерные кусочно-полиномиальные функции.

Рассмотрим, например, область  $\Omega$  (рис. 118), представляющую собой соединение треугольников  $\Omega_i$ , попарно не имеющих общих внутренних точек. Пусть в области  $\Omega$  задана функция  $S(x_1, x_2)$ , непрерывная и линейная в каждом из треугольников  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ):

$$S(x_1, x_2) = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i, \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega_i \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.526)$$

Такая функция представляет собой сплайн первого порядка, который, вообще, нельзя получить по описанной выше методике с помощью сдвигов произведений финитных сплайнов одного аргу-

мента. Однако и в данном случае можно представить функцию  $S(x_1, x_2)$  в виде суммы финитных сплайнов, но носители этих сплайнов в общем случае не будут конгруэнтными. В рассматриваемом примере базисные сплайны можно построить следующим образом. Пусть  $x^0$  есть некоторый узел, а  $x^1, \dots, x^m$  (см. рис. 118) — соседние с ним узлы. (Если узел является крайним в сетке, то добавляем произвольные точки вне  $\Omega$ . Например,  $y_1$  для  $y$ .) Построим такую функцию  $\varphi_0 \equiv \varphi(x, x^0, x^1, \dots, x^m)$ , которая в точке  $x^0$

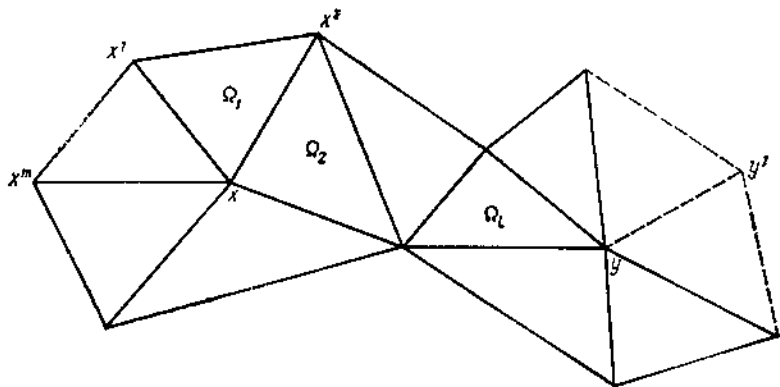


Рис. 118.

равна единице, в каждом из треугольников  $x^0 x^i x^{i+1}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $x^{m+1} = x^1$ ) линейна, а в узлах  $x^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и везде вне многоугольника  $x^1 x^2 \dots x^m$  — равна нулю. Пусть  $\varphi_k = \varphi_k(x_1, x_2)$  — финитная функция указанного типа, построенная для узла  $x^k$  ( $k = 1, \dots, N_1$ ), где  $N_1$  — количество всех узлов сетки. Тогда всякую функцию вида (3.526) в области  $\Omega$  можно представить формулой

$$S(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{N_1} C_k \varphi_k(x_1, x_2), \quad (3.527)$$

где  $C_k$  ( $k = 1, \dots, N_1$ ) — значения функции  $S(x_1, x_2)$  в узлах  $x^k$ . В дополнительных (отмеченных на рис. 118 штриховыми линиями) треугольниках функция  $S(x_1, x_2)$  также линейна, но в дополнительных узлах равна нулю. Она тождественно равна нулю и в остальной части плоскости.

Аналогично можно на каждом треугольнике строить многочлены второй, третьей и так далее степеней, обеспечив непрерывность сплайна в целом. Построение более гладких функций, составленных из полиномов, стыкующихся на фиксированной сетке, весьма сложная задача. Однако если отказаться от требования кусочно-полиномиального представления функции  $S(x_1, x_2)$ , а довольствоваться, например, кусочно-элементарным ее представлением, то задача становится намного проще благодаря возможности привлечь для ее решения  $R$ -функции.

Подойдем к решению вопроса о построении элементарных сплайнов с общих позиций. Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — некоторая  $H_e$ -реализуемая область, определяемая неравенством  $\Omega = (\omega \geq 0)$ ,  $\omega \in \mathfrak{M}(H_e)$ ;  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  — покрытие  $\Omega$  такое, что каждая точка  $\Omega$  является внутренней по крайней мере для одной из областей  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) (рис. 119). Пусть  $\Omega_i = (\omega_i \geq 0)$ ;  $\omega_i \in \mathfrak{M}(H_e)$ , и, кроме того, функции  $\omega$  и  $\omega_i$  — достаточно гладкие (например,  $\omega, \omega_i \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ) везде в  $\mathbb{R}^n$ . Вследствие принятого выше допущения функция

$$\tau(x) = \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{i=1}^m [|\omega_i(x)| + \omega_i(x)]^{k+1} + \frac{1}{2^{k+1}} [|\omega(x)| - \omega(x)]^{k+1} \quad (3.528)$$

больше нуля в области  $\Omega$  и вне области  $\Sigma = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m$ . (Если нас не интересует поведение рассматриваемых функций вне  $\Sigma$ , то второе слагаемое в формуле (3.528) опускается.) Кроме того, в точках областей

$$\Sigma_i = \Omega_i \setminus \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \Omega_j \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.529)$$

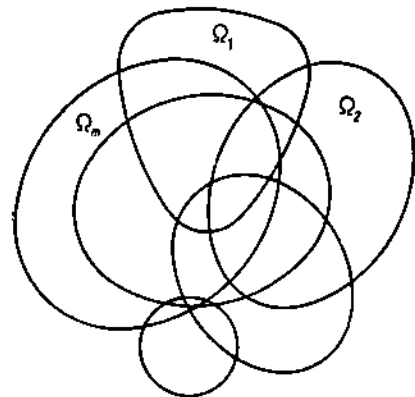


Рис. 119.

(если, конечно, они не пустые множества),  $\tau(x) \equiv [\omega_i(x)]^{k+1}$ , а вне области  $\Sigma$   $\tau(x) \equiv |\omega(x)|^{k+1}$ . Очевидно, что благодаря возведению в степень  $(k+1)$   $\tau(x) \in C^k$ .

Рассмотрим функции

$$\tau_i(x) = \frac{1}{2^{k+1}} [|\omega_i(x)| + \omega_i(x)]^{k+1} [\tau(x)]^{-1} \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.530)$$

Из построения видно, что в области  $\Omega$  функции  $\tau_i(x)$  составляют разложение единицы

$$1 \equiv \sum_{i=1}^m \tau_i(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.531)$$

Умножая обе части тождества (3.531) на некоторую функцию  $f(x)$ , получаем

$$f(x) \equiv \sum_{i=1}^m f(x) \tau_i(x). \quad (3.532)$$

Поскольку функция  $\tau_i(x)$  отлична от нуля (строго положительна) только внутри  $\Omega_i$ , множитель  $f(x)$  в соответствующем слагаемом  $f(x) \tau_i(x)$  достаточно аппроксимировать некоторым полиномом  $P_i(x)$  лишь в области  $\Omega_i$ .

Пусть такая аппроксимация выполнена в каждой из областей  $\Omega_i$ :

$$f(x) \approx P_i(x), \quad \forall x \in \Omega_i \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.533)$$

Подставляя приближенные выражения (3.533) в правую часть формулы (3.532), находим

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^m P_i(x) \tau_i(x). \quad (3.534)$$

Учитывая, что  $P_i(x)$  есть некоторый полином

$$P_i(x) = \sum_{j=1}^{N_i} C_{ij} \chi_{ij}(x), \quad (3.535)$$

где  $\{\chi_{ij}(x)\}$  — функции некоторого типа (степенные, тригонометрические и т. д.), составляющие полную систему (иначе, вообще, нельзя обеспечить хорошую аппроксимацию (3.533)), формулу (3.534) можно переписать в виде

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{N_i} C_{ij} \chi_{ij}(x) \tau_i(x). \quad (3.536)$$

Таким образом, приходим к формуле, представляющей собой линейную комбинацию финитных функций  $\chi_{ij}(x) \tau_i(x)$ . Заметим, что метод  $R$ -функций позволяет строить функции  $\omega_i$ , а следовательно, и функции  $\tau_i$  с носителями практически произвольной формы.

*Замечание 1.* Выбор функции  $\tau(x)$  в виде (3.530), вообще, не обязателен. Если взять, например,  $\tau(x) \equiv 1$ , то функции  $\tau_i(x)$  не будут составлять разложение единицы, однако  $q(x) \equiv \tau_1(x) + \dots + \tau_m(x) > 0$  в  $\Omega$ . Поэтому вместо аппроксимации полиномами  $P_i(x)$  в каждой из областей  $\Omega_i$  функции  $f(x)$  можно осуществить аппроксимацию функции  $f(x) [q(x)]^{-1}$ . В итоге также получим функцию вида (3.536), но более простую.

*Замечание 2.* Для тех областей  $\Omega_i$ , которые можно задать полиномиальными неравенствами  $\omega_i \geq 0$ , при выборе  $\chi_{ij}$  в виде полиномов приходим к дробно-полиномиальным сплайнам. Если же принять  $\tau(x) \equiv 1$ , то получатся обычные полиномиальные сплайны гладкости  $k$ .

4. Перейдем к сравнительному анализу аппроксимационных свойств сплайнов и классических полиномов (степенных, тригонометрических и др.).

На практике для решения задач интерполяции часто пользуются интерполяционными полиномами, например полиномом Лагранжа (3.31). Однако может оказаться, что многочлен  $P_n(x)$ , интерполирующий непрерывную функцию (например,  $|x|$  на  $[-1, 1]$ ), может к ней не стремиться при  $n \rightarrow \infty$ . По этому поводу академик С. Н. Бернштейн в 1905 г. писал, что незаметное изменение экспериментальных данных часто ведет к значительному изменению приближающего многочлена в некоторых промежуточных точках. В действительности практики предпочитают пользоваться для

приближенного представления своих функций ломаными линиями, вершинами которых служат экспериментально определенные точки. Ясно, что этот последний метод интерполирования позволяет представить функцию с той точностью, какую доставляют прямые измерения. Им была приведена (по-видимому, впервые) аналитическая формула для ломаной, т. е. натурального сплайна первой степени.

Приведенная цитата, по-видимому, первая констатация того факта, что сплайн может в некотором смысле оказаться лучше алгебраического многочлена. Правда, не трудно привести примеры,

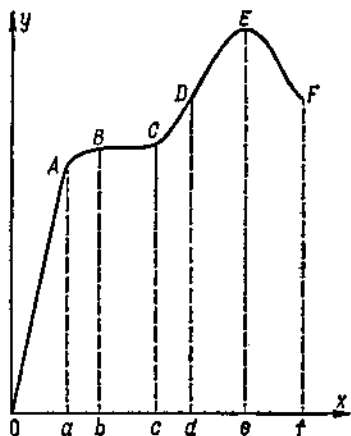


Рис. 120.

когда использование линейного сплайна недостаточно. В самом деле, очень часто изучаемая функция должна быть гладкой из физических соображений, т. е. у нее должны существовать одна или несколько производных. Однако и в этом случае может оказаться более предпочтительным использование сплайнов соответствующей гладкости, чем алгебраических или тригонометрических полиномов. В чем же здесь дело? Почему функции, более плохие по своим дифференциальным свойствам, могут оказаться лучше при использовании их в качестве аппарата приближения?

Чтобы нагляднее (на интуитивном уровне) представить и осмыслить

возникающую здесь ситуацию, рассмотрим простой пример. Пусть требуется построить полином  $P_n(x)$ , приближающий функцию  $y = f(x)$ , изображенную графически на рис. 120. Эта функция представляет собой известную зависимость нагрузки  $y$  от деформации  $x$ , обычно возникающую при растяжении образцов из реальных материалов. Участок  $OA$  графика соответствует известному закону Гука: деформация пропорциональна приложенной нагрузке. Однако этот закон имеет свой предел и начиная с точки  $A$  эта зависимость нарушается. Участку  $BC$ , параллельному оси  $Ox$ , соответствует переход материала в пластическое состояние («закон пластичности»), далее начиная с точки  $C$  зависимость между  $x$  и  $y$  снова меняется, начинается участок упрочнения, а затем — разрыва. Таким образом, полином  $P_n(x) = C_0 + C_1x + \dots + C_nx^n$  на отрезке  $[0, f]$  должен быть: полиномом первой степени  $y = C_1x$  на участке  $[0, a]$ ; полиномом нулевой степени  $y = C_0$  на участке  $[b, c]$ ; близким к полиному второй степени  $y \approx C_0 + C_1x + C_2x^2$  на участке  $[d, f]$ . Ясно, что добиться точного выполнения этих противоречивых требований в рамках одного полинома невозможно. Следствием этого и является «плохое» поведение полинома вне точек интерполяции (т. е. в точках, в которых информация о прибли-

жаемой функции не снималась). При использовании сплайнов (например, кубических) такого рода трудности в данном примере не возникают.

Оговоримся сразу, что приведенный пример не означает, что функцию  $y = \varphi(x)$  нельзя с достаточной точностью приблизить полиномом. (Такое утверждение противоречило бы известной теореме Вейерштрасса о возможности приближения непрерывных функций полиномами с любой точностью [44] в метрике  $C^k$ .) Речь лишь идет о задаче интерполяции, в которой информация о приближаемой функции снимается не со всего интервала, а лишь на системе узлов. Впрочем, подобная ситуация может возникнуть в задаче аппроксимации, в которой по тем или иным причинам (например, в результате отсутствия возможности точного интегрирования) также учитываются лишь значения функции на некоторой сетке. В последней задаче часто возникают дополнительные обстоятельства вычислительного характера, свидетельствующие о предпочтительном использовании сплайнов.

Пусть, например, решается задача о наилучшем приближении в области  $\Omega$  известной функции  $\varphi(x)$  некоторым полиномом  $P_N(x) = C_1\chi_1(x) + \dots + C_N\chi_N(x)$  в смысле наименьшего квадратичного отклонения. Это — задача о минимуме функционала

$$I = \int_{\Omega} [\varphi(x) - \sum_{i=1}^N C_i \chi_i(x)]^2 d\Omega. \quad (3.537)$$

Для нахождения коэффициентов  $C_i$  получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\frac{\partial I}{\partial C_k} = 2b_k - 2 \sum_{i=1}^N C_i a_{ik} = 0. \quad (3.538)$$

Коэффициентами ее являются интегралы

$$a_{ik} = \int_{\Omega} \chi_i(x) \chi_k(x) d\Omega; \quad b_k = \int_{\Omega} \varphi(x) \chi_k(x) d\Omega. \quad (3.539)$$

Если  $\text{supp} \{\chi_i(x)\} \supset \Omega$ , как, например, для степенных или тригонометрических полиномов, то интегралы (3.539) приходится определять по всей области  $\Omega$ , что требует значительных затрат памяти ЭВМ и машинного времени. Кроме того, редко удается построить функции  $\{\chi_i(x)\}$  так, чтобы они образовывали ортогональную систему. (Известный процесс ортогонализации в вычислительном отношении трудно реализуем, в особенности, когда область  $\Omega$  имеет не слишком простую форму. Накопление погрешностей интегрирования и округления не позволяют взять  $N$  достаточно большим.) Таким образом, матрица коэффициентов системы (3.538) при использовании классических полиномов в большинстве случаев оказывается плотно заполненной. Кроме того, в этом случае она часто бывает и плохо обусловленной. Ситуация изменяется, если в качестве функций  $\chi_i(x)$  выбираются финитные сплайны. В этом случае вычисление

интегралов осуществляется по пересечениям носителей функций  $\chi_i$  и  $\chi_k$ , т. е. по малым областям. А это требует значительно меньших затрат на вычисления. Кроме того, так как носители большинства пар функций  $\chi_i$  и  $\chi_k$  (при достаточно большом  $N$ ) не пересекаются, матрица системы (3.538) оказывается разреженной и, как правило, хорошо обусловленной.

Приведенные выше рассуждения справедливы и при рассмотрении систем уравнений, возникающих при аппроксимации неопределенных компонент структур решений краевых задач, о чем речь шла в § 15. (Функционал (3.537) — лишь простейшая модель рассмотренных функционалов и соответствует случаю, когда  $A \equiv 1$ .) При этом в краевых задачах картина оказывается более сложной. Аппроксимируемые функции в этом случае неизвестны и получить достаточно хорошую информацию о них не всегда удастся. Обычно можно лишь определить некоторый класс функций, к которому принадлежит решение  $u$  краевой задачи. Например, если  $f(x)$  (правая часть уравнения  $Au = f$ ) имеет частные производные до порядка  $k$  включительно, а  $m$  — порядок уравнения  $Au = f$ , то (при остальных весьма общих предположениях) решение  $u$  имеет производные до порядка  $m + k$  включительно, причем норма его любой частной производной порядка  $m + k$  в пространстве  $C(\Omega)$  не превышает максимальной из норм (в том же пространстве) производных порядка  $k$  правой части  $f(x)$ , умноженной на известную константу. Таким образом,  $u$  принадлежит классу  $Q$  функций, у которых производные порядка  $m + k$  ограничены известной константой.

Сказанное выше приводит к важной проблеме, рассматриваемой в теории приближений: как выбрать такие функции  $\{\varphi_k\}$ , чтобы с помощью их линейных комбинаций

$$\sum_{k=1}^N C_k \varphi_k(x) \quad (3.540)$$

можно было хорошо приблизить любую функцию, принадлежащую заданному классу (например, классу  $Q$ )?

Рассмотрим сформулированную выше проблему с общих позиций. Пусть  $K \subset X$ , где  $X$  — линейное нормированное пространство,  $L_N$  —  $N$ -мерное подпространство  $X$ . Величина

$$E(K, L_N) = \max_{x \in K} \min_{\varphi \in L_N} \|x - \varphi\|_X \quad (3.541)$$

называется *уклоном множества  $K$  от подпространства  $L_N$* . Будем рассматривать всевозможные  $N$ -мерные подпространства пространства  $X$  и найдем величину

$$d_N(K) = \min E(K, L_N), \quad (3.542)$$

где минимум находится на множестве всех упомянутых подпространств. Величина  $d_N(K)$  называется  *$N$ -поперечником* (по А. Н. Колмогорову), а пространство  $L_N^*$ , на котором минимум (3.542)



достигается, — *экстремальным пространством*.  $N$ -поперечник показывает, какая погрешность в самом лучшем случае может быть гарантирована при аппроксимации всевозможных функций из данного класса  $K$  с помощью функций вида (3.540), образующих  $N$ -мерное пространство.

Приведем некоторые результаты теории приближений, полученные в рассматриваемом направлении.

Пусть  $\tilde{W}'_C$  — класс функций вида  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , таких что

$$а) f^{(i)}(-\pi) = f^{(i)}(\pi) \quad (i = 0, 1, \dots, r-1);$$

$$б) \|f^{(r)}(x)\|_{C[-\pi, \pi]} \leq 1. \quad (3.543)$$

Доказано [176], что

$$d_{2N-1}(\tilde{W}'_C) = d_{2N}(\tilde{W}'_C) = K_r N^{-r}, \quad (3.544)$$

где  $K_r$  — известные постоянные (константы Фавара), а экстремальные пространства — это пространства тригонометрических многочленов и пространства сплайнов степени  $r-1$ . Если условие «а» не выполняется, то, по В. М. Тихомирову,

$$K_r N^{-r} \leq d_{2N-1}(\tilde{W}'_C) = d_{2N}(\tilde{W}'_C) \leq [K_r + \alpha_r(N)] N^{-r}, \quad (3.545)$$

где  $\alpha_r(N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . При этом пространство  $L_{2N} = P_r + T_{2N-r}$  ( $P_r$  — пространство алгебраических многочленов, а  $T_{2N-r}$  — тригонометрических) почти экстремальное в том смысле, что

$$\lim d_{2N}(\tilde{W}'_C) [E(\tilde{W}'_C, L_{2N})]^{-1} = 1. \quad (3.546)$$

Если в формуле (3.543) условие «б» заменить условием

$$\|f^{(r)}\|_{L_1[-\pi, \pi]} \leq 1, \quad (3.547)$$

то, по А. Н. Колмогорову, для полученного пространства  $\tilde{W}'_{L_1}$

$$d_{2N-1}(\tilde{W}'_{L_1}) = d_{2N}(\tilde{W}'_{L_1}) = N^{-r}, \quad (3.548)$$

а пространство тригонометрических полиномов — экстремальное. Если, сохранив условие (3.547), отказаться от условия «а» (3.543), то

$$N^{-r} \leq d_{2N-1}(\tilde{W}'_{L_1}) = d_{2N}(\tilde{W}'_{L_1}) \leq N^{-r} [1 + \beta_r(N)],$$

где  $\beta_r(N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  и пространство  $L_{2N} = P_r + T_{2N-r}$  почти экстремальное в смысле равенства (3.545).

К сказанному выше добавим, что, как показал В. М. Тихомиров, пространство сплайнов степени  $r-1$  экстремальное с точки зрения приближения класса  $\tilde{W}'_C$ , если сетка интерполяции выбирается равномерной. Интерполяция данной функции требует только знания (вычисления) значений этой функции в узлах интерпо-

ляции. В то же время наилучший метод приближения функций класса  $\tilde{W}_C^r$  тригонометрическими полиномами — метод Фавара — требует вычисления коэффициентов Фурье, т. е. интегралов вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx; \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

для точного (или достаточно точного) вычисления которых требуется, вообще, вычисление  $f(x)$  в гораздо большем числе точек.

Если интерполировать функцию класса  $\tilde{W}_C^r$  с помощью  $2N$ -мерного пространства сплайнов степени  $r - 1$ , то погрешность интерполяции не превышает  $CN^{-r}$ . Если осуществлять интерполяцию  $(2N - 1)$ -мерным подпространством тригонометрических полиномов степени  $N - 1$ , то погрешность будет, вообще, порядка  $CN^{-r} \ln N$ , т. е. в  $\ln N$  раз больше. Поэтому, в частности, коллокация с использованием тригонометрических полиномов не считается хорошим методом, а коллокация с помощью сплайнов дает хорошие результаты. Подведем некоторые итоги. Примеры, рассмотренные выше на классах  $\tilde{W}_C^r$  и  $\tilde{W}_L^r$ , показывают, что сплайны по своим аппроксимационным свойствам не уступают классическим (степенным и тригонометрическим) полиномам. Более того, наилучший способ приближения сплайнами — интерполяция — отличается большой простотой. С точки зрения применений сплайны обладают еще одним огромным преимуществом — среди сплайнов есть локальные, не равные нулю только на малом интервале, со всеми вытекающими последствиями, о которых говорилось ранее. Правда, функции класса  $\tilde{W}_L^r$ , лучше всего приближают тригонометрическими полиномами; наилучший метод при этом — в качестве приближающей функцию  $f(x)$  многочлена взять сумму  $n$  членов ряда Фурье функции  $f(x)$ . Однако и здесь у сплайнов есть свои преимущества. Сплайн, лучше всего приближающий функцию  $f(x)$  по норме  $L_2$ , хорошо приближает ее и в норме  $C$ . Сумма  $n$  членов тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x)$ , приближая  $f(x)$  наилучшим образом в норме  $L_2$ , в норме  $C$  дает в  $\ln N$  раз худшее приближение, чем наилучшее. Недостаток сплайнов следующий: тригонометрические многочлены представляют собой экстремальное пространство для  $\tilde{W}_C^r$  при всех натуральных  $r$ , а экстремальные сплайны для  $\tilde{W}_C^r$  — это их пространство степени  $r - 1$ . Это означает, что при разных значениях  $r$  нужно брать сплайны разной степени. А если неизвестно, сколько непрерывных производных есть у приближаемой функции, неясно, какой степени сплайны нужно использовать. Многочлены же обладают свойством универсальности, так как могут приближать любую функцию настолько хорошо, насколько это возможно.

Итак, классические многочлены в указанном смысле универсальны, но для них не существует базисов с локальными носителя-

ми. Сплайны указанным свойством локальности обладают, но они не универсальны. В связи с этим возникает естественный вопрос: нельзя ли предложить такие аппроксимационные средства, которые были бы одновременно и локальными и универсальными с точки зрения теории приближений, оставаясь в то же время достаточно простыми в конструктивном отношении (в смысле их численной реализации и выполнения различных аналитических операций)? Оказывается, на этот вопрос может быть дан положительный ответ. Решение этой проблемы удастся осуществить благодаря введению атомарных функций, о которых будет идти речь в следующем параграфе.

*Упражнения и задачи.* 1. Пусть заданы сетка  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  и числа  $y_0, y_1, \dots, y_N$ . Доказать, что среди всех функций  $\{f(x)\} \subset C^2[a, b]$ , таких что  $f(x_i) = y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ), кубический сплайн  $S(x)$ , построенный на указанной сетке и удовлетворяющий условиям  $S''(a) = S''(b) = 0$ , доставляет минимум функционалу

$$I = \int_a^b [f''(x)]^2 dx. \quad (3.549)$$

(Это свойство называют свойством «минимальной кривизны», поскольку при малой производной  $f'(x)$  производная  $f''(x)$  близка к кривизне [2].)

2. Предложить метод нахождения коэффициентов интерполяционных сплайнов второго и третьего порядков при использовании линейных комбинаций сдвигов сжатий финитных сплайнов  $B_2(x)$  и  $B_3(x)$  соответственно.

3. Установить экстремальные свойства сплайнов  $m$ -го порядка, аналогичные свойству (3.549) для кубических сплайнов.

4. Построить квадратурные формулы Гаусса для  $n = 3, 4, 5$  с весом  $B_1(x), B_2(x), B_3(x)$  ( $B_k(x)$  —  $B$ -сплайны Шенберга).

5. Пусть кубический сплайн  $S(x)$  интерполирует  $f(x) \in C^2[a, b]$  в точках сетки  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ . Доказать, что

$$\int_a^b (f'' - S'')^2 dx = \int_a^b (f'')^2 dx - 2[f'(x) - S'(x)] S''(x) \Big|_a^b + \\ + 2 \sum_{k=1}^N [f(x) - S(x)] S'''(x) \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_a^b (S'')^2 dx.$$

6. В условиях предыдущей задачи вывести тождество

$$\int_a^b (f'')^2 dx = \int_a^b (S'')^2 dx + \int_a^b (f'' - S'')^2 dx,$$

если либо  $S''(a) = S''(b)$ , либо  $S'(a) = f'(a)$ ,  $S'(b) = f'(b)$ .

7. Пусть  $f(x) \in C^4[a, b]$ . Показать, что при выполнении условий задачи 6

$$\int_a^b (f'' - S'')^2 dx = \int_a^b [f(x) - S(x)] f^{(4)}(x) dx.$$

8. Вывести при условиях задачи 6 из ее результата единственность интерполяционного сплайна.

9. Вывести из задачи 8 (при условиях задачи 6) существование интерполяционного сплайна.

10. При выполнении условий задачи 6 доказать, что интерполирующий сплайн  $S(x)$  минимизирует функционал

$$\int_a^b (g'')^2 dx$$

в классе всех функций, интерполирующих  $f(x)$  в точках сетки  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  и таких, что  $g'(a) = f'(a)$ ;  $g'(b) = f'(b)$ , если  $S'(a) = f'(a)$ ;  $S'(b) = f'(b)$ .

11. Используя задачу 6, вывести, что на  $(x_i, x_{i+1})$

$$|f'(x) - S'(x)| \leq \left[ \int_a^b (f'')^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} |x_i - x_{i+1}|^{\frac{1}{2}};$$

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2} \left[ \int_a^b (f'')^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} |x_i - x_{i+1}|^{\frac{3}{2}}.$$

12. Сформулировать аналоги утверждений задач 5, 6 для интерполирующих сплайнов пятой степени.

## § 16. Атомарные функции

Приведем краткие сведения об атомарных функциях — новому направлению в области дифференциальных уравнений и теории приближений. Начало теории атомарных функций было положено работами [123—127]. Последующее развитие этого направления, приведшее к постановке и решению ряда вопросов фундаментального значения, в основном было выполнено В. А. Рвачевым [127]. Прикладная сторона этой теории рассматривалась Е. А. Федотовой, Т. И. Шейко, А. А. Дабагяном и др. [30, 144, 184].

**1. Атомарная функция** по определению — это финитная функция, которая является решением функционально-дифференциального уравнения вида

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = \\ = \sum_{k=1}^M b_k y(ax - b_k), \end{aligned} \quad (3.550)$$

где  $|a| > 1$ . Если  $b_k \equiv 0$  ( $k = 1, \dots, M$ ), приходим к обыкновенному однородному дифференциальному уравнению.

Все атомарные функции бесконечно дифференцируемые, но не аналитические в точках своего носителя функции, т. е. обладают гладкостью меньшей, чем, скажем, алгебраические и тригонометрические полиномы, но большей, чем сплайны. Наиболее простая и важная атомарная функция — функция  $\text{up}(x)$  (рис. 121), для которой была получена формула [125]

$$\text{up}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}} dt. \quad (3.551)$$

Первоначально функция  $\text{up}(x)$  появилась при следующих обстоятельствах (это относится к 1967 г.). Как известно, финитные функции с «горбообразным» графиком (см. рис. 121) встречаются весьма часто. В частности, это финитные сплайны (см. рис. 113 и 114), усредняющие ядра, определяемые формулой

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{kx^2}{1-x^2}}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (3.552)$$

и др. Функция (3.552), приводимая многократно в различных публикациях, была по существу введена еще Коши в начале XIX в. Она широко используется в настоящее время в теории дифференцируемых многообразий, теории обобщенных функций и некоторых других исследованиях [17, 18, 126].

Подойдем к построению функции с графиком вида, показанного на рис. 121, с несколько более общих позиций. Не будем вначале задаваться конкретной формой участка  $ABC$  графика (рис. 122, а). Пусть это будет финитная функция  $y = f(x)$ , где  $f(x)$  — пока неизвестная функция, для определенности такая, что  $\text{supp } f(x) = [-1, 1]$ ;  $f(0) = 1$ ;  $f(-x) \equiv f(x)$ . Среди операций, которые придется выполнять над встречающимися в математике финитными функциями, наиболее важная и распространенная — операция дифференцирования. (Вспомним, например, что в краевых задачах приближающие решение линейные комбинации сдвигов финитных сплайнов необходимо подставлять в один из функционалов, содержащих производные.) Если функцию  $y = f(x)$  дифференцируем, то получаем функцию  $y = f'(x)$  с графиком, показанным на рис. 122, б. Это также финитная функция с тем же носителем  $[-1, 1]$ .

Поставим следующий вопрос: нельзя ли выбрать первоначальную форму участка графика  $ABC$  функции  $y = f(x)$  так, чтобы участки  $ADO$  и  $OEC$  графика ее производной  $y = f'(x)$  были подобны (с точностью их сжатия в два раза вдоль оси  $Ox$  и некоторого растяжения вдоль оси  $Oy$ ) участку  $ABC$  графика функции  $y = f(x)$ ?

Легко видеть, что если такая функция существует, то она будет бесконечно дифференцируемой. Двукратное дифференцирование

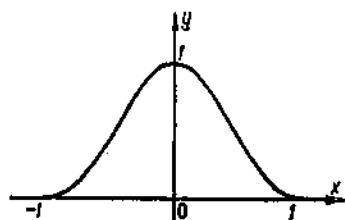


Рис. 121.

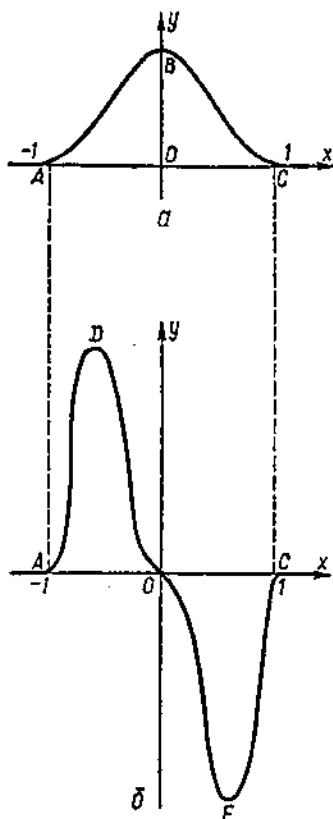


Рис. 122.

такой функции приведет к функции с графиком, показанным на рис. 123. При каждом последующем дифференцировании число интервалов положительности и отрицательности будет удваиваться. Кроме того, линейными комбинациями сдвигов такой функции можно было бы получать точные представления полиномов. Это видно из того, что взяв, например, производную  $f^{(n)}(x)$  и ее сдвиг  $f^{(n)}(x-d)$ , всегда можно подобрать  $d$  так, что некоторому интервалу положительности  $f^{(n)}(x)$  будет соответствовать интервал отрицательности  $f^{(n)}(x-d)$ . А тогда на этом интервале будет

$$f^{(n)}(x) + f^{(n)}(x-d) \equiv [f(x) + f(x-d)]^{(n)} \equiv 0.$$

Следовательно, на этом интервале  $f(x) + f(x-d)$  будет полиномом  $(n-1)$ -й степени. Включив в рассмотрение большее число сдвигов функции  $f(x)$ , аналогично можно было бы получать через них полиномы на интервалах произвольной длины. Это наводит на мысль о возможных хороших аппроксимационных свойствах линейных комбинаций сдвигов функции  $f(x)$ , сочетании бесконечной дифференцируемости с локальностью.

Но существует ли функция  $f(x)$  с указанным выше свойством? На этот вопрос

был дан положительный ответ [123]. Из самого определения  $f(x)$  видно, что она является решением дифференциально-функционального уравнения

$$f'(x) = kf \left[ 2 \left( x + \frac{1}{2} \right) \right] - kf \left[ 2 \left( x - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (3.553)$$

где  $k$  — коэффициент растяжения графика производной вдоль оси  $Oy$ . Уравнение (3.553) является частным случаем уравнения (3.550) и, вследствие того что оно имеет постоянные коэффициенты, к нему легко применима методика преобразований

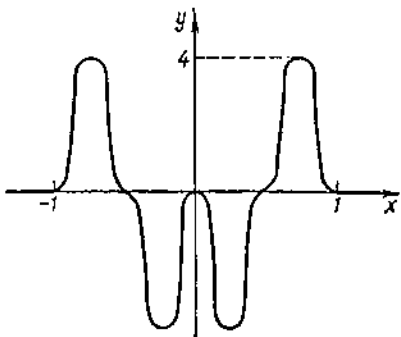


Рис. 123.

Фурье. На основе этого пути, в частности, был решен вопрос о существовании и единственности решения уравнения (3.553). Оказалось, что финитное решение уравнения (3.553), такое, что  $\text{supp } f(x) = [-1, 1]$  и  $f(0) = 1$ , существует и притом единственное при  $k = 2$  (и только при этом значении!). Это решение и было обозначено  $\text{up}(x)$ . Таким образом,  $\text{up}(x)$  является единственным финитным (с указанными условиями нормировки) решением дифференциального уравнения

$$\text{up}'(x) = 2 \text{up}(2x + 1) - 2 \text{up}(2x - 1). \quad (3.554)$$

Оказалось, что функция  $\text{up}(x)$  ни в одной точке своего носителя неаналитична: соответствующий  $\text{up}(x)$  ряд Тейлора имеет либо нулевой радиус сходимости, либо сходится к другой функции. Ввиду этого оказалось невозможным использовать для представления  $\text{up}(x)$  степенные ряды. Указанное выше интегральное представление (3.551) функции  $\text{up}(x)$  также весьма неудобно для вычислений, так как содержит несобственный интеграл от произведения осциллирующей функции  $e^{itx}$  на бесконечное произведение. Однако удалось установить, что значения функции  $\text{up}(x)$  в двоично-рациональных точках (т. е. точках вида  $k2^{-n}$ ) — рациональные числа и могут быть вычислены точно по несложным рекуррентным формулам. Для вычисления значений функции  $\text{up}(x)$  в любой точке был предложен ряд специального вида

$$\text{up}(x - 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{p_1 + \dots + p_k + 1} p_k \sum_{j=0}^k C_{jk} (x - 0, p_1 \dots p_k)^j, \quad (3.555)$$

где  $x = 0, p_1 \dots p_k$  — представление числа  $x \in [0, 1]$  в двоичной системе счисления (например,  $1/3 = 0,010101\dots$ ), а  $C_{jk}$  — известные рациональные числа. Этот ряд очень быстро сходится. Получается он с помощью следующего интересного свойства функции  $\text{up}(x)$ : для любого  $m$  и любого алгебраического многочлена  $P_m(x)$  степени  $m$  существуют коэффициенты  $C_j$  такие, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j \text{up}(x - j2^{-m}) \equiv P_m(x). \quad (3.556)$$

Хотя сумма здесь бесконечная, фактически при каждом  $x$  вследствие финитности функции  $\text{up}(x)$  в (3.556) отлично от нуля только конечное число слагаемых. (Интуитивные соображения, приводящие к свойству (3.556), высказаны выше.) Для коэффициентов  $C_j$  получены формулы вида

$$C_k = \sum_{l=1}^{2^n} \left[ \cos(2\pi j k 2^{-n}) \sum_{i=0}^{v_2(j)} c_{li} k^i + \sin(2\pi j k 2^{-n}) \sum_{i=0}^{v_2(j)} d_{li} k^i \right], \quad (3.557)$$

где  $v_2(j)$  — это 2-адический показатель числа  $j$  (т. е. наибольшее число такое, что  $2^{v_2(j)}$  делит  $j$ ).

В частности, справедливы формулы:

$$x^n \equiv \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} i^k \operatorname{up}(x - i2^{-n}), \quad (3.558)$$

где

$$A_n^{(n)} = 2^{-(n^2+n)}, \quad A_{n-2}^{(n)} = 2^{1-n} C_n^2 \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \alpha_j^{(n)} j^2 A_n^{(n)};$$

$$A_{n-2i}^{(n)} = 2^{1-n} \left( C_n^{2i} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \alpha_j^{(n)} j^{2i} A_n^{(n)} + A_{n-2}^{(n)} C_n^{2(i-1)} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \alpha_j^{(n)} j^{2(i-1)} + \dots + \right. \\ \left. + A_{n-2(i-1)}^{(n)} C_n^2 \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \alpha_j^{(n)} j^2 \right), \quad A_{n-2i+1}^{(n)} = 0. \quad (3.559)$$

Здесь для краткости положено  $\alpha_j^{(n)} \equiv \operatorname{up}(j2^{-n})$ . Например,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{up}(x - k) \equiv 1; \quad \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \operatorname{up}\left(x - \frac{k}{2}\right) \equiv x; \quad (3.560)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{k^2}{64} - \frac{1}{36} \right) \operatorname{up}\left(x - \frac{k}{4}\right) \equiv x^2.$$

Таким образом, из сдвигов функции  $\operatorname{up}(x)$  как из «атомов» можно составить любой многочлен, что отчасти и мотивировало выбор названия «атомарные» для функций, подобных  $\operatorname{up}(x)$ . Этим свойством представления многочленов и объясняется то, что линейные комбинации двоично-рациональных сдвигов сжатий функции  $\operatorname{up}(x)$  хорошо приближают дифференцируемые функции (см. результаты, приведенные в конце параграфа). Для приближения функций нескольких аргументов можно (подобно тому как при построении формулы (3.523) был использован финитный сплайн Шенберга  $B_3$ ) использовать полиномы вида

$$f(x_1, \dots, x_n) \approx \sum_i C_i \dots \operatorname{up}(\alpha_1 x_1 + \beta_1) \dots \operatorname{up}(\alpha_n x_n + \beta_n), \quad (3.561)$$

сочетающими в себе бесконечную дифференцируемость с локальностью слагаемых. (Произведение  $\operatorname{up} x_1 \dots \operatorname{up} x_n$  обозначается также  $\operatorname{up}(x, n)$  [125].)

В связи со сказанным выше остановимся на одном, часто возникающем вопросе: зачем придумывать какие-то «сложные» новые функции, подобные функции  $\operatorname{up}(x)$ , в то время как можно использовать давно известную финитную бесконечно дифференцируемую функцию (3.552)?

Ответ на этот вопрос сформулирован следующим образом [126, 127]. Во-первых, что самое главное, использование сдвигов сжатий функции  $f(x)$  (имеется в виду (3.552)) не дает не только «хорошей»,



но даже и какой-либо скорости приближения, так как по теореме Фикса — Стренга для хорошего приближения  $n$  раз дифференцируемых функций нужно, чтобы из сдвигов функции  $f(x)$  можно было составить любой многочлен степени  $n$ . А из сдвигов функции  $f(x)$  не составишь даже единицы (многочлена нулевой степени). Во-вторых, неверно, что  $f(x)$  «проще», чем  $\text{up}(x)$ . Конечно, на первый взгляд вычислить значение  $f(x)$  в точке  $x$  проще, чем значение  $\text{up}(x)$ . Однако значения функции  $\text{up}(x)$  также можно вычислять точно и быстро, кроме того, в точках вида  $k2^{-n}$  эти значения — рациональные числа, чего о функции  $f(x)$  не скажешь. Более того, у функции  $\text{up}(x)$  преобразование Фурье имеет вид

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}}, \quad (3.562)$$

хотя и сложный, но явный. Для функций  $f(x)$  вычислить преобразование Фурье, по-видимому, весьма затруднительно. Моменты функции  $\text{up}(x)$ , т. е. интегралы вида

$$\int_{-1}^1 x^n \text{up}(x) dx, \quad \int_0^1 x^n \text{up}(x) dx —$$

рациональные числа и вычисляются по не слишком сложной рекуррентной формуле. Вычислять интегралы вида

$$\int_{-1}^1 x^{2n} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) dx,$$

по-видимому, значительно сложнее. Наконец, производная порядка  $n$  очень просто выражается через  $\text{up}(x)$ , в то время как производная порядка  $n$  от функции  $f(x)$  — весьма сложное выражение, которое в явном виде записать затруднительно, тем более определить, где оно обращается в нуль или достигает экстремума. Конечно, можно попытаться исправить функцию  $f(x)$ , чтобы устранить отсутствие у нее хороших свойств с точки зрения приближения с помощью ее сдвигов сжатий. Однако, добиваясь таких свойств для приближения функций, сколь угодно дифференцируемых, мы в итоге приходим к функции  $\text{up}(x)$ , поскольку доказано [127], что если с помощью сдвигов финитной функции  $\varphi(x)$  можно составить многочлен любой степени, то функция  $\varphi(x)$  либо равна  $\text{up}(x)$ , либо более сложная, чем  $\text{up}(x)$ , в том смысле, что ее  $n$ -я производная с ростом  $n$  растет быстрее, чем  $\text{up}^{(n)}(x)$ , и имеет больше нулей, т. е. больше «извивается». А именно для  $\text{up}^{(n)}(x)$  выполнимо равенство

$$\max |\text{up}^{(n)}(x)| = 2^{C_n^2+1};$$

для всех других функций  $\varphi(x)$ , обладающих указанным выше свойством,  $\varphi^{(n)}(x) > 2^{C_n^2+1}$ .

2. Перейдем к более детальному изложению результатов об аппроксимационных свойствах полиномов, построенных на функ-

ции  $\text{up}(x)$ , а также введем некоторые другие атомарные функции. Более полная информация по данному вопросу содержится в монографии [127].

Пусть  $UP_n$  — пространство функций на  $[-\pi, \pi]$  вида

$$\varphi(x) = \sum_k C_k \text{up}\left(\frac{x}{\pi} - k2^{-n}\right), \quad (3.563)$$

а  $\widetilde{UP}_n$  — пространство функций такого же рода, но только периодических с периодом  $2\pi$ :  $\varphi^{(i)}(-\pi) = \varphi^{(i)}(\pi)$  для  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Размерность пространства  $\widetilde{UP}_n$  равна  $2^{n+1}$ , а размерность пространства  $UP_n$  равна  $2^{n+1} + n + 1$ . Очевидно также, что  $UP_n \subset \subset UP_{n+1}$ ,  $\widetilde{UP}_n \subset \subset \widetilde{UP}_{n+1}$ ,  $\widetilde{UP}_n \subset UP_n$ . Оказывается, пространства  $\widetilde{UP}_n$  почти экстремальны для классов  $\widetilde{W}'_C, \widetilde{W}'_{L_n}$ , упоминавшихся в предыдущем параграфе, при всех  $r$ , а пространства  $UP_n$  почти экстремальны для классов  $W'_C, W'_{L_n}$  (и для классов  $\widetilde{W}'_C, \widetilde{W}'_{L_n}$  вследствие того, что  $\widetilde{UP}_n \subset UP_n$ ,  $(2^{n+1} + n + 1)2^{-n-1} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ ). Таким образом, погрешность приближения с помощью функции  $\text{up}(x)$  равна наилучшей возможной (для указанных выше классов) с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, которые с практической точки зрения не имеют значения. Оценка  $K_r n^{-r}$  при приближении по норме  $C$   $[-\pi, \pi]$  конкретной функции класса  $\widetilde{W}'_C$  может быть несколько улучшена. Для этого введем понятие модуля непрерывности функции  $f(x)$ . По определению модуль непрерывности функции  $f(x)$  — функция  $\omega(f, h)$ , определяемая формулой

$$\omega(f, h) = \max_{|x_1 - x_2| < h} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Если  $f(x)$  непрерывна, то модуль непрерывности  $\omega(f, h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Пусть  $E_n(f)_C$  — наилучшее приближение функции  $f(x)$  в норме  $C$   $(2n-1)$ -мерным пространством тригонометрических полиномов степени  $n-1$ . В 1911 г. Джексон доказал, что если  $f$  имеет непрерывную производную порядка  $r$ , то

$$E_n(f)_C \leq \frac{C_r}{n^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right).$$

Этот результат дает более точную оценку приближения конкретных функций из  $\widetilde{W}'_C$ , так как  $C_r \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) n^{-r}$  бесконечно малая более высокого порядка, чем  $K_r n^{-r}$ . Оказывается, теореме типа Джексона можно получить и для приближения с помощью пространств  $\widetilde{UP}_n$  из упомянутых выше результатов о приближении класса  $\widetilde{W}'_C$  с помощью  $\widetilde{UP}_n$  с использованием аппарата так называемых функций Стеклова совершенно аналогично тому, как теорема Джексона для приближения тригонометрическими полиномами

получена Н. П. Корнейчуком [56]. Таким образом, с точки зрения теории приближений пространства линейных комбинаций сдвигов функций  $up(x)$  в какой-то мере универсальны (очень гладкие — аналитические функции приближаются с помощью этих пространств не самым лучшим образом потому, что сама функция  $up(x)$  неаналитична). Выяснилось, что в пространствах  $UP_n$ ,  $\widetilde{UP}_n$  можно выбрать и локальный базис, столь важный с точки зрения практического применения результатов теории приближений, т. е. что любая функция, принадлежащая  $UP_n$  или  $\widetilde{UP}_n$ , может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_k C_k \varphi_{n,k}(x),$$

где  $\varphi_{n,k}(x)$  — функции, не равные нулю только на промежутке длиной  $(n+2)2^{-n}$  (а  $(n+2)2^{-n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ). Причем для каждого фиксированного  $x$  в сумме отлично от нуля не более  $n+2$  слагаемых. Наличие локального базиса связано в конечном счете с тем важным обстоятельством, что функция  $up(x)$  (как и многие другие атомарные функции, для которых в уравнении (3.550)  $C_k = kh + d$ ) безгранично дробима (не путать с безграничной делимостью законов распределения случайных величин). По определению финитная функция  $\varphi(x)$  называется *безгранично дробимой*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует финитная функция  $\varphi_\varepsilon(x)$ , длина носителя которой не превышает  $\varepsilon$ , такая, что  $\varphi = \sum_{k=1}^{M_\varepsilon} C_k \varphi_\varepsilon(x - d_k)$ .

Функция  $\varphi_\varepsilon(x)$  называется при этом *дробной компонентой* функции  $\varphi(x)$ . Таким образом, функция безгранично дробима, если она может быть «составлена» из конечного числа сдвигов функции, не равной нулю только на сколь угодно малом промежутке. Примеры безгранично дробимых функций — финитные сплайны (*B-сплайны*). Дробные компоненты *B-сплайнов* — сжатия самих *B-сплайнов*. Тривиальный, но очень важный, пример безгранично дробимой функции — функция  $\varphi(x)$ , равная единице на отрезке  $[0, 1]$  и нулю в остальных точках. Для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти  $N$  такое, что  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ . Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_N(x - kN^{-1}),$$

где  $\varphi_N(x) = 1$  на отрезке  $[0, N^{-1}]$ , и равна нулю в остальных точках. В анализе, кроме обычного (поточечного) умножения функций  $f(x) \varphi(x)$ , используется и другое — так называемая свертка:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) g(t) dt.$$

Нетрудно заметить, что свертка двух безгранично дробимых функций — функция безгранично дробимая. ( $v$ -дробная компонента функции  $f * g$  — это просто свертка  $v/2$ -дробных компонент функций  $f$  и  $g$ .) Значительная часть до сих пор изученных безгранично дробимых функций (включая и финитные сплайны) может быть получена с помощью операции свертки (может быть и бесконечно кратной) из приведенного выше тривиального примера кусочно-постоянной функции. Вместо кусочно-постоянной можно рассмотреть функцию  $\varphi(x)$ , равную  $e^{ax}$  на отрезке  $[0, 1]$  и нулю — в остальных точках. Она также безгранично дробима. В качестве дробных компонент можно брать функции  $\varphi_N(x)$ , равные  $e^{ax}$  на отрезке  $[0, N^{-1}]$  и нулю — в остальных точках. Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N e^{kN^{-1}} \varphi_N(x - kN^{-1}).$$

Рассматривая свертки таких функций, мы приходим к показательным сплайнам, которые, следовательно, также безгранично дробимы, а с помощью бесконечно кратных сверток приходим к некоторым атомарным функциям, о которых будет сказано ниже. Все известные нам безгранично дробимые функции факторизуются подобным образом, т. е. их можно представить в виде

$$\varphi_1 * \varphi_2 * \dots * \varphi_n * \dots,$$

где  $\varphi_n$  — безгранично дробимая функция простейшего вида, т. е. составленная из кусков — решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Локальный базис в пространствах  $UP_n$ ,  $\widetilde{UP}_n$  состоит из сдвигов функций  $Fur_n\left(\frac{x}{n}\right)$ . Функции  $Fur_n(x)$  являются дробными компонентами функции  $ur(x)$  и задаются формулой

$$Fur_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} F^{[n]}(t) dt,$$

где

$$F^{[n]}(t) = \left( \frac{\sin t 2^{-n-1}}{t 2^{-n-1}} \right) \prod_{j=n+2}^{\infty} \frac{\sin t 2^{-j}}{t 2^{-j}}.$$

Очевидно, что  $Fur_0(x) \equiv ur(x)$ . Для функций  $Fur_n(x)$  справедлива следующая формула:

$$Fur_n(x) = 2^{-n-1} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+k}^k Fur_{n+1}(x - k 2^{-n-1} + (n+1) 2^{-n-2}).$$

Носитель функции  $Fur_n(x)$  — отрезок  $[-(n+2) 2^{-n-1}, (n+2) \times 2^{-n-1}]$ . Производная порядка  $n+1$  функции  $Fur_n(x)$  имеет вид

$$Fur_n^{(n+1)}(x) = 2^{(n+1)n} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^k ur(2^{n+1}x - 2k + (n+1)).$$

Функции  $\text{Fur}_n(x)$  — атомарные, т. е. удовлетворяют функционально-дифференциальному уравнению вида (3.550).

Функция  $\text{ur}(x)$  неотрицательна, интеграл от нее равен единице, следовательно, она — плотность распределения некоторой случайной величины. Преобразование Фурье функции  $\text{ur}(x)$  (т. е. характеристическая функция этой случайной величины) равно

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}}.$$

Известно, что  $\sin t/t$  — характеристическая функция случайной величины, равномерно распределенной на отрезке  $[-1, 1]$ , а сумме независимых случайных величин соответствует произведение характеристических функций. Поэтому если  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  — последовательность независимых равномерно распределенных на  $[-1, 1]$  случайных величин, то случайная величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k}$$

имеет плотность распределения  $\text{ur}(x)$ . Здесь уместно вспомнить, что равномерно распределенную на  $[-1, 1]$  случайную величину  $\eta$  можно в свою очередь представить в виде

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k 2^{-k},$$

где  $\{\eta_k\}$  — последовательность независимых дискретных случайных величин, принимающих с вероятностью  $1/2$  значения  $-1$  и  $1$  (случайная величина типа «орел» — «решка») точно так же, как можно задать наугад действительное число  $x$  из отрезка  $[0, 1]$  ( $x = 0, p_1 p_2 \dots p_n \dots$ ) в двоичной системе счисления, т. е.  $x = \sum_{n=1}^{\infty} p_n 2^{-n}$  ( $p_n = 0, 1$ ) — это все равно, что задать наугад  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  — цифры записи числа  $x$  в двоичной системе счисления.

Таким образом, случайная величина, плотностью которой является функция  $\text{ur}(x)$ , получается из последовательности равномерно распределенных случайных величин при использовании той же операции, с помощью которой из последовательности дискретных случайных величин типа «орел» — «решка» получается равномерно распределенная случайная величина.

Нетрудно также видеть, что случайная величина  $\xi$ , плотность распределения которой — функция  $\text{ur}(x)$ , может быть представлена в виде суммы некоторого ряда независимых дискретных случайных величин. Безграничная дробимость функции  $\text{ur}(x)$  связана именно с этим. Случайную величину  $\xi$  назовем *дискретно аппроксимируемой*, если для любого  $\varepsilon > 0$  ее можно представить в виде суммы независимых случайных величин  $\xi_\varepsilon$  и  $\xi_\varepsilon$ , где величина  $\xi_\varepsilon$  — дискретна (множество значений ее конечно), а  $\xi_\varepsilon$  с вероятностью

единица принимает значения меньше  $\epsilon$ . Если  $\xi$  имеет плотность распределения  $f_\xi$ , то эта плотность — безгранично дробимая функция. Случайные величины, которые являются суммами рядов независимых дискретных величин, — частный случай дискретно аппроксимируемых случайных величин — называются *сильно дискретно аппроксимируемыми*. Так, функция  $up(x)$  — плотность распределения сильно дискретно аппроксимируемой случайной величины. Функции  $\Theta_n(x)$  (финитные сплайны), рассмотренные в § 15, — это плотности распределения случайных величин, которые являются суммами  $n + 1$  независимых случайных величин, распределенных равномерно на  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . При  $n \rightarrow \infty$  функции  $\Theta_n(x)/(n+1)$  стремятся к плотности распределения нормальной случайной величины. Между функциями  $\Theta_n(x)$  и  $\text{Fur}_n(x)$  существует следующая связь:

$$\text{Fur}_n(x) = \Theta_n(2^n x) * up(2^{n+1}x).$$

Функции  $\text{Fur}_n(x) 2^{-n-1} (n+1)^{-1}$  также стремятся к плотности нормального закона. Аналогия между функциями  $up(x)$  и  $\Theta_n(x)$  становится более явной, если вспомнить, что

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos(x 2^{-k}).$$

Тогда

$$\Theta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} (\cos 2^{-k}t)^{n+1} dt;$$

$$up(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} (\cos 2^{-k}t)^{k-1} dt,$$

т. е. как функции  $\Theta_n(x)$ , так и функция  $up(x)$  являются частными случаями функции

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} (\cos 2^{-k}t)^{\alpha_k} dt.$$

Функциям  $\Theta_n(x)$  соответствуют  $\alpha_k = \text{const}$ , а функциям  $up(x)$  и  $\text{Fur}_n(x)$  — линейные функции  $k$ :  $\alpha_k = ak + b$ .

3. В связи с безгранично дробными функциями обсудим две возможные схемы приближения локальными функциями, которые целесообразно использовать в численных методах решения краевых задач для уравнений с частными производными. Первая, общепринятая в настоящее время схема состоит в следующем. Для простоты будем рассматривать одномерную задачу (на многомерную все рассуждения легко переносятся). Возьмем некоторую финитную функцию  $\varphi(x)$  (или несколько таких функций) и будем использовать для приближения линейные комбинации сдвигов сжатий функций  $\varphi(x)$ , т. е.

$$\varphi_h(x) = \sum_k C_k \varphi(xh^{-1} - \alpha_k).$$

Эта схема подробно рассмотрена, например, в работе [126]. Установлено, что для получения хороших свойств приближения функ-

ций,  $n$  раз дифференцируемых, необходимо и достаточно выполнение некоторых эквивалентных условий для функции  $\varphi(x)$ :

а) линейные комбинации сдвигов функции  $\varphi(x)$  должны содержать алгебраические многочлены степени  $n$ ;

б)  $\hat{\varphi}(0)$  не должна равняться нулю, а в точках  $kh$ ,  $k \neq 0$  у функции  $\hat{\varphi}(t)$  должны быть нули порядка не ниже  $n+1$  (где  $\hat{\varphi}(t)$  — преобразование Фурье функции  $\varphi(x)$ ). В эту схему укладывается приближение сплайнами и сдвигами сжатий функции  $\varphi(x)$ , причем для приближения  $n$  раз дифференцируемых функций нужно брать сплайны степени  $n$  или линейные комбинации сдвигов сжатий функции  $\varphi(x)$  вида

$$\sum_k C_k \varphi(xh^{-1} - k2^{-n}).$$

Однако эта схема имеет следующий существенный недостаток. Очень часто приближенное решение краевой задачи с заданной наперед точностью находят следующим образом. Заранее сказать, сколько нужно взять базисных функций (какую взять размерность приближающего пространства), нельзя, точнее, любая оценка в реальной ситуации будет слишком завышенной. Поэтому сначала берут сравнительно небольшое число базисных функций (т. е. не очень маленькое  $h$ ), находят приближенное решение и каким-то образом оценивают его удовлетворительность с точки зрения точности. Если оно оказывается неудовлетворительным (или если оценку удовлетворительности, как часто бывает, провести трудно), решают задачу с большим числом базисных функций (с меньшим  $h$ ). Если это второе приближение оказывается удовлетворительным, счет прекращают, если нет — опять уменьшают  $h$ . Если оценка удовлетворительности решения не может быть проведена по-иному, то ее проводят так: сравнивают между собой два и более приближенных решений; если разность между ними (точнее, интересующая нас норма разности) меньше заданной погрешности, считают, что «все хорошо» (такой подход не выдерживает критики со строгой математической точки зрения, так как, например, для гармонического ряда  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , а между тем  $S - S_n$  не меньше  $\frac{1}{n}$ , поскольку  $S = \infty$ ). При этом для малых  $h$  (большого числа базисных функций) нужно решать большую линейную алгебраическую систему, а в случае нелинейной краевой задачи — нелинейную систему. Для решения часто применяют итерационные методы — методы последовательных приближений. Если первое приближение можно использовать в качестве начального для нахождения следующего, объем вычислений значительно сокращается. Но для этого желательно, чтобы первое приближение — элемент пространства  $L_{h_1}$  линейных комбинаций сдвигов сжатий функции  $\varphi(x)$  с коэффициентом сжатия  $h_1$  — можно было представить как элемент пространства  $L_{h_2}$  линейных комбинаций

сдвигов сжатий функции  $\varphi(x)$  с коэффициентом сжатия  $h_2 < h_1$  (например,  $h_2 = 0,5h_1$ ). Однако это возможно только в том случае, если  $\varphi(x)$  — безгранично дробима на дробные компоненты, которые являются ее сжатиями, т. е. когда  $\varphi(x)$  — финитный сплайн (полиномиальный).

Вторая схема следующая. Возьмем любую безгранично дробимую функцию  $\varphi(x)$  (а класс безгранично дробимых функций не ограничивается сплайнами) и будем находить приближенное решение задачи в виде линейных комбинаций сдвигов функции  $\varphi(x)$  (не сжимая ее). Если нужна большая точность, т. е. нужно увеличить размерность приближающего пространства, к используемым ранее сдвигам функции  $\varphi(x)$  добавим новые (так, что будут использоваться сдвиги по более мелкой сетке). По построению решение, найденное на любом этапе вычислений, можно использовать для нахождения следующего приближения.

Вследствие безграничной дробимости функции  $\varphi(x)$  в пространстве ее сдвигов можно всякий раз выбирать локальный базис, состоящий из сдвигов ее соответствующей дробной компоненты. Заметим, что по отношению к обыкновенным полиномиальным сплайнам обе схемы приводят к одному и тому же результату, поскольку дробные компоненты  $B$ -сплайна — это его сжатия.

Кроме функции  $ur(x)$  и ее дробных компонент  $\text{Fur}_n(x)$  до настоящего времени изучались атомарные функции  $\Xi_n(x)$ ,  $y_k(x)$ ,  $g_{k,n}(x)$  [125, 127]. Функция  $\Xi_n(x)$  — непосредственное обобщение функции  $ur(x)$  — это финитное с носителем  $[-1, 1]$  решение уравнения

$$y^{(n)}(x) = (n+1)^{n+1} 2^{-n} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k y((n+1)x + n - 2k),$$

которое имеет вид

$$\Xi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \prod_{k=1}^n \left( \frac{\sin t(n+1)^{-k}}{t(n+1)^{-k}} \right)^n dt.$$

Легко видеть, что  $\Xi_1(x) \equiv ur(x)$ . Линейные комбинации сдвигов функции  $\Xi_n(x)$  могут быть алгебраическими многочленами любой степени, для них справедливы теоремы о приближениях, аналогичные приведенным выше для функции  $ur(x)$ . Функция  $y_k(x)$  — это финитное решение уравнения

$$y'(x) - ky(x) = \frac{ke^{-0,5k}}{\text{sh } 0,5k} y(2x+1) - \frac{ke^{0,5k}}{\text{sh } 0,5k} y(2x-1).$$

которое имеет вид

$$y_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \hat{y}_k(t) dt,$$

где

$$\hat{y}_k(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2 \text{sh } 0,5k} \frac{\text{sh}(0,5k + it2^{-n})}{0,5k + it2^{-n}}.$$



Носитель функции  $y_k(x)$  — отрезок  $[-1, 1]$ . Среди линейных комбинаций сдвигов функции  $y_k(x)$  содержатся показательные функции, например

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{kj} y_k(x-j) = Ce^{kx}.$$

Функции  $g_{k,h}(x)$  — решения уравнения

$$y''(x) + k^2 y(x) = ay(3x+2h) - by(3x) + ay(3x-2h),$$

где  $a = \frac{3}{2} \cdot \frac{k^2}{1 - \cos \frac{2kh}{3}}$ ;  $b = 2a \cos \frac{2kh}{3}$ . Они имеют вид

$$g_{k,h}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \hat{g}_{k,h}(t) dt,$$

где

$$\hat{g}_{k,h}(t) = \prod_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{k^2}{1 - \cos \frac{2kh}{3}} \frac{\cos(2lh3^{-l}) - \cos \frac{2}{3} kh}{k^2 - t^2 9^{l-1}} \right\}.$$

Носитель функции  $g_{k,h}(x)$  — отрезок  $[-h, h]$ . Линейные комбинации сдвигов функций  $g_{k,h}(x)$  могут быть тригонометрическими полиномами, например

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( C_1 \cos \frac{2khm}{3} + C_2 \sin \frac{2khm}{3} \right) g_{k,h} \left( x - \frac{2mh}{3} \right) = \\ = A \cos kx + B \sin kx. \end{aligned}$$

Таким образом, из сдвигов финитных атомарных функций можно, как из «атомов», составить элементарные функции  $x^m$ ,  $e^{ax}$ ,  $\sin kx$ ,  $\cos kx$ . Атомарные функции занимают промежуточное место между сплайнами и тригонометрическими и алгебраическими многочленами, они более гладки, чем сплайны, и менее гладки, чем многочлены. Они обладают свойством локальности, как сплайны, и универсальны с точки зрения теории приближений (аппроксимативно универсальны), как многочлены. Сплайны локальны, но аппроксимативно неуниверсальны (степень сплайна для получения оптимальной скорости приближения должна зависеть от гладкости приближаемой функции), зато они более локальны, чем атомарные функции. Многочлены не локальны и аппроксимативно универсальны, зато они более универсальны с точки зрения теории приближений, чем атомарные функции (а именно очень гладкие — аналитические функции — приближаются многочленами гораздо лучше, чем атомарными функциями). Хотя атомарные функции, с одной стороны, находятся «между» многочленами и сплайнами, с другой — сплайны гораздо ближе к многочленам, чем атомарные функции, поскольку сплайны — это просто «кусочные» многочлены. Интерполяция сплайнами степени  $r-1$  функций класса  $\tilde{W}_C$  дает погрешность  $K_r N^{-r}$ , интер-

поляция тригонометрическими многочленами  $\sim CN^{-1} \ln N$ . Интерполяция класса  $\tilde{W}'_C$  элементами пространства  $\tilde{U}P_n$  сдвигов функции  $\text{up}\left(\frac{x}{\pi}\right)$  дает погрешность  $N^{-1} \ln \ln N$  [126]. Это хуже, чем погрешность интерполяции сплайнами, но лучше, чем погрешность интерполяции тригонометрическими многочленами. В пространстве  $\tilde{U}P_n$  легко построить и хороший ортогональный базис. А именно функции

$$\omega_j^{(n)}(x) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^{sn} F^{[n]}((j + s^{n+1})\pi) e^{i(j+s^{n+1})x}$$

образуют ортогональный базис в  $\tilde{U}P_n$ , причем состоящий из функций, которые при сдвигах на  $k2^{-n}$  почти не изменяются — только умножаются на некоторые коэффициенты. Иными словами, это в каком-то смысле инвариантный базис, состоящий из функций, близких к  $e^{ijx}$ . При фиксировании  $j$  и  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_j^{(n)}(x) [F^{[n]}(j\pi)]^{-1} = e^{ijx}.$$

Однако этот базис изменяется при изменении  $n$ . Оказывается в  $L_2[-\pi, \pi]$  можно построить такой ортогональный базис  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \dots$ , что функции  $\psi_1, \dots, \psi_{2^{n+1}}$  для каждого  $n$  являются базисом пространства  $\tilde{U}P_n$ . При этом для  $k > 2^{n+1}$  функция  $\psi_k$  будет инвариантна относительно сдвигов на  $s2^{-n}$  (при таких сдвигах будет только умножаться на числовой множитель). А именно для  $2^{n+1} < k \leq 2^{n+2}$

$$\psi_k(x) = R_{k-2^{n+1}, 2}^{(n)} \omega_{k-2^{n+1}}^{(n+1)} - R_{k-2^{n+1}, 1}^{(n)} \omega_k^{(n-1)},$$

где

$$R_{j,1}^{(n)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} F^{[n]}((j + 2^{n+2}s)\pi) F^{[n+1]}((j + 2^{n+2}s)\pi);$$

$$R_{j,2}^{(n)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} F^{[n]}((j + 2^{n+1}(2s+1))\pi) F^{[n+1]}((j + (2s+1)2^{n+1})\pi).$$

Выше сказано, что линейные комбинации сдвигов функции  $\text{up}(x)$  могут представлять собой многочлены любой степени. Оказывается, что если  $\varphi(x)$  — финитная функция с носителем  $[-1, 1]$  и для всех  $n$  существуют коэффициенты  $C_j^{(n)}$ , для которых

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j^{(n)} \varphi(x - j2^{-n}) \equiv x^n,$$

то либо  $\varphi(x) \equiv \text{up}(x)$ , либо для всех  $n$

$$\|\varphi^{(n)}(x)\|_{C[-1,1]} > a2^{C_n^2},$$

где  $a > 0$ . Это означает, что, как уже отмечалось ранее,  $\text{up}(x)$  самая хорошая из функций, сдвиги которых могут давать

многочлены любой степени, так как  $\| \text{up}^{(n)}(x) \|_{C[-1,1]} = 2^{C_{n+1}^2}$ , а  $2^{C_{n+2}^2} = 2^{n+1} \cdot 2^{C_{n+1}^2}$ .

4. До сих пор в математике наиболее широко применялись элементарные функции, построенные из решений уравнения

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0,$$

где  $a_i \equiv \text{const}$  (решениями такого уравнения могут быть алгебраические многочлены, показательные и тригонометрические функции). Уравнения (3.550), которым удовлетворяют атомарные функции, являются простейшим обобщением этого уравнения — справа вместо нуля поставлена линейная комбинация сдвигов сжатий функции  $y(x)$ . Поэтому атомарные функции это естественное расширение класса элементарных функций, которое стало необходимым в настоящее время, когда широко начали применяться финитные функции. Как мы видим, их целесообразно применять в численных методах там, где аппроксимируемая функция (например, решение краевой задачи) обладает неизвестной, но, возможно, большой гладкостью и где применение многочленов высокой степени затруднено ввиду их нефинитности. При этом для приближения функций  $n$  переменных, конечно, надо использовать функцию

$$\text{up}(n, x) = \prod_{i=1}^n \text{up}(x_i).$$

Вполне возможно, однако, что атомарные функции найдут применение и в других областях математики, а не только в теории приближений и численных методах (вспомним хотя бы их вероятностную интерпретацию). По существу планомерное изучение атомарных функций началось только с 1971 г., когда была построена функция  $\text{up}(x)$  (сам термин «атомарные функции» появился в 1975 г. в работе [125]). К функции  $\text{up}(x)$  можно прийти, решая следующую задачу. Пусть  $A$  — класс бесконечно дифференцируемых на  $[-1, 1]$  функций  $\varphi(x)$  таких, что  $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ ;  $\varphi^{(n)}(k2^{1-n}) = 0$  для всех целых  $n \geq 1$ , и таких, что для каждой  $\varphi(x) \in A$  существует последовательность  $n_k \rightarrow \infty$  (для каждого  $\varphi(x)$ , вообще, своя), что

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \|\varphi^{(n_k)}\|_C 2^{-C_{n_k}^2} \leq 1.$$

Тогда в классе  $A$  есть и единственная наибольшая функция  $\varphi^*(x)$ , т. е. такая, что для любой  $\varphi(x) \in A$ , любого  $x$  и любого  $i = 0, 1, 2, \dots$   $|\varphi^{(i)}(x)| \leq |\varphi^{*(i)}(x)|$ .

Оказывается  $\varphi^*(x) \equiv \text{up}(x)$ . Иными словами, решение сформулированной выше задачи на экстремум удовлетворяет функционально-дифференциальному уравнению. В упражнении 1 § 15 упоминалось свойство минимальной кривизны, которым обладает интерполирующий кубический сплайн. Аналогичные свойства имеют и пространства линейных комбинаций сдвигов сжатий функции  $\text{up}(x)$ , только нужно считать  $f_i$  не значениями функций в заданных точ-

ках, а интегралами от произведения  $f(x)$  на некоторую функцию, стремящуюся к  $\delta$ -функции Дирака  $\delta(x - x_i)$ . На самом деле в результате любых измерений получаем не значение измеряемой величины в данной точке, а некоторую усредненную величину, т. е. интеграл от неизвестной функции на некоторую, правда, тоже неизвестную, дельтаобразную функцию. С точки зрения теории «абстрактных» сплайнов атомарные функции, таким образом, также можно считать «сплайнами», только бесконечно дифференцируемыми. Атомарная функция, которая является решением уравнения

$$y'(x) = \frac{9}{2}y(3x+2) - \frac{9}{2}y(3x-2),$$

есть бесконечно дифференцируемая финитная функция (не равна тождественно нулю) на множестве полной меры, т. е. почти всюду, — многочлен. Классические сплайны обладают конечной гладкостью в конечном множестве точек, а в остальных точках — очень большой аналитической гладкостью. Упрощенно атомарные функции получаются из классических сплайнов «размазыванием» этой конечной гладкости с отдельных точек, так что аналитическая гладкость переходит в более слабую бесконечную дифференцируемость, которая зато получается уже всюду.

Таблица значений функции  $up(x)$  следующая:

$x$	$up(x)$	$x$	$up(x)$
0,50	0,500000000	0,75	$0,694444445 \cdot 10^{-1}$
0,51	0,480000000	0,76	$0,598444445 \cdot 10^{-1}$
0,52	0,460000017	0,77	$0,510444877 \cdot 10^{-1}$
0,53	0,440000421	0,78	$0,430440239 \cdot 10^{-1}$
0,54	0,420003478	0,79	$0,358409663 \cdot 10^{-1}$
0,55	0,400016184	0,80	$0,294282603 \cdot 10^{-1}$
0,56	0,380053256	0,81	$0,237911889 \cdot 10^{-1}$
0,57	0,360139056	0,82	$0,189053889 \cdot 10^{-1}$
0,58	0,340308139	0,83	$0,147363055 \cdot 10^{-1}$
0,59	0,320605107	0,84	$0,112393379 \cdot 10^{-1}$
0,60	0,301083436	0,85	$0,836100883 \cdot 10^{-1}$
0,61	0,281802850	0,86	$0,604155412 \cdot 10^{-2}$
0,62	0,262826445	0,87	$0,421800000 \cdot 10^{-2}$
0,63	0,244218000	0,88	$0,282644445 \cdot 10^{-2}$
0,64	0,226041554	0,89	$0,180999032 \cdot 10^{-2}$
0,65	0,208361009	0,90	$0,108343562 \cdot 10^{-2}$
0,66	0,191239338	0,91	$0,605106267 \cdot 10^{-3}$
0,67	0,174736305	0,92	$0,308138660 \cdot 10^{-3}$
0,68	0,158905389	0,93	$0,139055523 \cdot 10^{-3}$
0,69	0,143991189	0,94	$0,532555251 \cdot 10^{-4}$
0,70	0,129427260	0,95	$0,161841328 \cdot 10^{-4}$
0,71	0,115840866	0,96	$0,347816874 \cdot 10^{-5}$
0,72	0,103044024	0,97	$0,420576116 \cdot 10^{-6}$
0,73	$0,910444278 \cdot 10^{-1}$	0,98	$0,167693347 \cdot 10^{-7}$
0,74	$0,798444445 \cdot 10^{-1}$	0,99	$0,354008603 \cdot 10^{-10}$

Значения функции  $\text{up}(x)$  на интервале  $[0; 0,5]$  могут быть получены из табл. 23 с помощью формулы  $\text{up}(x) \equiv 1 - \text{up}(1 - x)$ .

*Упражнения и задачи.* 1. Пусть  $\text{supp } \varphi(x) = [-1, 1]$  и существуют постоянные  $C_{kl}$  такие, при которых

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{kl} \varphi(x - kh) \equiv x^l \quad (l = 0, 1, \dots, m). \quad (3.564)$$

Показать, что последние тождества — необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование Фурье

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(x) dx$$

обладало свойствами

$$F(0) \neq 0, \quad F^{(l)}\left(\frac{2\pi k}{h}\right) = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, m; k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

2. Пусть  $\text{supp } \varphi(x) = [-1, 1]$  и для всех  $f(x) \in C^m[-1, 1]$

$$\inf_{C_h} \left\| f(x) - \sum_k C_k \varphi\left(\frac{x - kh}{h_1}\right) \right\| \leq A_m h_1^m \omega(f^{(m)}, h)$$

( $h = \frac{1}{\pi}$  — фиксированное,  $\forall h_1 > 0$ ). Показать, что тогда и только тогда существуют  $C_{kl}$  такие, что справедливо (3.564).

*Замечание.* Утверждение задач 1, 2 — один из вариантов теорем Фикса — Стренга — Михлина [173].

3. Пусть  $\alpha \neq k2^{-n}$  ( $k, n$  — целые). Тогда функция

$$\varphi(x) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\text{up}(x - 2k) + \text{up}(x - 2k + \alpha)]$$

такова, что: а)  $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ ; б)  $\varphi(x)$  — периодическая функция с периодом два; в) в каждой точке  $x_0$  ряд Тейлора  $\varphi(x)$  имеет нулевой радиус сходимости.

4. Существуют ли финитные решения уравнения

$$y'(x) = \lambda \left[ y \left( \frac{2}{1+\alpha} x + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) - \frac{1+\alpha}{1-\alpha} y \left( \frac{2}{1-\alpha} x - \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) \right]$$

при  $0 < \alpha < 1$  и некоторых  $\lambda$ ?

5. Пусть случайная величина  $\xi$  имеет плотность  $P_\xi(x) = \text{up}(x)$ . Найти дисперсию  $D_\xi$ .

6. Пусть

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$\sigma_n(x) = 2 \int_{-\infty}^x [\sigma_{n-1}(2t+1) - \sigma_{n-1}(2t-1)] dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Найти  $\| \text{up}(x) - \sigma_n(x) \|_{C(\mathbb{R})}$ .

7. Пусть  $S(x)$  — обыкновенный полиномиальный сплайн. Доказать, что свертка

$$S(x) * \text{up}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-t) \text{up}(x) dx$$

есть локально-конечная линейная комбинация сдвигов функции  $\text{up}(x)$ .

8. Пусть  $\alpha = k2^{-n}$  ( $k, n$  — целые и  $0 < \alpha < 1$ ). Показать, что в этом случае существует функция  $\varphi_\alpha(x)$  такая, что  $\text{supp } \varphi_\alpha(x) = [-\alpha, \alpha]$  и

$$\text{up}(x) = \sum_{k=1}^{M_\alpha} c_k \varphi_\alpha(x - b_k)$$

( $M_\alpha, b_k, c_k$  — некоторые постоянные).

9. Найти квадратурные формулы Гаусса с весом  $\text{up}(x)$  для  $n = 3, 4, 5$ .

10. Доказать, что для  $n = 1, 2, \dots$

$$\text{up}(-1 + 2^{-n}) = \frac{1}{(n-1)! 2^{C_n^2}} \int_0^1 \text{up}(x) x^{n-1} dx.$$

11. Построить кубический сплайн, интерполирующий  $\text{up}(x)$  в точках  $-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0$ , и такой, что  $S''(-1) = S''(0) = 0$ , и оценить погрешность интерполяции.

12. Пусть уравнение

$$Ly(x) = \lambda [y(2x+1) - y(2x-1)],$$

где  $L$  — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, при некотором  $\lambda$  имеет финитное решение. Какой вид должен иметь оператор  $L$ ?

### § 17. Учет особенностей и априорной информации при построении структур решений краевых задач

Во многих случаях важную информацию о решении краевой задачи можно получить еще до организации его поиска. Это, например, может быть информация о симметрии решения, если постановка краевой задачи инвариантна относительно некоторых типов преобразований симметрии, о зонах больших и малых градиентов и значений кривизны, о характере поведения решения в окрестности угловых и других «особых» точек, точек разрыва граничных условий, коэффициентов основного уравнения, расположения сосредоточенных возбудителей поля и т. д. Такие сведения о решении могут быть получены из качественных теорий, на основе экспериментальных данных или инженерной интуиции. Естественно, что правильный учет подобной информации может существенно сократить за-

траты на получение приближенного решения и улучшить его качество. Кроме того, решение краевой задачи может быть таково, что есть возможность осуществить его некоторый этап с помощью того или иного классического метода (интегральных преобразований, разложения по малому параметру, разделения переменных, функций Грина и др.) и тем самым упростить поиск приближенного решения.

Стремление учесть априорную информацию характерно для исследований по самым различным приближенным методам. Так, например, в сеточных методах и методе конечных элементов густота сетки выбирается в зависимости от предполагаемого характера поведения решения или особенностей основного уравнения и краевых условий; при использовании итерационных методов начальное приближение выбирается из соображений наибольшего правдоподобия; в ряде случаев из решения выделяется функция особенностей и задача сводится к поиску его регулярной части и т. д.

Метод  $R$ -функций, являясь аналитическим, содержит в себе хорошие конструктивные возможности для того, чтобы уже на уровне структурных формул полнее учесть информацию об искомом решении.

В работах [111, 185] отмечалось, что в точках, которые являются для границы  $\partial\Omega$  рассматриваемой области  $\Omega$  особыми (угловые точки, ребра, точки стыка разнородных граничных условий и т. п.), необходимо специально выбирать функцию  $\omega(x)$ , где  $\omega(x) = 0$  — уравнение границы  $\partial\Omega$ , а в смешанных краевых задачах — еще и уравнения  $\omega_i(x) = 0$  участков  $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$ . В действительности, как это отмечается, например, в работе [185], этот вопрос еще более сложный: необходимо учитывать поведение в окрестности особых точек не только функций  $\omega$  и  $\omega_i$ , но и характер структурных формул, в которые эти функции входят. Это означает, что построенные в § 10—13 структуры решений могут оказаться непригодными или мало пригодными для краевых задач с особыми точками. (По крайней мере при их использовании картина поля вблизи особых точек может оказаться учтенной лишь в каком-то усредненном виде.) Возможны даже случаи, о которых будет сказано ниже, когда структурные формулы, обладающие полнотой и хорошо зарекомендовавшие себя на практике, теряют свойство полноты и приводят к большим погрешностям, если граница области имеет узкие врезьы, щели, входящие углы и т. п.

При корректировке структур решений для задач с особенностями необходимо различать два случая: а) если априори имеется некоторая информация о точном решении, полученная из качественной теории [55], на основе анализа модельных задач или из других источников, то необходимы конструктивные средства для ее учета; б) если характер особенностей точного решения не известен или же известно, что последнее обладает достаточной гладкостью, то надо строить такие структуры решений, которые не содержали бы заведомо ненужных особенностей.

Опишем некоторые случаи, в которых требуется корректировка или даже построение новых типов структур решений краевых задач.

1. В работах [110, 115] рассматривалась краевая задача:

$$-\Delta u = 2; \quad x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.565)$$

к которой сводится, например, задача о чистом кручении стержней [6, 15, 60]. В качестве структуры решения использована формула

$$u = \omega\Phi, \quad (3.566)$$

где, как обычно,  $\Phi$  — неопределенная компонента, которая аппроксимируется некоторым полиномом,  $\omega > 0$  внутри  $\Omega$  и  $\omega = 0$  на  $\partial\Omega$ .

Пусть  $u_0$  — точное решение задачи. Зная  $u_0$ , можно определить и все остальные величины, характеризующие чистое кручение стержня: жесткость на кручение  $k$ , касательные напряжения  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , действующие в поперечном сечении стержня, потенциальную энергию деформации и т. д. В частности, для касательных напряжений и жесткости справедливы формулы

$$\tau_1 = G\theta \frac{\partial u}{\partial x_1}; \quad \tau_2 = G\theta \frac{\partial u}{\partial x_2}; \quad (3.567)$$

$$k = 2 \int_{\Omega} u(x_1, x_2) d\Omega, \quad (3.568)$$

где  $G$  — модуль сдвига материала, из которого изготовлен стержень, а  $\theta$  — угол закручивания стержня.

Из принципа максимума [44], который может быть применен к уравнению (3.565), следует, что искомая функция  $u$  не может иметь внутри области  $\Omega$  локальных минимумов. А так как на границе  $\partial\Omega$  функция  $u_0$  равна нулю, внутри области  $\Omega$  выполняется неравенство  $u_0 > 0$ .

Представление о форме поверхности  $x_3 = u_0(x_1, x_2)$  дает ее аналогия с формой натянутой на контур  $\partial\Omega$  гибкой мембраны, подверженной равномерному давлению (аналогия Прандтля [59]). Предположим, что в результате исследования формы поверхности мембраны или некоторым другим путем нам удалось построить функцию  $\omega$ , которая близка к точному решению  $u_0$  в метрике  $C(\Omega)$ , т. е.

$$\|\omega - u_0\| = \max_{x \in \Omega} |\omega - u_0| < \varepsilon, \quad (3.569)$$

где  $\varepsilon > 0$  — некоторое малое число. Тогда внутри области  $\Omega$  функция  $\Phi$ , соответствующая точному решению, будет мало отличаться от единицы, однако при приближении к границе  $\partial\Omega$  ее поведение может быть, вообще, каким угодно. Например, если при приближении к некоторой точке  $x^0 \in \partial\Omega$  точное решение стремится к нулю быстрее по порядку, чем функция  $\omega$ , то функция  $\Phi$  при приближении к этой же точке будет стремиться к нулю, а если  $u_0$  стремится к нулю медленнее, то  $\Phi \rightarrow \infty$ . Если принять функцию  $\omega$  близкой



к точному решению в смысле выполнения неравенства (3.569), то при достаточно малом  $\epsilon$ , считая, что  $u \approx \omega$ , можно получить достаточно точное значение такой интегральной характеристики, как, например, жесткость на кручение (3.568),  $\omega$  однако для касательных напряжений (3.567), являющихся дифференциальными характеристиками, погрешность может оказаться сколь угодно большой. Таким образом, если при построении функции  $\omega$  заботиться лишь о выполнении условий (3.569), то функцию  $\Phi$  придется находить в множестве функций, неограниченных вблизи границы  $\partial\Omega$ .

Чтобы избежать трудности, которые могут возникнуть в связи с этим при аппроксимации функции  $\Phi$ , предпринята попытка учесть при построении функции  $\omega$  некоторую априорную информацию, которую можно почерпнуть из анализа точного решения вспомогательной задачи для уравнения (3.565) в области, имеющей форму сектора круга [116].

Предположим, что область  $\Omega$  ограничена кусочно-гладким контуром  $\partial\Omega$  и с каждой точкой контура можно связать такой сектор  $\Sigma$  круга, который целиком лежит внутри  $\Omega$ , а его стороны в рассматриваемой точке касаются контура  $\partial\Omega$  (рис. 124). Для точек, лежащих на гладких участках границы  $\partial\Omega$ , соответствующий сектор является полукругом.

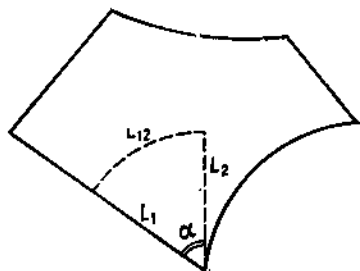


Рис. 124.

Пусть  $x^0 \in \partial\Omega$ , а  $\alpha$  — центральный угол соответствующего ей сектора круга. Радиус  $a$  сектора выберем достаточно малым для того, чтобы можно было принять, что стороны сектора лежат на  $\partial\Omega$ . Пусть  $L_1$  и  $L_2$  есть стороны сектора, а  $L_{12}$  — замыкающая дуга окружности. Так как искомая функция  $u_0$  на контуре  $\partial\Omega$  должна быть равна нулю, а внутри области  $\Omega$  она положительна, то для сектора  $\Sigma$  можно сформулировать следующую краевую задачу: найти в  $\Sigma$  решение уравнения (3.565), если на сторонах  $L_1$  и  $L_2$   $u = 0$ , а на дуге  $L_{12}$   $u \geq 0$ , причем нуль достигается лишь на концах  $L_{12}$ .

Для удобства поместим начало координат в вершине сектора, направив ось абсцисс вдоль биссектрисы его внутреннего угла, и перейдем к полярным координатам.

В работе [116] показано, что функция  $u(r, \psi)$  при  $\alpha \neq \pi/2$  может быть представлена в виде

$$u = -\frac{1}{2} \left\{ r^2 \left( 1 - \frac{\cos 2\psi}{\cos \alpha} \right) + \left( \frac{r}{a} \right)^\alpha \left[ \frac{16\alpha^2 a^2}{\pi(\pi^2 - 4\alpha^2)} \cos \frac{\pi\psi}{\alpha} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4}{\alpha} \cos \frac{\pi\psi}{\alpha} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varphi(\psi) \cos \frac{\pi\psi}{\alpha} d\psi \right] + \left( \frac{r}{a} \right)^\alpha \left[ \frac{16\alpha^2 a^2 \sin \frac{3\pi}{2}}{3\pi(9\pi^2 - 4\alpha^2)} \cos \frac{3\pi\psi}{\alpha} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4}{\alpha} \cos \frac{3\pi\psi}{\alpha} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varphi(\psi) \cos \frac{3\pi\psi}{\alpha} d\psi \Big] + \sum_{n=5,7, \dots}^{\infty} \left[ \frac{16\alpha^2 a^2 \sin \frac{\pi n}{2}}{\pi n (\pi^2 - 4\alpha^2)} - \right. \\
 & \left. -\frac{4}{\alpha} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varphi(\psi) \cos \frac{n\pi\psi}{\alpha} d\psi \right] \left( \frac{r}{a} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \cos \frac{n\pi\psi}{\alpha} \Big\}, \quad (3.570)
 \end{aligned}$$

а при  $\alpha = \pi/2$  — в виде

$$\begin{aligned}
 u = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{4 \cos 2\psi}{\pi} r^2 \ln r + r^2 \left[ -\frac{4 \cos 2\psi}{\pi} \ln a - \frac{4\psi \sin 2\psi}{\pi} + 1 - \right. \right. \\
 & \left. \left. -\frac{3}{\pi} \cos 2\psi - \frac{8r^2}{\pi a^2} \cos 2\psi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \varphi(\psi) \cos 2\psi d\psi \right] + \right. \\
 & \left. + r^6 \left[ \frac{\cos 6\psi \sin \frac{3\pi}{2}}{6a^2\pi} - \frac{8}{\pi a^6} \cos 6\psi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \varphi(\psi) \cos 6\psi d\psi \right] + \right. \\
 & \left. + \sum_{n=5,7, \dots}^{\infty} \left[ \frac{4a^2 \sin \frac{n\pi}{2}}{\pi n (\pi^2 - 1)} - \frac{8}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \varphi(\psi) \cos 2n\psi d\psi \right] \left( \frac{r}{a} \right)^{2n} \cos 2n\psi \right\}. \quad (3.571)
 \end{aligned}$$

Из формул (3.570) и (3.571) следует

$$u = Br^2 + o(r^2) \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$u = B_1 r^2 \ln r + o(r^2 \ln r) \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{2}; \quad (3.572)$$

$$u = Cr \frac{\pi}{\alpha} + o(r \frac{\pi}{\alpha}) \text{ при } \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi;$$

$$u = Cr + o(r) \text{ при } \alpha = \pi,$$

где

$$\begin{aligned}
 B = & -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\cos 2\psi}{\cos \alpha} \right); \quad C = -\frac{1}{\frac{\pi}{2a^\alpha}} \left[ \frac{16\alpha^2 a^2}{\pi (\pi^2 - 4\alpha^2)} \cos \frac{\pi\psi}{\alpha} - \right. \\
 & \left. -\frac{4}{\alpha} \cos \frac{\pi\psi}{\alpha} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varphi(\psi) \cos \frac{\pi\psi}{\alpha} d\psi \right]; \quad B_1 = -\frac{2}{\pi} \cos 2\psi. \quad (3.573)
 \end{aligned}$$

Из формул (3.572) видно, что при приближении к точке  $x^0 \in \partial\Omega$  точное решение  $u_0$  стремится к нулю со скоростью, зависящей от угла  $\alpha$  между касательными к контуру, проведенными в точке  $x^0$ . Если точка  $x^0$  лежит на гладком участке контура  $\partial\Omega$ , то  $u_0 = C(\psi)r + o(r)$  и, следовательно, функция  $u_0$  ведет себя так же, как функция  $\omega$ . (Можно построить уравнение  $\omega = 0$  нормализованным до первого порядка и тогда  $\left. \frac{\partial\omega}{\partial\nu} \right| = 1$ , т. е.  $\omega = r + o(r)$ .)

Используя формулы (3.572), можно обеспечить для функции  $\omega$  такой же порядок стремления к нулю при приближении к  $\partial\Omega$ , какой имеет точное решение  $u_0$ .

Предположим, что функция  $\omega$  строится с помощью  $R$ -функций (2.36) (или других, сохраняющих нормализованность), а опорные области  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), участвующие в формировании области  $\Omega$ , определяются неравенствами  $\omega_i(x_1, x_2) \geq 0$ . Предположим также, что функции  $\omega_i$  нормированы так, что на границах  $\partial\Omega_i$  соответствующих областей выполняются условия

$$|\text{grad } \omega_i|_{\partial\Omega_i} \neq 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.574)$$

Нетрудно заметить, что если  $x_1$  и  $x_2$  есть бесконечно малые первого порядка, то бесконечно малые того же порядка и  $R$ -функции (2.36). Отсюда нетрудно сделать вывод, что при выполнении условий (3.574) функция  $\omega(x)$ , построенная по указанному выше правилу, имеет тот же порядок малости при приближении к граничной точке  $x^0$  по фиксированному направлению  $xx^0$ , что и  $\|x - x^0\|$ , т. е.

$$\omega = B_0(\psi)r + o(r), \quad (3.575)$$

где  $B_0(\psi)$  — некоторая функция, вообще, своя для каждой точки границы. Следовательно, в окрестности точек, в которых граница  $\partial\Omega$  — гладкая, функция  $\omega$  (3.575) уже имеет требуемый порядок стремления к нулю.

Пусть

$$r_i(x, x^i) = \|x - x^i\|^{\frac{1}{2}\delta_i} m_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (3.576)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha_i \leq \frac{\pi}{2}; \\ \frac{\pi}{\alpha_i} - 1 & \text{при } \alpha_i > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad (3.577)$$

$$m_i = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha_i \neq \frac{\pi}{2}; \\ \left| \ln \frac{\|x - x^i\|}{N} \right| & \text{при } \alpha_i = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (3.578)$$

где  $\alpha_i$  — величины углов секторов, соответствующих угловым точкам  $x^i = (x_1^i, x_2^i)$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $N$  — некоторая константа, такая что  $N > d$ , где  $d$  — диаметр области  $\Omega$ . Тогда функция  $\omega_1(x_1, x_2)$ ,

удовлетворяющая условию  $\omega > 0$  внутри  $\Omega$  и имеющая необходимый порядок при стремлении к границе  $\partial\Omega$ , может быть выбрана в виде

$$\omega_1(x_1, x_2) = \omega(x_1, x_2) \prod_{i=1}^{l=m} r_i(x_1, x_2). \quad (3.579)$$

Пример. Рассмотрим задачу о кручении стержня с профилем  $\Omega$  (рис. 125). В качестве опорных областей возьмем полуплоскости  $\Omega_1 - \Omega_6$ , определяемые нормализованными неравенствами

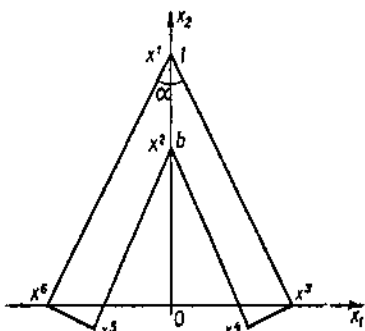


Рис. 125.

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left( \sigma_1 \equiv x_2 - x_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - b \geq 0 \right); \\ \Sigma_2 &= \left( \sigma_2 \equiv x_2 + x_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - b \geq 0 \right); \\ \Sigma_3 &= \left( \sigma_3 \equiv -x_2 + x_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1 \geq 0 \right); \\ \Sigma_4 &= \left( \sigma_4 \equiv -x_2 - x_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1 \geq 0 \right); \\ \Sigma_5 &= \left( \sigma_5 \equiv x_2 - x_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \geq 0 \right); \end{aligned} \quad (3.580)$$

$$\Sigma_6 = \left( \sigma_6 \equiv x_2 + x_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \geq 0 \right).$$

Область  $\Omega$  может быть задана логической формулой

$$\Omega = (\Sigma_1 \vee \Sigma_2) \wedge (\Sigma_3 \wedge \Sigma_4) \wedge (\Sigma_5 \wedge \Sigma_6). \quad (3.581)$$

Следовательно, функция  $\omega$ , нормализованная на  $\partial\Omega$  до первого порядка, может быть выбрана в виде

$$\omega(x_1, x_2) = [(\sigma_1 \vee \sigma_2) \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4) \wedge (\sigma_5 \wedge \sigma_6)]. \quad (3.582)$$

На основании формул (3.572) для углов с вершинами  $x^1$  и  $x^2$  при  $\alpha < \pi/2$  соответствующие функции  $r_1(x_1, x_2)$  и  $r_2(x_1, x_2)$  имеют вид

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + (x_2 - 1)^2}; \quad (3.583)$$

$$r_2 = \left[ \sqrt{x_1^2 + (x_2 - b)^2} \right]^{n/\alpha - 1}$$

для вершин  $x^3$ ,  $x^4$ ,  $x^5$  и  $x^6$  прямых углов

$$r_i(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - x_1^i)^2 + (x_2 - x_2^i)^2} \left| \ln \frac{\sqrt{(x_1 - x_1^i)^2 + (x_2 - x_2^i)^2}}{N} \right|, \quad (3.584)$$

где  $N > 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ . Следуя формуле (3.579), получаем

$$\omega_1(x_1, x_2) = \omega(x_1, x_2) \prod_{i=1}^6 r_i(x_1, x_2). \quad (3.585)$$

Описанная процедура учета особенностей позволила несколько улучшить картину решения, однако неустойчивость вычислительного процесса во многих случаях наблюдалась раньше, чем при использовании формул вида  $\omega\Phi$  без привнесения соответствующих

особенностей. Эти отрицательные результаты машинных экспериментов (как, к сожалению, и многие другие) объяснялись накоплением различного рода погрешностей. Между тем, как будет показано ниже, причина этих неудач заключается, по-видимому, в другом. Однако, прежде чем приступить к анализу приведенной выше структуры решения (3.579), остановимся на некоторых подходах к учету особенностей.

2. Более сложная ситуация, чем в задаче кручения, возникает в контактной задаче теории упругости о распределении давления под штампом при отсутствии сил трения [22, 63, 189]. Эта задача сводится к нахождению гармонической в полупространстве  $x_3 \geq 0$  функции  $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$  при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, 0) &= \omega_0(x_1, x_2); \quad \forall (x_1, x_2) \in \partial\Omega_1; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} &= 0; \quad \forall (x_1, x_2) \in \partial\Omega_1; \\ \varphi(x) &= O(\|x\|^{-1}); \quad \|x\| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.586)$$

где  $\partial\Omega_1$  — область контакта штампа с упругим полупространством,  $x_3 = \omega(x_1, x_2)$  — уравнение поверхности основания штампа после вдавливания.

Если функция  $\varphi$  найдена, то давление под штампом может быть получено по формуле

$$p(x_1, x_2) = -A \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} \left( A = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \right), \quad (3.587)$$

где  $E$  и  $\nu$  — упругие постоянные.

Предсказать характер распределения давления вблизи границы площадки контакта, имеющей произвольную многоугольную форму, позволила следующая формула [107] для давления под штампом, имеющим в плане форму бесконечного клина:

$$p(\rho, \theta) = \frac{A \rho^{\gamma-1} f(\theta)}{(1 + \cos \theta) \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}}, \quad (3.588)$$

где  $2\alpha$  — угол при вершине клина,  $\gamma$  — известная величина ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ), зависящая от угла  $\alpha$ .

Структура решения смешанной краевой задачи для имеющей произвольную многоугольную форму площадки контакта, обеспечивающая необходимый по порядку характер стремления  $p(x_1, x_2)$  к бесконечности при приближении к границе  $\partial\Omega_1$ , выбиралась в виде [128]

$$\varphi = \omega \left[ \frac{\tilde{\varphi}(x_1, x_2)}{K(x_1, x_2, x_3) + \tilde{\varphi}(x_1, x_2)} + \frac{K(x_1, x_2, x_3) \Phi(x_1, x_2, x_3^2)}{K(x_1, x_2, x_3) + \Phi_1(x_1, x_2, x_3)} \right], \quad (3.589)$$

где  $\Phi_1$ ,  $\tilde{\varphi}$  и  $\Phi$  — некоторые положительные достаточно гладкие функции, такие что  $\frac{\partial}{\partial x_3} \Phi_1(x_1, x_2, 0) = 0$ ;  $\Phi$  — ограничена на

бесконечности;

$$K(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{2[x_3 - 2(\omega_1 \wedge_0 x_3)]} \psi(x_1, x_2, x_3); \quad \psi = \\ = \psi_0 \prod_{i=1}^n r_i^{\gamma_i - \frac{1}{2}}; \quad r_i^2 = \|x - x^i\|^2;$$

$\psi_0$  — гладкая положительная функция, такая что  $\frac{\partial}{\partial x_3} \psi_0(x_1, x_2, 0) = 0$  вне области  $\partial\Omega_1$ , а  $\omega_1(x)$  получена по тем же правилам, что и  $\omega(x)$ , но заменой достаточно полной системы  $R$ -функций  $\{x_1 \wedge_0 x_2, x_1 \vee_0 x_2, \bar{x}\}$  условными  $R$ -функциями

$$x_1 \wedge_{0, x_1} x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}; \\ x_1 \vee_{0, x_1} x_2 \equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}; \quad (3.590) \\ \bar{x} \equiv -x.$$

Функции  $\psi_0, \varphi_1, \bar{\varphi}$  выбираются так, чтобы приближенное решение убывало как  $\|x\|^{-1}$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

Использование условных  $R$ -операций предотвратило возможность продолжения особенностей в угловых точках границы  $\partial\Omega_1$ , внутрь полупространства  $x_3 \geq 0$ . Именно в этом состоит специфика учета особенностей в данном случае.

3. В работе В. А. Кондратьева [55] показано, что для краевой задачи Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \dots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.591)$$

в которой основное уравнение имеет эллиптический тип и порядок  $2k$ , точное решение в угловых точках  $x^j$  имеет вид

$$\|x - x^j\|^{\alpha_j} \ln^{\beta_j} \|x - x^j\| \cos(\gamma_j \ln \|x - x^j\| + \delta_j) f(\psi), \quad (3.592)$$

где  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$  — постоянные, зависящие от угла  $\alpha$  при вершине  $x^j$ , а  $f(\psi)$  — некоторая функция полярного угла  $\psi$ . (Решение может представлять вблизи  $x^j$  сумму нескольких слагаемых вида (3.592) и слагаемых более высокого порядка малости, чем  $\|x - x^j\|^{\alpha_j}$ , где  $\alpha_j^*$  — наибольший из показателей степени  $\|x - x^j\|$  в первой сумме.)

Методика определения зависимости  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  и  $\delta_j$  от угла  $\alpha$  показана в п. 1 на примере задачи чистого кручения (там  $\gamma_j$  и  $\delta_j$  оказались тождественно равными нулю). Общий подход к установлению этой зависимости описан в упомянутой работе В. А. Кондратьева [55].

Нетрудно заметить, что описанный в п. 1 подход к построению функции  $\omega_1$  с требуемой скоростью стремления к нулю при приближении к  $\partial\Omega$  может быть применен и в данном случае. А именно мож-

но принять, что

$$u = \omega_1^k \Phi; \quad (3.593)$$

$$\omega_1 = \omega^k \prod_{j=1}^m \left( \frac{r_j}{N} \right)^{\alpha_j r^{-k}} \ln^{\beta_j} \left( \frac{r_j}{N} \right) \cos(\gamma_j \ln r_j + \delta_j).$$

Если особенность содержит несколько слагаемых вида (3.592), то можно принять

$$u = \sum_{i=1}^l \omega_i^k \Phi_i \quad (3.594)$$

с соответствующими изменениями величин  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  для каждой из  $\omega_i$ .

4. Описанные выше подходы к построению структур решений могут, вообще, оказаться недостаточно эффективными. Для простоты рассуждений ограничимся анализом структуры  $u = \omega_1 \Phi$ , где функция  $\omega_1$  определяется формулой (3.579). Для удобства будем считать, что область  $\Omega$  имеет одну угловую точку  $x^1$  (рис. 126). Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — два произвольных направления, проведенных из точки  $x^1$  внутрь области  $\Omega$ . По построению функция  $\omega_1(x)$  ведет себя вблизи точки  $x^1$  как  $f(\psi) \|x - x^1\|^{\alpha_1} + o(\|x - x^1\|^{\alpha_1})$ . Таким образом, если перейдем к полярным координатам с вершиной в точке  $x^1$ , получим следующее выражение для структуры решения:

$$u(r, \psi) = r^{\alpha_1} f(\psi) \Phi_1(r, \psi) + o(r^{\alpha_1}). \quad (3.595)$$

Пусть направлениям  $l_1$  и  $l_2$  соответствуют значения полярных углов  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Тогда

$$\frac{\partial u(r, \psi_i)}{\partial r} = \alpha_1 r^{\alpha_1 - 1} f(\psi_i) \Phi_1(r, \psi_i) + O(r^{\alpha_1}) \quad (i = 1, 2). \quad (3.596)$$

Отсюда

$$\frac{\frac{\partial u(r, \psi_1)}{\partial r}}{\frac{\partial u(r, \psi_2)}{\partial r}} = \frac{\alpha_1 r^{\alpha_1 - 1} f(\psi_1) \Phi_1(r, \psi_1) + O(r^{\alpha_1})}{\alpha_1 r^{\alpha_1 - 1} f(\psi_2) \Phi_1(r, \psi_2) + O(r^{\alpha_1})}. \quad (3.597)$$

При  $r \rightarrow 0$  получаем

$$\frac{\frac{\partial u(0, \psi_1)}{\partial r}}{\frac{\partial u(0, \psi_2)}{\partial r}} = \frac{f(\psi_1) \Phi_1(0, \psi_1)}{f(\psi_2) \Phi_1(0, \psi_2)} = \frac{f(\psi_1) \Phi_1(x^1)}{f(\psi_2) \Phi_1(x^1)} = \frac{f(\psi_1)}{f(\psi_2)}. \quad (3.598)$$

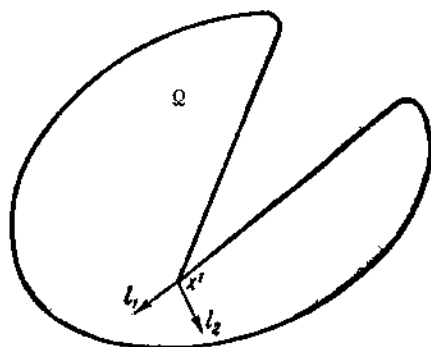


Рис. 126.

Таким образом, между производными от приближенного решения по двум произвольно взятым направлениям  $l_1$  и  $l_2$  получается зависимость (3.598), которую нельзя подкорректировать выбором неопределенной компоненты  $\Phi$ . Для точного решения отношение  $f(\psi_1)/f(\psi_2)$  в формуле (3.598) будет, вообще, другим, заранее не известным.

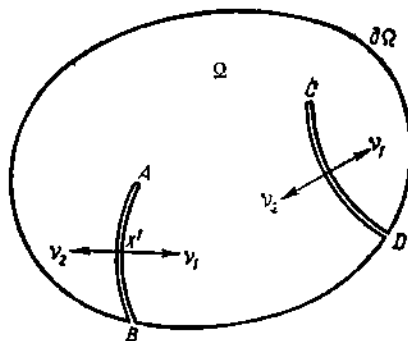


Рис. 127.

Из сказанного выше вытекает необходимость построения таких структур решений, в которых неопределенная компонента могла бы вносить вклад не только внутри области  $\Omega$ , но и влиять на характер приближения вблизи границы области.

5. Ситуация, аналогичная описанной в п. 4, возникает и в задачах с узкими врезами (рис. 127).

Пусть функция  $\omega$  такова, что она равна нулю не только на границе  $\partial\Omega$ , но и на линиях  $AB$  и  $CD$  (рис. 127). Рассмотрим структуру однородной задачи Дирихле  $u = \omega\Phi$ . Для определенности будем считать (хотя это и не имеет принципиального значения), что функция  $\omega$  нормализована везде на рассматриваемом чертеже  $\partial\Omega \cup AB \cup CD$ . Пусть  $x^1$  — точка на одной из щелей (рис. 127). Тогда

$$\frac{\partial}{\partial v_i} (\omega\Phi) = \frac{\partial\omega}{\partial v_i} \Phi + \omega \frac{\partial\Phi}{\partial v_i} \quad (i = 1, 2). \quad (3.599)$$

При  $\omega \rightarrow 0$   $\frac{\partial\omega}{\partial v_i} \rightarrow 1$  ( $i = 1, 2$ ). Поэтому из (3.599) получаем

$$\frac{\partial(\omega\Phi)}{\partial v_i} \Big|_{x=x^1} = \Phi(x^1) \quad (i = 1, 2), \quad (3.600)$$

т. е.

$$\frac{\partial(\omega\Phi)}{\partial v_1} \Big|_{x=x^1} = \frac{\partial(\omega\Phi)}{\partial v_2} \Big|_{x=x^1}. \quad (3.601)$$

Но условие (3.601) для точного решения может и не выполняться. Это означает, что, используя структуру  $u = \omega\Phi$ , в ситуациях описанного вида к точному решению можно и не приблизиться. (По крайней мере в достаточно хорошей метрике.) Опишем некоторые подходы, которые могут быть использованы для устранения указанных недостатков. Начнем с последней задачи, рассмотренной в настоящем пункте.

Пусть  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — функции, обладающие свойствами

$$\omega_i = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \cup AB \cup CD \quad (i = 1, 2); \quad (3.602)$$

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial v} \Big|_{\partial\Omega} = 1 \quad (i = 1, 2);$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial v_1} \Big|_{AB \cup CD} = 1, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial v_2} \Big|_{AB \cup CD} = 0, \quad \frac{\partial\omega_2}{\partial v_1} \Big|_{AB \cup CD} = 0, \quad \frac{\partial\omega_2}{\partial v_2} \Big|_{AB \cup CD} = 1.$$



Тогда можно использовать структуру решения

$$u = \omega_1 \Phi_1 + \omega_2 \Phi_2. \quad (3.603)$$

Действительно, в этом случае на  $AB \cup CD$  будут выполняться условия

$$\left. \frac{\partial u}{\partial v_1} \right|_{AB \cup CD} = \Phi_1(x^1), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial v_2} \right|_{AB \cup CD} = \Phi_2(x^1). \quad (3.604)$$

Таким образом, значения производных  $\frac{\partial u}{\partial v_1}$  и  $\frac{\partial u}{\partial v_2}$  будут выбираться независимо одно от другого. (Впрочем, особенности в окрестности концов  $A$  и  $C$  все еще надо каким-то образом учесть.)

Конструктивная реализация функций  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , удовлетворяющих условиям (3.602), может быть различной. Например, для выделения элемента  $L_1$  из чертежа  $L = (l = 0)$  с помощью области  $\Sigma = (\sigma \geq 0)$  (рис. 128) можно использовать формулу

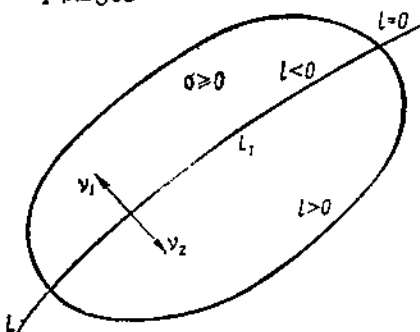


Рис. 128.

$$l_1 \equiv \sqrt{\left[ \frac{V l^2 + (V l^2 + \sigma^2 - \sigma)^2 - l}{2} \right]^2} V_0(-\sigma) = 0. \quad (3.605)$$

Эта формула отличается от формулы (2.170) тем, что в ней вместо функции  $f$ , такой, что  $L = (f = 0)$ , стоит выражение

$$\begin{aligned} q &\equiv \frac{1}{2} \{ \sqrt{V l^2 + (V l^2 + \sigma^2 - \sigma)^2} - l \} \equiv \\ &\equiv \frac{(V l^2 + \sigma^2 - \sigma)^2}{2 [V l^2 + (V l^2 + \sigma^2 - \sigma)^2 + l]} \equiv \\ &\equiv \frac{l^4}{2 [V l^3 (V l^2 + \sigma^2 + \sigma)^2 + l^4 + l (V l^2 + \sigma^2 + \sigma) (V l^2 + \sigma^2 + \sigma)]}. \end{aligned} \quad (3.606)$$

При  $\sigma > 0$  (т. е. внутри области  $\Sigma$ ) и при  $l \rightarrow 0 + 0$

$$q \equiv \frac{l^3}{2 [V (V l^2 + \sigma^2 + \sigma)^2 + l^2 + (V l^2 + \sigma^2 + \sigma) (V l^2 + \sigma^2 + \sigma)]} \rightarrow 0, \quad (3.607)$$

а при  $\sigma > 0$  и при  $l \rightarrow 0 - 0$

$$\begin{aligned} q &\equiv - \frac{l^3}{2 [V (V l^2 + \sigma^2 + \sigma)^2 + l^2 - (V l^2 + \sigma^2 + \sigma) (V l^2 + \sigma^2 + \sigma)]} \equiv \\ &\equiv - \frac{l^3 \sqrt{V (V l^2 + \sigma^2 + \sigma)^2 + l^2 + (V l^2 + \sigma^2 + \sigma)}}{2 l^2 (V l^2 + \sigma^2 + \sigma)} \sim l, \end{aligned} \quad (3.608)$$

т. е. по направлению  $v_2$  (см. рис. 128) функция  $q$  эквивалентна функции  $l$ . Если уравнение  $l = 0$  нормализовано, то

$$\frac{\partial q}{\partial v_2} = \frac{\partial l}{\partial v_2} = 1.$$

А тогда вследствие описанного в § 12 гл. 2 свойства формулы (2.170) будет также  $\frac{\partial l_1}{\partial v_2} = 1$ . По направлению  $v_1$  согласно формуле (2.170) будет выполняться равенство  $\frac{\partial l_1}{\partial v_1} = 0$ .

5. Другой вариант структуры решения, который можно предложить для устранения описанных в п. 4 дефектов структур задачи Дирихле (с учетом или без учета особенностей), состоит в следующем. Пусть  $\Phi$  — произвольная неопределенная компонента (возможно, содержащая в виде множителя «функцию особенностей»), а  $\Phi^*$  — ее нормализанта по функции  $\omega$ , нормализованная в обобщенном смысле (т. е. и в угловых точках), но так, что вблизи всякой граничной точки  $x^1 \in \partial\Omega'$  справедливо условие  $\omega \sim \|x - x^1\| + O\left(\|x - x^1\|^{\frac{2}{\gamma(x^1)}}\right)$ , где  $\gamma(x^1)$  — показатель степени, соответствующий точке  $x^1$  (см. п. 1), если он меньше единицы. Тогда нормализанта  $\Phi^*$  на  $\partial\Omega'$  будет совпадать с  $\Phi$ , а ее производная по всякой нормали к  $\partial\Omega'$  будет равна нулю. Тогда можно использовать структуру решения

$$u = \Phi_1(x) - \Phi_1^*(x) + \omega\Phi_2. \quad (3.609)$$

(Последнее слагаемое, вообще, необходимо, так как возможно, что в некоторых точках внутри  $\Omega$   $\Phi_1 = \Phi_1^*$ .)

Если задача Дирихле неоднородная, а  $u_0$  есть результат продолжения граничных условий внутрь области  $\Omega$  (см. § 1), то вместо (3.609) можно взять формулу

$$u = \Phi_1(x) - \Phi_1^*(x) + \omega(x)\Phi_2(x) + u_0(x). \quad (3.610)$$

При использовании формул (3.609) и (3.610) значения производных от структуры решения по любой паре направлений (в двумерном случае) не зависят друг от друга. Заметим, что нормализанту  $\Phi^*$  целесообразно выбирать в разностной форме (§ 7). Это уменьшает порядок производных от функции  $\omega$ , входящих в структуру решения и во все другие формулы, в которых она используется.

6. Недостатки простейших структур, применяемых при решении задачи Дирихле для областей с угловыми точками и врезами, проявляются и в структурах решений краевых задач более сложных типов. Рассмотрим, например, следующую краевую задачу. Пусть требуется найти решение уравнения Пуассона  $\Delta u = f$  в области  $\Omega$  с врезами, если везде на границе и на врезях нормальная производная равна нулю. Проанализируем простейшую структуру решения (3.292) этой задачи:

$$u = \Phi_1 - \omega \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \omega^2 \Phi_2, \quad (3.611)$$

где  $\omega = 0$  — уравнение границы, в которую включены и упомянутые врезы. Нетрудно видеть, что при  $\omega = 0$   $u = \Phi_1$ . Но в точках врезов точное решение задачи Неймана является, вообще, разрывным, что противоречит полученному выше из структуры (3.611) выводу. (Напомним, что неопределенные компоненты обычно выбираются из класса достаточно гладких полиномов.)

Таким образом, возможный (и не известный заранее) разрыв решения на врезам должен быть некоторым образом внесен в структуру решения.

Пусть  $\omega_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ) — такие уравнения чертежа  $\partial\Omega \cup AB \cup CD$  (см. рис. 127), что везде на  $\partial\Omega \frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 1$ , а по направлению нормалей  $\nu_i$  (т. е. по одну из сторон врезам  $AB$  и  $CD$ ) выполняются условия

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial\nu_i} = \delta_{ij},$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$ , если  $i = j$ ;  $\delta_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$ ). Построим такие функции  $\tau_i$  ( $i = 1, 2$ ), имеющие разрыв вдоль врезам  $AB$  и  $BC$ , что  $\tau_i > 0$  везде вне  $AB \cup CD$  и при стремлении к  $AB \cup CD$  со стороны нормали  $\nu_i$ , а при стремлении к  $AB \cup CD$  со стороны нормали  $\nu_j$  ( $j \neq i$ )  $\tau_i \rightarrow 0$ . Конструктивно функции  $\tau_i$  могут быть представлены по-разному, например в результате применения операторов  $D_i^{(1)}$  (см. § 4) к функциям  $\omega_i$ . О построении последних речь шла в п. 5.

Располагая функциями  $\omega_i$  и  $\tau_i$ , структуру решения однородной задачи Неймана для области с врезам можем предложить в виде

$$u = \tau_1\Phi_1 - \omega_1 D_1^{(1)}(\tau_1\Phi_1) + \tau_2\Phi_2 - \omega_2 D_2^{(2)}(\tau_2\Phi_2) + \omega^2\Phi_3, \quad (3.612)$$

где  $\omega = 0$  — уравнение  $\partial\Omega \cup AB \cup CD$ .

Информацию о точном решении, о которой речь шла выше, в некоторых случаях можно использовать и в краевых задачах со смешанными условиями. Например, для однородной задачи Неймана на основе модельных задач можно сделать вывод, что решение  $u_0$  для кусочно-гладких областей принадлежит классу  $C^1$ .

Рассмотрим смешанную краевую задачу. Пусть  $B_i$  ( $\Phi_i$ ) ( $i = 1, \dots, s$ ) есть структура решения, учитывающая краевые условия на участке  $\partial\Omega_i$  границы (в том числе и возможные на этом участке особенности). Пусть краевая задача такова, что (рис. 129, а)

$$\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \emptyset \quad (\forall i \neq j);$$

$$\bigcup_{i=1}^s \partial\Omega_i = \partial\Omega. \quad (3.613)$$

Пусть далее функции  $\tau_i(x)$  ( $i = 1, \dots, s$ ) такие, что

$$\tau_i(x)|_{\partial\Omega_i} = 1; \quad \tau_i(x)|_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_i} = 0; \quad (3.614)$$

$$\left. \frac{\partial^k \tau_i}{\partial \nu^k} \right|_{\partial\Omega} = 0 \quad (k = 1, \dots, m), \quad (3.615)$$

где  $m$  — число, большее наибольшего из порядков краевых условий. Тогда формула

$$u = \sum_{i=1}^s \tau_i(x) B_i(\Phi_i) \quad (3.616)$$

представляет собой структуру решения, учитывающую на каждом из участков  $\partial\Omega_i$  содержащиеся там особенности. (Функции  $\tau_i(x)$  строятся, например, так, как показано в § 15.)

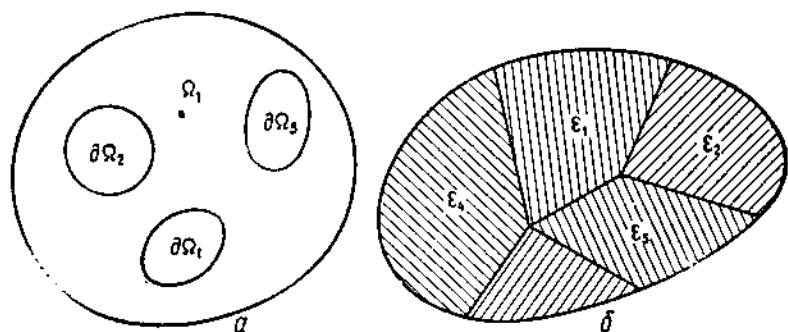


Рис. 129.

7. Для других типов краевых условий исследование и учет особенностей поведения решения в окрестности угловых и других нестандартных точек — серьезная проблема. Важно отметить два обстоятельства. 1. До сих пор слабо развита теория краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными в случае областей сложной формы, а также при сложном характере краевых условий. В частности, часто бывает трудно указать функциональный класс (не чрезмерно широкий), к которому принадлежит искомое решение. 2. Результаты теории приближений — идейной основы для развития прямых методов решения краевых задач — в основном относятся к одномерным задачам. В крайнем случае рассматриваются области, допускающие последовательное применение подходов, развитых для одномерных задач.

Поскольку в такой ситуации трудно рассчитывать на теорию, исследователи-практики идут по пути проведения численных экспериментов, подготавливают специальные тесты, сходные с решаемой задачей, и т. д. Однако проведение таких экспериментов, и в особенности их анализ, затруднительны.

Иногда особый характер поведения решения в угловых точках границы можно устранить в результате такого видоизменения постановки задачи, которое не нарушает основных физических соотношений, но более простое с математической точки зрения. Например, иногда можно ввести небольшие закругления углов границы, разрывную функцию заменить быстроменяющейся функцией и т. д.

Уравнение границы с закруглениями может быть построено с помощью метода  $R$ -функций по обычной методике, описанной в

§ 10 гл. 2. Однако в этом случае приходится, вообще, добавлять дополнительные опорные функции и тем самым усложнять вычисления. Другой путь [111] состоит в использовании уравнений вида  $\omega_i \equiv \omega - \varepsilon_i = 0$ , где  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$  — убывающая числовая последовательность. Тогда уравнения  $\omega_i = 0$  будут определять гладкие и расположенные в области  $\Omega$  чертежи  $\partial\Omega_i$ , которые при  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  стремятся к  $\partial\Omega$ . Если приближенные решения  $u_i$  краевых задач для областей  $\Omega_i = (\omega_i \geq 0)$  сходятся к некоторому  $u_0$  (конечно, в экспериментальном понимании сходимости), то можно с некоторой достоверностью считать  $u_0$  приближенным решением рассматриваемой краевой задачи. Впрочем, этот путь также весьма громоздок.

Можно также применять  $R$ -операции:

$$R_\rho \equiv x_1 + x_2 + s \left[ x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{8} \rho^{-2} (x_1^2 + x_2^2 + \rho^2) \times \right. \\ \left. \times (x_1^2 + x_2^2 - \rho^2 - |x_1^2 + x_2^2 - \rho^2|) \right]^{1/2}, \quad (3.617)$$

где  $R_\rho$  при  $s = -1$  есть  $R$ -конъюнкция, а при  $s = 1$  —  $R$ -дизъюнкция. Здесь  $\rho$  — радиус закругления. Опорные функции при этом должны быть нормализованы, а радиус  $\rho$  — достаточно мал.

При построении структур решения важно также обеспечить такую их конструкцию, при которой граничная информация оказывала бы свое влияние с определенным затуханием по мере удаления от соответствующего участка границы. (Конечно, это относится не ко всем задачам, а лишь к тем, в которых применим принцип Сен-Венана [175] или некоторые его аналоги.) В частности, на практике применяются следующие конструкции функции  $\omega$ :

$$\omega_1 = \frac{\omega}{1 + (k\omega)^{\alpha_1}} \quad (\alpha_1 > 1); \quad (3.618)$$

$$\omega_1 = \omega \wedge_\alpha \gamma, \quad (3.619)$$

где  $\gamma = \gamma(x) > 0$  в  $\Omega \cup \partial\Omega$ . (Чаще всего считают, что  $\gamma = \text{const.}$ ) При этом учитывается, что

$$\omega_1 \equiv \omega \wedge_\alpha \gamma \leq \min(\omega, \gamma). \quad (3.620)$$

Выбирая соответствующим образом в формулах (3.618), (3.619) величины  $k$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ , можно сделать функцию  $\omega_1$  достаточно малой внутри  $\Omega$  (или просто не превосходящей функцию  $\gamma(x)$ ). В то же время конструкции (3.618) и (3.619) сохраняют нормализованность функции  $\omega_1$ , если функция  $\omega$  нормализованная.

Приведенный выше краткий анализ не содержит информации, касающейся учета особенностей в других методах. Отметим лишь, что различного рода приемы сглаживания, усреднения, линеаризации и т. п. (применяемые, например, в методе конечных элементов) оправданы лишь в том случае, если они опираются на серьезные физические обоснования. Это замечание касается и метода  $R$ -функций. При использовании структур решения надо по меньшей мере обеспечить выполнение следующего условия: если  $I_e$  есть энергия,

заклученная в  $\varepsilon$ -окрестности особой точки и в этой точке нет сосредоточенных возбудителей поля, то при  $\varepsilon \rightarrow 0$  должно быть  $I_\varepsilon \rightarrow 0$ . Некоторые другие вопросы, касающиеся технологии применения метода  $R$ -функций, будут рассмотрены в дальнейшем.

*Замечание 1.* В ряде случаев методу  $R$ -функций могут предшествовать (или применяться одновременно с ним) другие известные методы решения краевых задач. Так, например, иногда возможно применить те или иные интегральные преобразования и понизить размерность краевой задачи. Получив приближенное решение меньшей размерности, можно затем применить обратное интегральное преобразование. Однако сравнение прямого применения приближенных методов (в том числе с использованием  $R$ -функций) и их сочетания с методами интегральных преобразований (когда, естественно, такое сочетание возможно) до настоящего времени по существу не выполнено.

*Замечание 2.* В § 24—25 гл. 2 большое внимание уделено построению уравнений чертежей, обладающих различными типами симметрии. Если симметрия некоторого типа геометрических компонент краевой задачи сочетается с симметрией аналитических компонент, то соответствующее данной краевой задаче поле (т. е. точное ее решение) также обладает симметрией соответствующего вида. Это позволяет существенно упростить решение краевой задачи благодаря формулировке некоторой краевой задачи лишь для трансляционного элемента рассматриваемой области. В этом отношении можно назвать многие работы в области механики, теплофизики, радиофизики и других областей [13, 41, 64, 153]. В сочетании с методом  $R$ -функций такой подход применялся рядом авторов [14, 135, 138]. Специального внимания заслуживают работы, в которых на основе теоретико-группового подхода строятся симметричные структуры решений с симметричными неопределенными компонентами. Основные результаты в этом направлении принадлежат В. М. Грицайчуку [28, 29].

*Упражнения и задачи.* 1. Предложить методику определения и учета особенностей решений основных типов краевых задач для уравнения Пуассона, когда  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

2. Предложить эффективную методику построения нормализованных уравнений многоугольников на плоскости с заданными закруглениями их вершин.

3. Предложить методику исследования и учета особенностей для основных типов двумерных задач теории упругости, а также для задач об изгибе пластин.

4. Как учитывать особенности решений краевых задач в окрестности сосредоточенных возбудителей поля?

5. Точка  $x^0$  является точкой стыка трех или большего числа сред с различными физическими характеристиками (рис. 129, б). Каким условиям удовлетворяет точное решение в таких точках?

6. Создать программы, реализующие метод В. А. Кондратьева [55], для отыскания параметров  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$  как функций угла  $\alpha$ .

## § 18. Метод квазифункций Грина

Знание функции Грина позволяет записать общее решение краевой задачи для широкого класса правых частей основного уравнения и граничных условий. Функции Грина с успехом применяются также для доказательства теорем существования и единственности [87]. Однако построение функций Грина даже для двумерной задачи весьма сложное, и можно назвать лишь немногие случаи, в которых эта проблема конструктивно решена.

Возможен другой путь — построение функций, близких в некотором смысле к функциям Грина. В этом случае решение задачи уже не получается в замкнутом виде, а представляется через некоторую вспомогательную функцию, являющуюся решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Такой подход впервые был применен Е. Е. Леви [202]. Позже этот метод, близкий к методу  $\text{ragameix}$  (функции особенностей), был развит с более общих позиций М. Жевре [198, 199].

В работах упомянутых авторов изучаются главным образом вопросы разрешимости краевых задач. Однако те средства, которыми пользуются М. Жевре и ряд других авторов, не эффективны на практике. На наш взгляд, основные трудности применения этих методов связаны со следующими двумя обстоятельствами. Во-первых, ядра интегральных уравнений, к решению которых сводятся краевые задачи, обладают полярными особенностями (или даже интегралы приходится понимать в смысле главных значений). Во-вторых, ядра интегральных уравнений конструктивно представлены через функции, построенные с помощью особых интегралов. В настоящем параграфе описан метод построения квазифункций Грина, опирающийся на использование теории  $R$ -функций, для уравнения Пуассона  $\Delta u = f$  в двумерном и трехмерном пространствах и основных типов краевых условий (Дирихле, третьего рода, в частности, Неймана, смешанных.) Существенно при этом то, что все построения проводятся в рамках элементарных функций для областей  $\Omega$ , определяемых неравенствами вида  $\omega \geq 0$  ( $\omega = 0$  — уравнение границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ ), где  $\omega$  — элементарная функция. Ввиду алгоритмической полноты (см. § 12 гл. 2) множества элементарных функций уравнение  $\omega = 0$  может быть построено для области, граница которой состоит из конечного числа кусков элементарных линий или поверхностей.

1. Рассмотрим вначале задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta v \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = f_0; \quad x \in \Omega; \quad (3.621)$$

$$v|_{\Gamma} = \varphi_0, \quad (3.622)$$

где  $\Gamma = \partial\Omega$  — граница области  $\Omega$ , а  $n = 2$  или  $3$ .

Предполагая, что  $\varphi_0$  есть элементарная или кусочно-элементарная функция, с помощью метода, описанного в § 1 гл. 3, можем продолжить  $\varphi_0$  внутрь  $\Omega$ , построив такую элементарную достаточно гладкую внутри  $\Omega$  функцию  $\varphi$ , что  $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0$ . Тогда, заменив  $u = v - \varphi$ , приходим к краевой задаче с однородным граничным условием

$$\Delta u = f; \quad x \in \Omega; \quad (3.623)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (3.624)$$

где  $f = f_0 - \Delta\varphi$ .

Пусть  $\omega = 0$  есть нормализованное до первого порядка (элементарное) уравнение  $\partial\Omega$ .

Начнем рассмотрение с двумерной задачи. Используя известное интегральное представление функции класса  $C^2(\Omega)$  и формулу Грина, для всяких  $u, q \in C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$  можем написать

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \right] d_{\xi} \Gamma -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln \frac{1}{r} \Delta_{\xi} u(\xi) d\xi; \quad (3.625)$$

$$\int_{\Omega} [u(\xi) \Delta_{\xi} q(\xi) - q(\xi) \Delta_{\xi} u(\xi)] d\xi = \int_{\partial\Omega} \left[ u(\xi) \frac{\partial q(\xi)}{\partial \nu} - q(\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} \right] d_{\xi} \Gamma, \quad (3.626)$$

где  $r = \|x - \xi\| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$ ;  $\Delta_{\xi} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}$ ;  $d_{\xi} \Gamma$  — означает, что интегрирование по  $\xi$  ведется по  $\Gamma = \partial\Omega$ . Положим

$$q = q(x, \xi) = -\frac{1}{2} \ln [r^2 + 4\omega(x)\omega(\xi)]; \quad (3.627)$$

$$G_2(x, \xi) = \ln \frac{1}{r} - q(x, \xi). \quad (3.628)$$

Легко видеть, что  $q(x, \xi) \in C^2(\Omega \times \Omega)$ , а вследствие того что  $\omega = 0$  при  $x \in \partial\Omega$ ,

$$G_2(x, \xi)|_{\omega(x)=0} = 0. \quad (3.629)$$

Умножая равенство (3.626) на  $\frac{1}{2\pi}$  и добавляя к формуле (3.625), с учетом (3.623) — (3.625) и (3.628) получаем

$$u(x) = u_0(x) + \int_{\Omega} u(\xi) K(x, \xi) d\xi, \quad (3.630)$$

где

$$u_0(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} G_2(x, \xi) f(\xi) d\xi; \quad (3.631)$$

$$K(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) q(x, \xi). \quad (3.632)$$

Выберем функцию  $\omega$  так, чтобы ядро  $K(x, \xi)$  интегрального уравнения (3.630) было непрерывным. (Нетрудно заметить, что разрыв возможен только при  $x = \xi$ .) Из формулы (3.632) с учетом (3.627) получаем

$$K(x, \xi)|_{x=\xi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + \omega \Delta \omega - (\nabla \omega)^2}{\omega^2}. \quad (3.633)$$

Но так как функция  $\omega$  предполагается нормализованной при  $\omega = 0$ , имеем  $(\nabla \omega)^2 = 1 + \omega \Phi$ ,  $\Phi \in C(\Omega \cup \partial\Omega)$ . Поскольку  $\omega$  — известная функция, то известна и функция  $\Phi$ . Формулу (3.633), как следует из сказанного, можно переписать в виде

$$K(x, \xi)|_{x=\xi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta \omega - \Phi}{\omega}. \quad (3.634)$$

Таким образом, для непрерывности функции (3.634) и при  $\omega \rightarrow 0$  надо, чтобы

$$\Delta \omega|_{\omega=0} = \Phi|_{\omega=0} = \frac{(\Delta \omega)^2 - 1}{\omega} \Big|_{\omega=0}. \quad (3.635)$$

Пусть  $\omega_0 = 0$  — какое-нибудь нормализованное элементарное уравнение  $\partial\Omega$ ,  $\Phi_0 = [(\nabla \omega_0)^2 - 1] \omega_0^{-1}$ . Функцию  $\omega$  будем искать в виде

$$\omega = \omega_0 + \omega_0^2 \Psi. \quad (3.636)$$

Очевидно, что при таком выборе  $\omega$  нормализованность сохраняется.) Из формулы



(3.636) последовательно находим

$$\nabla \omega = \nabla \omega_0 + 2\omega_0 \nabla \omega_0 \Psi + \omega_0^2 \nabla \Psi; \quad (3.637)$$

$$(\nabla \omega)^2 = (\nabla \omega_0)^2 + 4\omega_0 (\nabla \omega_0)^2 \Psi + O(\omega_0^2) = 1 + \omega_0 \Phi_0 + 4\omega_0 \Psi + O(\omega_0^2); \quad (3.638)$$

$$\begin{aligned} \Delta \omega &= \Delta \omega_0 + \Delta(\omega_0^2 \Psi) + 2\nabla(\omega_0^2 \nabla \Psi) + \omega_0^2 \Delta \Psi = \\ &= \Delta \omega_0 + 2(\nabla \omega_0)^2 \Psi + O(\omega_0) = \Delta \omega_0 + 2\Psi + O(\omega_0), \end{aligned} \quad (3.639)$$

Подставляя выражения (3.638) и (3.639) в формулы (3.635), получаем

$$\Delta \omega_0 + 2\Psi|_{\omega_0=0} = (\Phi_0 + 4\Psi)|_{\omega_0=0}. \quad (3.640)$$

Условие (3.640) будет выполнено, если

$$\Psi = \frac{1}{2} (\Delta \omega_0 - \Phi_0). \quad (3.641)$$

Из формулы (3.636) находим

$$\omega = \omega_0 + \frac{i}{2} \omega_0^2 (\Delta \omega_0 - \Phi_0) = \omega_0 + \frac{1}{2} \omega_0^2 \left[ \Delta \omega_0 - \frac{(\nabla \omega_0)^2 - 1}{\omega_0} \right]. \quad (3.642)$$

Таким образом, если возьмем вначале произвольное нормализованное уравнение  $\omega_0 = 0$  границы  $\partial\Omega$ , а затем построим ее уравнение  $\omega = 0$ , выбрав  $\omega$  в виде (3.642), то приходим к интегральному уравнению (3.630) с непрерывным ядром.

*Замечание 1.* Чтобы не допустить изменение знака функции  $\omega$  в  $\Omega$ , при выборе функции  $\omega_0$  рекомендуется следить за тем, чтобы выражение в квадратных скобках в формуле (3.642) внутри  $\Omega$  было неотрицательным. Этого можно достичь, например, применив процедуру срезки функции  $\omega_0$ : заменить  $\omega_0$  на  $\omega_0 \wedge_{\alpha} \varepsilon$ , где  $\wedge_{\alpha}$  — символ  $R$ -конъюнкции,  $\alpha$  — достаточно близкое к единице, а  $\varepsilon > 0$  — малое. В этом случае внутри области  $\Omega$   $\omega_0$ ,  $(\nabla \omega_0)^2$  и  $\Delta \omega_0$  будут малы, и основным слагаемым в упомянутом выражении будет  $\omega_0^{-1}$ .

*Замечание 2.* Предложенная методика построения квазифункции Грина позволяет получить уравнение Фредгольма второго рода не только для искомой функции, но и для ее производных. Действительно, применяя к уравнению (3.630) формулу Грина и оператор  $\nabla_x$ , получаем уравнение

$$\nabla_x u(x) = \nabla_x u_0(x) + \int_{\Omega} \nabla_{\xi} u(\xi) \nabla_x (\nabla_{\xi} q(x, \xi)) d\xi.$$

Перейдем к трехмерной задаче. Положим

$$q(x, \xi) = [r^2 + 4\omega(x)\omega(\xi)]^{-1/2} \quad (r = \|x - \xi\|); \quad (3.643)$$

$$G_3(x, \xi) = \frac{1}{r} - q(x, \xi), \quad (3.644)$$

Как и при решении двумерной задачи, приходим к уравнению Фредгольма (3.630), в котором

$$u_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} G_3(x, \xi) f(\xi) d\xi; \quad (3.645)$$

$$K(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) q(x, \xi). \quad (3.646)$$

Вместо формулы (3.633) в этом случае получим

$$K(x, \xi)|_{x=\xi} = -\frac{i}{32\pi} \frac{3[1 - (\nabla \omega)^2] + 2\omega \Delta \omega}{\omega^3}. \quad (3.647)$$

Функцию  $\omega$  ищем в виде

$$\omega = \omega_0 + \omega_0^2 X + \omega_0^3 \Psi, \quad (3.648)$$

где  $\omega_0$  — какая-нибудь нормализованная функция для  $\Omega$ , а  $X$  и  $\Psi$  — пока неопределенные функции. Тогда

$$\begin{aligned} (\nabla \omega)^2 &= (\nabla \omega_0)^2 + 4\omega_0^2 (\nabla \omega_0)^2 X^2 + 4\omega_0 (\nabla \omega_0)^2 X + \\ &+ 6\omega_0^2 (\nabla \omega_0)^2 \Psi + 2\omega_0^2 (\nabla \omega_0, \nabla X) + O(\omega_0^3), \end{aligned}$$

или, с учетом того, что  $(\nabla \omega_0)^2 = 1 + \omega_0 \Phi_0$ , получим

$$\begin{aligned} (\nabla \omega)^2 &= 1 + \omega_0 \Phi_0 + 4\omega_0 X + 4\omega_0^2 X^2 + 4\omega_0^2 \Phi_0 X + \\ &+ 6\omega_0^2 \Psi + 2\omega_0^2 (\nabla \omega_0, \nabla X) + O(\omega_0^3). \end{aligned} \quad (3.649)$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} \Delta \omega &= \Delta \omega_0 + 2X + 2\omega_0 \nabla^2 \omega_0 X + 2\omega_0 \Phi_0 X + \\ &+ 2\omega_0 (\nabla \omega_0, \nabla X) + 6\omega_0 \Psi + O(\omega_0^2). \end{aligned} \quad (3.650)$$

Подставляя формулы (3.649) и (3.650) в (3.647) и приравнявая нулю коэффициенты при  $\omega_0$  и  $\omega_0^2$  в числителе правой части, получаем

$$\begin{aligned} 3\Phi_0 - 2\Delta \omega_0 + 8X &= 0; \\ 6X^2 + 4\Phi_0 X + 3\Psi + (\nabla \omega_0, \nabla X) - 2X\Delta \omega_0 &= 0. \end{aligned} \quad (3.651)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{8} (2\Delta \omega_0 - 3\Phi_0); \\ \Psi &= \frac{1}{3} [2X\nabla^2 \omega_0 - 6X^2 - 4X\Phi_0 - (\nabla \omega_0, \nabla X)], \end{aligned} \quad (3.652)$$

где  $\Phi_0 = \omega_0^{-1} [(\nabla \omega_0)^2 - 1]$ .

Подставив формулу (3.652) в (3.648), получим функцию  $\omega$ , которая обеспечит непрерывность ядра  $K(x, \xi)$ . (Заметим, что, как и для двумерной задачи, необходимо проверить, будет ли полученная функция  $\omega$  сохранять знак внутри области  $\Omega$ .)

Описанный подход к построению квазифункции Грина приводит в трехмерной (двумерной) задаче для сферы (круга) к точной функции Грина, если взять

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{2R} (R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2); \quad \left( \omega_0 \equiv \frac{1}{2R} (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \right).$$

2. Перейдем к задаче третьего рода, т. е. будем рассматривать уравнение (3.621), но с краевым условием

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} + hv = \varphi_0 \quad (h \geq 0). \quad (3.653)$$

(При  $h \equiv 0$  приходим к задаче Неймана.) Как и в задаче Дирихле, можем перейти к однородному краевому условию, сделав в этот раз замену  $u = v - \omega \varphi$ , где  $\varphi$  — продолжение функции  $\varphi_0$  внутрь  $\Omega$ . Действительно, с учетом  $\frac{\partial \omega}{\partial \nu} \Big|_{\omega=0} = 1$  получаем

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu \right) \Big|_{\omega=0} = \left( \frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \varphi - \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + hv - h\omega \varphi \right) \Big|_{\omega=0} = 0.$$

Таким образом, приходим к краевой задаче

$$\Delta u = f_1; \quad (3.654)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu \right) \Big|_{\omega=0} = 0, \quad (3.655)$$

где  $f_1 = f_0 - \Delta(\omega\bar{\omega})$ .

В двумерной задаче получаем интегральное уравнение Фредгольма (3.630), если выполняем те же выкладки, что и в п. 1, полагая

$$q(x, \xi) = \frac{\bar{\omega}(x, \xi)}{r^2 + 4\omega(x)\omega(\xi)} \left\{ - \sum_{i=1}^2 \left[ (x_i - \xi_i) \frac{\partial \bar{\omega}(x, \xi)}{\partial x_i} + (\xi_i - x_i) \frac{\partial \bar{\omega}(x, \xi)}{\partial \xi_i} \right] - h \ln \sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(\xi)} \right\}, \quad (3.656)$$

где  $\bar{\omega}(x, \xi) = \omega(x) \wedge^* \omega(\xi)$ , а  $\wedge^*$  — символ какой-либо  $R$ -конъюнкции, сохраняющей нормализованность (например,  $\wedge^* = \wedge_0$  и  $\bar{\omega}(x, \xi) = \omega(x) \wedge_0 \omega(\xi) = \omega(x) + \omega(\xi) - \sqrt{\omega^2(x) + \omega^2(\xi)}$ ).

В трехмерной задаче примем аналогично

$$q(x, \xi) = \bar{\omega}(x, \xi) \left\{ - [r^2 + 4\omega(x)\omega(\xi)]^{-3/2} \sum_{i=1}^3 (x_i - \xi_i) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_i} + (\xi_i - x_i) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \xi_i} \right\} + h [r^2 + 4\omega(x)\omega(\xi)]^{-1/2}. \quad (3.657)$$

Действительно, непосредственной проверкой легко можно убедиться в том, что при таком выборе функции  $q(x, \xi)$  соответствующие функции  $G_2(x, \xi)$  и  $G_3(x, \xi)$  будут удовлетворять граничному условию (3.655). Это приведет к тому, что в соответствующих формулах (3.625), (3.626) (и их трехмерных аналогах) интегралы по границе области окажутся равными нулю и как следствие будет получено интегральное уравнение (3.630).

3. Рассмотрим задачу со смешанными краевыми условиями

$$v|_{\partial\Omega_1} = \Phi_{10}; \quad (3.658)$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial \nu} + hv \right) \Big|_{\partial\Omega_2} = \Phi_{20},$$

где  $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$  — участки  $\partial\Omega$ ;  $\Phi_{10}, \Phi_{20}$  — известные элементарные функции.

Вначале перейдем к однородным краевым условиям, сделав замену

$$u(x) = v(x) - \left\{ \Phi_1(x) + \frac{\omega_1(x)\omega_2(x)}{\omega_1(x) + \omega_2(x)} \times \right. \\ \left. \times \left[ \Phi_2(x) - h\Phi_1(x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_2(x)}{\partial x_i} \right] \right\}, \quad (3.659)$$

где  $\Phi_1(x)$  и  $\Phi_2(x)$  — элементарные продолжения функций  $\Phi_{10}$  и  $\Phi_{20}$  внутрь  $\Omega$ ,  $\omega_i(x) = 0$  ( $i = 1, 2$ ) — нормализованные уравнения  $\partial\Omega_i$ ,  $n$  равно двум или трем в зависимости от размерности пространства. [Функция в фигурных скобках получена из известной структуры решения смешанной задачи (см. § 10, гл. 2), в которой неопределенная компонента для простоты взята тождественно равной нулю.] В результате для функции  $u$  получим краевые условия

$$u|_{\partial\Omega_1} = 0; \quad \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu \right) \Big|_{\partial\Omega_2} = 0. \quad (3.660)$$

Основное уравнение будет

$$\Delta u = f_1, \quad (3.661)$$

где

$$f_1 = f_0 - \Delta \left\{ \varphi_1 + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \left[ \varphi_2 - h \varphi_1 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_i} \right] \right\}.$$

К интегральному уравнению (3.630) придем, выполнив те же выкладки, что и в п. 1, но приняв в двухмерной задаче

$$\begin{aligned} q(x, \xi) = & -\frac{1}{2} \ln [r^2 + 4\omega_1(x)\omega_1(\xi)] + \frac{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2} \times \\ & \times \left\{ [r^2 + 4\omega_2(x)\omega_2(\xi)]^{-1} \sum_{i=1}^2 \left[ (\xi_i - x_i) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_i} + (x_i - \xi_i) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \xi_i} \right] - \right. \\ & - [r^2 + 4\omega_1(x)\omega_1(\xi)]^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[ (x_i - \xi_i) + 2 \frac{\partial \omega_1(x)}{\partial x_i} \omega_1(\xi) \right] \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial x_i} + \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^3 \left[ (\xi_i - x_i) + 2 \frac{\partial \omega_1(\xi)}{\partial \xi_i} \omega_1(x) \right] \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial \xi_i} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} h \bar{\omega}_1 \left[ \ln \frac{1}{r^2 + 4\omega_2(x)\omega_2(\xi)} - \ln \frac{1}{r^2 + 4\omega_1(x)\omega_1(\xi)} \right] \right\} \quad (3.662) \end{aligned}$$

и в трехмерной задаче

$$\begin{aligned} q(x, \xi) = & [r^2 + 4\omega_1(x)\omega_1(\xi)]^{-1/2} + \frac{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2} \{ [r^2 + 4\omega_2(x)\omega_2(\xi)]^{-1/2} \times \\ & \times \sum_{i=1}^3 \left[ (\xi_i - x_i) \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial x_i} + (x_i - \xi_i) \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial \xi_i} \right] + [r^2 + 4\omega_1(x)\omega_1(\xi)]^{-1/2} \times \\ & \times \left\{ \sum_{i=1}^3 \left[ (x_i - \xi_i) + 2 \frac{\partial \omega_1(x)}{\partial x_i} \omega_1(\xi) \right] \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \left[ (\xi_i - x_i) + 2 \frac{\partial \omega_1(\xi)}{\partial \xi_i} \omega_1(x) \right] \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial \xi_i} \right\} + h \bar{\omega}_1 \{ [r^2 + 4\omega_2(x)\omega_2(\xi)]^{-1/2} - [r^2 + 4\omega_1(x)\omega_1(\xi)]^{-1/2} \}. \quad (3.663) \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее,  $\bar{\omega} = \omega(x) \wedge^* \omega(\xi)$ ;  $\bar{\omega}_i = \omega_i(x) \wedge^* \omega_i(\xi)$  ( $i = 1, 2$ ).

Заметим, что построение функций (3.656), (3.657), (3.662) и (3.663) выполнено таким образом, чтобы соответствующие квазифункции Грина были симметричными, т. е.  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ . Однако это условие, вообще, не обязательно.

Методика выбора функций  $\omega$  и  $\omega_i$ , которые приводили бы к непрерывным ядрам уравнения (3.630), остается той же, что была описана в п. 1. Перспективно, по-видимому, построение квазифункции Грина для задач третьего рода и смешанной на основе структурных формул разностного типа [113].

4. Нетрудно заметить, что если  $G(x, \xi)$  есть какая-либо из приведенных выше квазифункций Грина, а  $B(\Phi)$  — достаточно гладкая в  $\Omega \cup \partial\Omega$  структура решения соответствующей краевой задачи (т. е.  $B(\Phi)$  удовлетворяет краевым условиям при любом выборе  $\Phi$ ), то

$$G^*(x, \xi) = G(x, \xi) + B(\Phi) \quad (3.664)$$

также квазифункция Грина (при этом, если функция  $G(x, \xi)$  приводила к непрерывному ядру уравнения (3.630), то при  $B(\Phi) \in C^2(\Omega \times \Omega)$  функция  $G^*$  также

приведет к непрерывному ядру). Таким образом, есть бесчисленное множество квазифункций Грина (пучок с неопределенной компонентой  $\Phi$  из некоторого функционального класса) и можно поставить вопрос о выборе оптимальной квазифункции Грина.

В качестве критерия оптимальности можно взять, например, условие минимальности функционала

$$I = \int_{\Omega^1} K^2(x, \xi) dx d\xi. \quad (3.665)$$

(Из теории Фредгольма известно, что чем меньше  $I$ , тем лучше сходится метод простой итерации [201].) Можно взять также условие минимума функционала

$$I = \sup_{\Omega^1} |K(x, \xi)|. \quad (3.666)$$

Подставляя (3.664) в одну из этих формул, получаем функционал вида  $I = I(\Phi)$ . Если выбрать  $\Phi$  в виде некоторого полинома

$$\Phi = \sum_{k=1}^m C_k \psi_k(x, \xi),$$

где  $\{\psi_k\}$  — некоторая полная в  $\Omega \times \Omega$  последовательность, то минимизация функционала (3.665) приведет к линейной системе алгебраических уравнений для отыскания постоянных  $C_k$ . Минимизация функционала (3.666) существенно нелинейна, однако может быть сведена к задаче линейного программирования [23]. В качестве функций  $\psi_k$  целесообразно выбирать сдвиги финитных функций с малым носителем (финитные сплайны, атомарные функции).

Изложенная выше методика может быть распространена также на задачи теории упругости.

## § 19. Регионально-структурный метод

Регионально-структурный метод состоит в построении структур решения вида

$$u = B(\Phi_1, \dots, \Phi_m), \quad (3.667)$$

где каждой из неопределенных компонент  $\Phi_k$  в области  $\Omega$  соответствует некоторая подобласть  $\Omega_k$  (регион), в которой компонента  $\Phi_k$  проявляет свое наибольшее, а иногда и преимущественное по сравнению с другими компонентами влияние на формирование приближенного решения краевой задачи.

Этот метод представляет собой такое же логическое продолжение описанного в предыдущих параграфах метода  $R$ -функций, как метод конечных элементов в развитии методов разностного типа. Как и в методе конечных элементов, в регионально-структурном методе предусматривается возможность учета априорной информации о поведении искомых функций в тех или иных частях рассматриваемых областей, вызываемом различными физическими или геометрическими факторами. Так же как и для метода конечных элементов, для регионально-структурного метода большое значение приобретают точные решения, которые иногда удается получать для задач, близких по тем или иным признакам к рассматриваемой задаче. Кроме того, здесь могут учитываться и результаты, полученные экспериментальным путем или из различного рода инженерных соображений.

Типичную ситуацию, в которой целесообразно разбивать область на регионы, рассмотрим на следующем примере. Пусть  $\Omega$  — область, изображенная на рис. 130. Предположим, что речь идет, например, об изгибе пластинки. Для определенности примем, что участок  $A_1A_2A_3A_4A_5$  границы жестко зашпелен, а остальная часть свободно оперта. Из физики явления ясно, что изменение интенсивности поперечной нагрузки в каждой из подобластей  $\Omega_i$  в основном влияет на прогиб в этой подобласти и значительно меньше — в другой.

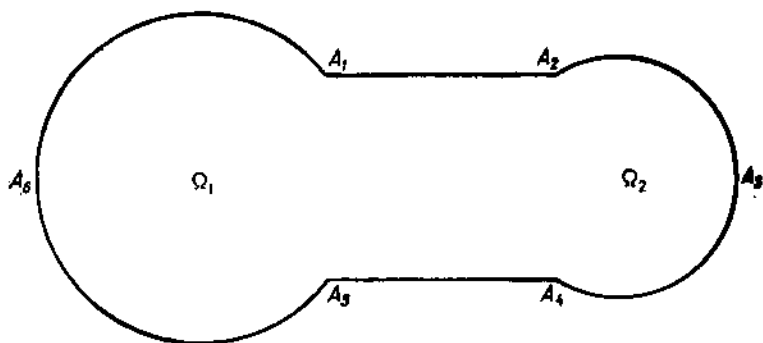


Рис. 130.

В п. 3 § 15 уже был описан один из подходов к разделению сфер влияния неопределенных компонент, развивающий в некотором смысле идею аппроксимации неопределенных компонент структур решений сплайнами. Добавим лишь, что вместо финитных функций можно использовать быстро убывающие функции. Ниже будут рассмотрены некоторые другие возможности использования метода  $R$ -функций.

1. Опишем подход, в котором осуществляется разделение «сфер влияния» неопределенных компонент на пограничную и внутреннюю подобласти области  $\Omega$ .

Пусть  $\Omega = \{\omega(x) \geq 0\}$ ,  $\omega \in C^m(\Omega)$ , а  $\omega(x) = 0$  — нормализованное уравнение  $\partial\Omega$ , такое что  $\omega(x) > \varepsilon$  в области  $\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon$ , где  $\Sigma_\varepsilon$  —  $\varepsilon$ -окрестность границы  $\partial\Omega$ . Функция

$$\tau_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} [|\varepsilon - \omega(x)| + \varepsilon - \omega(x)] [\varepsilon - \omega(x)]^m \quad (3.668)$$

принадлежит классу  $C^m(\Omega)$  и вследствие нормализованности  $\omega(x)$   $\tau_\varepsilon(x) \equiv 0$  в области, близкой  $\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon$  при малом  $\varepsilon$ . Легко убедиться в том, что функция

$$\omega_\varepsilon(x) \equiv \tau_\varepsilon(x) \omega(x) [\tau_\varepsilon(x) + \omega^{m+1}(x)]^{-1} \quad (3.669)$$

также принадлежит  $C^m(\Omega)$  и удовлетворяет условиям

$$\omega_\varepsilon(x)|_{\partial\Omega} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial \omega_\varepsilon(x)}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = 1; \quad (3.670)$$

$$D^\alpha \omega_\varepsilon(x)|_{\partial \Omega} = D^\alpha \omega(x)|_{\partial \Omega}, \quad |\alpha| \leq m.$$

Другими словами, функция  $\omega_\varepsilon(x)$  ведет себя вблизи  $\partial \Omega$  (с точностью до величин порядка  $\omega^{m+1}(x)$ ), как и функция  $\omega(x)$ .

В § 3—12 показано, что формулы для структур решений (или пучков) имеют вид разложений по степеням  $\omega$  или могут быть приведены к такому виду. При этом во всех случаях при старшей степени  $\omega$ , на единицу большей наивысшего порядка краевых условий на  $\partial \Omega$ , стоит неопределенная компонента, не входящая в другие члены рассматриваемой формулы. Это означает, что структурную формулу можно представить в виде

$$u = B(\Phi_1, \dots, \Phi_{s-1}) + \omega^m(x) \Phi_s. \quad (3.671)$$

Если в выражении  $B(\Phi_1, \dots, \Phi_{s-1})$  заменить  $\omega(x)$  на  $\omega_\varepsilon(x)$ , то в соответствии с (3.670) формула (3.671) будет удовлетворять прежним краевым условиям. При этом в области  $\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon$  все слагаемые, содержащие неопределенные компоненты  $\Phi_1, \dots, \Phi_{s-1}$ , тождественно равны нулю. Однако полнота структуры решения не нарушается, поскольку, каковы бы ни были значения функции  $u$  в области  $\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon$ , можно  $\Phi_s$  выбрать таким образом, что в этой области формула (3.671) превратится в тождество (если слева поставить точное решение). Следовательно, для слагаемого  $B(\Phi_1, \dots, \Phi_{s-1})$  зоной влияния есть пограничная зона  $\Sigma_\varepsilon$ , а для слагаемого  $\omega^m \Phi_s$  — в основном внутренняя подобласть  $\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon$ .

Заметим, что функцию  $\omega(x)$  можно построить так, что в области  $\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon$  она будет постоянной. Это означает, что в этом случае  $\omega^m \Phi_s \equiv C \Phi_s$  в  $\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon$  ( $C = \text{const}$ ) и, таким образом, в этой области структура решения становится особенно простой. Учитывая, что  $\Phi_s$  обычно выбирается в виде того или иного классического полинома или сплайна, для центральной зоны области  $\Omega$  можно существенно упростить основные вычислительные процедуры (например, дифференцирование и интегрирование).

2. В этом пункте на конкретном простом примере показана возможность использования при построении структур решений точных решений близких задач.

Пусть требуется решить краевую задачу Дирихле для двумерного уравнения Пуассона

$$\Delta u = \begin{cases} 1, & x_1^2 + x_2^2 \leq a^2; \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 > a^2 \end{cases} \quad (3.672)$$

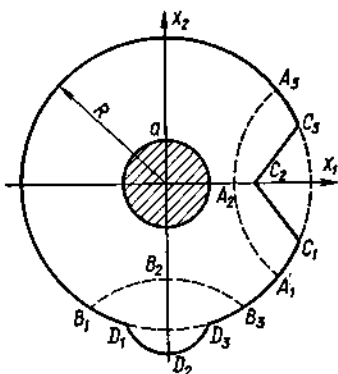


Рис. 131.

в области, представляющей собой круг радиуса  $R > a$  с выступом  $D_1 D_2 D_3$  и врезом  $C_1 C_2 C_3$  (рис. 131) при краевом условии

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.673)$$

Пусть  $\Sigma = (R^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0)$ , а упомянутые выступ и врез с характерными размерами  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  соответственно малы. (При  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  область  $\Omega$  превращается в круг  $\Sigma$ .) Ясно, что при малых значениях  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  решение рассматриваемой задачи при прочих равных условиях будет мало отличаться от решения  $u_\Sigma$  краевой задачи для области  $\Sigma$  с краевым условием (3.673) на  $\partial\Sigma$ . Решение  $u_\Sigma$  легко получить в виде

$$u_\Sigma = \begin{cases} \frac{1}{4} r^2 + \frac{a^2}{2} \ln \frac{a}{R} - \frac{1}{4} a^2 & \text{при } r^2 \leq a^2; \\ \frac{1}{2} a^2 \ln \frac{r}{R} & \text{при } r^2 > a^2, \end{cases}$$

где  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ . Очевидно также, что при изменении одного из параметров  $\varepsilon_i$  картина поля будет существенно изменяться лишь в некоторой относительно небольшой зоне  $\Sigma_i$  ( $i = 1, 2$ ) вблизи соответствующего вреза или выступа. Все это делает вполне естественным выбор структуры решения в виде

$$u = u_\Sigma + B_1(\Phi_1, \varepsilon_1) + B_2(\Phi_2, \varepsilon_2), \quad (3.674)$$

где операторы  $B_1(\Phi_1, \varepsilon_1)$  и  $B_2(\Phi_2, \varepsilon_2)$  должны, с одной стороны, обеспечивать удовлетворение краевого условия (3.673), а с другой — быть малыми величинами вне пределов соответствующих им регионов влияния  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  независимо от выбора неопределенных компонент  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . Кроме того, желательно, чтобы выполнялись также условия

$$B_i(\Phi_i, 0) \equiv 0 \quad (i = 1, 2). \quad (3.675)$$

Пусть  $\sigma_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ) — нормализованные уравнения линий  $A_1 A_2 A_3$  и  $B_1 B_2 B_3$  соответственно (см. рис. 131),  $\omega_1 = 0$  — уравнение линии  $A_1 C_1 C_2 C_3 A_3$ , а  $\omega_2 = 0$  — уравнение линии  $B_1 D_1 D_2 D_3 B_3$ . Тогда все перечисленные выше условия будут удовлетворены, если принять

$$B_i(\Phi_i, \varepsilon_i) = \begin{cases} -\frac{u_\Sigma \sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \omega_i^2} + \omega_i^2 \sigma_i^2 \Phi_i & \text{в области } \Sigma_i; \\ 0 & \text{вне области } \Sigma_i. \end{cases} \quad (3.676)$$

Если параметры  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  не настолько малы, чтобы можно было пренебречь влиянием полей в зонах  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  на картину поля внутри области  $\Omega$ , то можно внести корректировку в структуру (3.674), выбрав ее в виде

$$u = u_\Sigma + B_1(\Phi_1, \varepsilon_1) + B_2(\Phi_2, \varepsilon_2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega \Phi_3, \quad (3.677)$$

где  $\omega = 0$  — уравнение  $\partial\Omega$ .

Естественно, что при аппроксимации неопределенных компонент структур решений (3.674) и (3.677) теми или иными полиномами



(Чебышева, степенными, Лежандра, тригонометрическими и т. п.) необходимо осуществлять их масштабирование в соответствии с расположением и размерами их регионов влияния.

Другие более сложные примеры привязки структур решений к точным решениям близких задач приведены в [128, 134].

3. Рассмотрим реализацию идеи привязки структуры решения к точным решениям по-инному. Пусть требуется решить краевую задачу теплопроводности

$$\Delta u - cu = -F; \quad (3.678)$$

$$u|_{\partial\Omega_1} = \varphi_1; \quad \left(-\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu\right)\Big|_{\partial\Omega_2} = \varphi_2, \quad (3.679)$$

где функция  $F$  характеризует распределение источников тепла в области  $\Omega$ ,  $c = \alpha\lambda^{-1}d^{-1}$ ,  $\alpha$  — суммарный коэффициент теплоотдачи с поверхности пластины,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности материала пластины,  $d$  — толщина пластины,  $h$  — относительный коэффициент теплопередачи,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — известные функции.

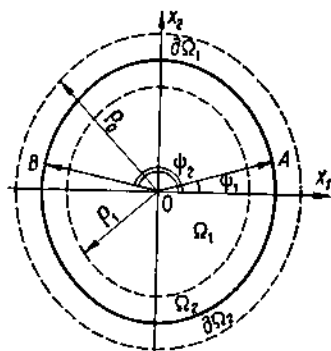


Рис. 132.

Предположим, что область  $\Omega$  близка к круговой (рис. 132) и разбита на две подобласти: круг  $\Omega_1$  радиуса  $\rho_1$  и  $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ , а  $\partial\Omega_1$  и  $\partial\Omega_2$  ( $\partial\Omega_2 = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_1$ ) участки границы  $\partial\Omega$ . Пусть также  $\rho_0$  — радиус круга, содержащего  $\Omega$  (см. рис. 132).

Структуру решения краевой задачи представим в виде  $u = u_i$  в области  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ):

$$u_1 = u_0 + \Phi; \quad u_2 = \frac{(u_0 + \Phi)\omega_{01}^2 + \varphi_1\omega_1^2\omega_{02}^2}{\omega_1^2\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2} - (\omega_0 \wedge_0 \omega_1^2) \times \\ \times [D_1^{(02)}(\Phi + u_0) - h(\Phi + u_0) + \varphi_2] + \omega_0^2\omega_1^2\Phi_1, \quad (3.680)$$

где

$$\omega_1 = \left[\frac{1}{2\rho_1}(\rho_1^2 - x_1^2 - x_2^2)\right]; \quad \partial\Omega_i = [\omega_{0i}(x) = 0] \quad (i = 1, 2);$$

$$\omega_0 = \omega_{01} \wedge_0 \omega_{02}; \quad D_1^{(02)} = \frac{\partial\omega_{02}}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega_{02}}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

(причем уравнение  $\omega_{02} = 0$  нормализовано), а функция  $u_0$  есть решение следующей краевой задачи для уравнения (3.678) внутри круга радиуса  $\rho_0$ :

$$u_0|_{r=\rho_0} = \varphi_1 \quad \text{при} \quad \psi_1 < \psi < \psi_2; \quad (3.681)$$

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + hu_0\right)\Big|_{r=\rho_0} = \varphi_2 \quad \text{при} \quad \psi_2 < \psi < 2\pi + \psi_1.$$

Другими словами, граничные значения в формулах (3.681) получены из граничных значений в (3.679) путем переноса их вдоль радиуса с  $\partial\Omega$  на окружность  $r = \rho_0$ .

Нетрудно убедиться в том, что неопределенная компонента  $\Phi$  «работает» во всей области  $\Omega$ , в то время как компонента  $\Phi_1$  (вместе с громоздкой формулой, в которую она входит) используется лишь в пограничной области  $\Omega_2$ .

В частном случае, когда рассматривается одно краевое условие третьего рода

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu\right)\Big|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad (3.682)$$

соответствующая структура решения может быть представлена в виде

$$u_1 = u_0 + \Phi; \quad (3.683)$$

$$u_2 = u_0 + \Phi - (\omega \wedge_0 \omega_1^2) [D_1(u_0 + \Phi) - h(u_0 + \Phi) + \varphi], \quad (3.684)$$

где  $u_0$  — точное решение краевой задачи для уравнения (3.678) с краевым условием при  $r = \rho_0$ :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\Big|_{r=\rho_0} = \varphi. \quad (3.685)$$

Если точное решение соответствующей краевой задачи неизвестно или его получение сопряжено с определенными трудностями, то структуру решения, учитывающую краевое условие (3.682), можно строить в виде

$$u_1 = \Phi; \quad (3.686)$$

$$u_2 = \Phi - (\omega \wedge_0 \omega_1^2) (D_1\Phi - h\Phi + \varphi) + \omega^2\omega_1\Phi_1. \quad (3.687)$$

Описанный подход к построению структур решения применим и тогда, когда есть несколько регионов. В этом случае при использовании описанного выше подхода одна из неопределенных компонент — общая для всей области  $\Omega$ , а в каждом из регионов имеются дополнительные неопределенные компоненты [134, 135]. В гл. 4 будут приведены конкретные примеры решения краевых задач.

*Упражнения и задачи.* 1. Пусть  $Au = f$  уравнение (это может быть и система) эллиптического типа, для которого есть возможность получать общие решения внешней и внутренней задач Дирихле для сферы в  $\mathbb{R}^n$ . Использовать эти решения при построении структур решений для других областей.

2. В области  $\Omega$  имеются непересекающиеся подобласти  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), различающиеся физическими характеристиками  $\lambda_i$  (они могут быть не только константами, но и векторами или тензорами). Предположим, что для областей  $\Omega_i$  можно получать общие решения задач Дирихле. Предложить способ построения структуры

решения, позволяющий находить неопределенные компоненты лишь в области  $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$ . (См., в частности, [114].)

3. Развить регионально-структурный метод для задач с трещинами, щелями, сосредоточенными возбудителями поля и другими геометрическими и физическими особенностями.

4. Пусть область  $\Omega$  есть объединение двух кругов (рис. 133), на границе  $\partial\Omega$  задано краевое условие Дирихле  $u = \varphi$ , а внутри области должно удовлетворяться уравнение Лапласа  $\Delta u = 0$ . Построить для этой задачи структуру решения, в которой содержится единственная неопределенная компонента  $\Phi$ , определенная лишь на дуге  $ABC$  или  $ADC$  (при этом использовать формулу Пуассона (3.283)). Обобщить эту идею на другие типы задач.

## § 20. Функционально-разностная аппроксимация уравнений и итерационные методы

Функционально-разностная аппроксимация операторов  $D_k$  и  $T_k$ , рассмотренная в § 5, может быть применена и для аппроксимации основного уравнения  $Au = f$  краевой задачи в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Пусть

$$A_h u = f_h, \quad h = (h_1, \dots, h_n) \quad (3.688)$$

есть конечно-разностная аппроксимация уравнения  $Au = f$ . Заменяем  $h$  на  $\omega h = (\omega h_1, \dots, \omega h_n)$ , где  $\omega = 0$  — нормализованное уравнение  $\partial\Omega$  и  $\omega(x) \leq \rho(x, \partial\Omega)$  ( $\rho(x, \partial\Omega)$  — кратчайшее расстояние от точки  $x \in \Omega$  до  $\partial\Omega$ ), а  $h_i \leq 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Эта аппроксимация, если считать, что она составлена для произвольной точки  $x \in \Omega$ , приводит к функционально-разностному уравнению

$$A_{h\omega} u = f_{h\omega}, \quad (3.689)$$

которое при  $x \rightarrow x^0 \in \partial\Omega$  превращается в уравнение  $Au = f$ .

Поскольку конечная разность, отнесенная к шагу, может рассматриваться как интегральное среднее, замена дифференциального оператора  $A$  оператором  $A_{h\omega}$  делает его менее чувствительным к возмущениям функций, выбираемых из области его определения. Это обстоятельство открывает путь для итерационных методов, аналогичных методам, применяемым к системе конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих уравнение  $Au = f$ . При этом трудности, возникающие при решении конечно-разностных систем итерационными методами, которые связаны с необходимостью удовлетворять крайевым условиям, могут быть преодолены с помощью метода  $R$ -функций. В общем случае соответствующая итерационная схема может быть построена следующим образом.

Пусть  $u = B(\Phi)$ ,  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$  — структура решения, удовлетворяющая крайевым условиям  $L_i u = \varphi_i$  на  $\partial\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ), а  $\Phi^0 = (\Phi_1^0, \dots, \Phi_m^0)$  — некоторая начальная («стартовая») неопределенная компонента. Тогда можно использовать формулы

$$\Phi^{(q)} = \Phi^{(q-1)} + \tau_q [A_{h\omega} B(\Phi^{(q-1)}) - f_{h\omega}] \quad (q = 1, 2, \dots), \quad (3.690)$$

где  $\tau_q$  — итеративные параметры, выбор которых достаточно произволен, если не интересоваться скоростью сходимости итерационного процесса. Соответствующие приближения к решению функционально-разностного уравнения  $A_{h\omega} u = f_{h\omega}$  имеют вид

$$u_N = B(\Phi^{(N)}) \quad (N = 1, 2, \dots). \quad (3.691)$$

Для получения повышенной скорости сходимости можно выбирать  $\tau_q$  на основе численных экспериментов или с помощью одного из вариационных методов. При

этом можно даже считать, что  $\tau_q$  есть некоторые функции, например линейные комбинации известных функций, составляющих полную систему, которые зависят от неопределенных постоянных, и для определения последних получать системы алгебраических уравнений.

**Пример 1.** Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  с краевым условием  $u = u_0$  на  $\partial\Omega$ , где  $u_0$  — заданная везде в  $\Omega \cup \partial\Omega$  функция (такая функция может быть построена методом, описанным в § 1).

Конечно-разностная аппроксимация уравнения  $\Delta u = 0$  может быть взята в виде

$$\Delta_h u = h^{-2} [u(x_1 - h, x_2) + u(x_1 + h, x_2) + u(x_1, x_2 - h) + u(x_1, x_2 + h) - 4u(x_1, x_2)] = 0. \quad (3.692)$$

Используя структуру решения  $u = u_0 + \omega\Phi$ , согласно (3.690) получаем

$$\Phi^{(q)} = \Phi^{(q-1)} + \tau_q [\Delta_{h\omega} (\omega\Phi^{(q-1)} + u_0)]. \quad (3.693)$$

Умножая обе части этого равенства на  $\omega$  и учитывая, что  $\omega\Phi^{(q)} = u_q - u_0$ ,  $\omega\Phi^{(q-1)} = u_{q-1} - u_0$ , приходим к формуле

$$u_q = u_{q-1} + \tau_q \omega \Delta_{h\omega} u_{q-1}, \quad (3.694)$$

или

$$u_q = u_{q-1} + \tau_q h^{-2} \omega^{-1} [u_{q-1}(x_1 - \omega h, x_2) + u_{q-1}(x_1 + \omega h, x_2) + u_{q-1}(x_1, x_2 - \omega h) + u_{q-1}(x_1, x_2 + \omega h) - 4u_{q-1}(x_1, x_2)]. \quad (3.695)$$

В частности, при  $h = 1$ ;  $\tau = \frac{1}{4}\omega$  приходим к известной схеме средних арифметических:

$$u_q(x_1, x_2) = \frac{1}{4} [u_{q-1}(x_1 - \omega, x_2) + u_{q-1}(x_1 + \omega, x_2) + u_{q-1}(x_1, x_2 - \omega) + u_{q-1}(x_1, x_2 + \omega)]. \quad (3.696)$$

Заметим, что метод  $R$ -функций позволяет регулировать значение  $\max \omega$ , не нарушая нормализованности  $\omega$ . Действительно, если  $\omega_1$  — нормализованная на  $\partial\Omega$  функция, такая, что  $\omega_1 > 0$  внутри  $\Omega$ , то функция  $\omega = \omega_1 \wedge_\alpha e$  ( $|\alpha| < 1$ ) удовлетворяет неравенству  $\omega \leq e$  и также является нормализованной функцией.

**Пример 2.** Рассмотрим задачу Неймана  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  на  $\partial\Omega$  для уравнения Пуассона  $\Delta u = f$ . Используем структуру решения

$$u = \Phi - \omega D_1 \Phi.$$

Соответствующая итерационная схема имеет вид

$$\Phi^{(q)} = \Phi^{(q-1)} + \tau_q [\Delta_{h\omega} (\Phi^{(q-1)} - \omega D_1 \Phi^{(q-1)}) - f]; \quad (3.697)$$

$$u_q = \Phi^{(q)} - \omega D_1 \Phi^{(q)}. \quad (3.698)$$

Применяя к (3.697) оператор  $D_1$ , получаем

$$D_1 \Phi^{(q)} = D_1 \Phi^{(q-1)} + D_1 [\tau_q (\Delta_{h\omega} (\Phi^{(q-1)} - \omega D_1 \Phi^{(q-1)}) - f)]. \quad (3.699)$$

Умножая равенство (3.699) на  $\omega$  и вычитая из (3.697), с учетом формулы (3.698) получаем

$$u_q = u_{q-1} + \tau_q (\Delta_{h\omega} u_{q-1} - f) - \omega D_1 [\tau_q (\Delta_{h\omega} u_{q-1} - f)]. \quad (3.700)$$

Заметим, что если  $\omega$ ,  $f$  и другие функции, присутствующие в постановке краевой задачи, элементарные, то приведенные выше итерационные формулы позволяют, начав с некоторой элементарной функции  $u_0$ , удовлетворяющей краевым

условиям, получить последовательность элементарных функций  $u_q$ , сходящуюся к решению соответствующего функционально-разностного уравнения. В качестве начального приближения удобно выбирать приближенное решение, полученное тем или иным вариационным методом. При этом итерации будут оказывать на него сглаживающее влияние, что позволяет надеяться на получение достаточно хороших расчетных величин дифференциального характера.

Функции  $\omega$ ,  $\omega_i$  и функции, входящие в краевые условия и уравнение задачи, могут зависеть от тех или иных геометрических и физических параметров  $a_1, \dots, a_s$ , которые при использовании метода  $R$ -функций войдут в структурные формулы в буквенном виде. Применение описанного выше подхода приведет к последовательности приближений, которые, в отличие от их сеточных аналогов, будут иметь вид формул, зависящих не только от текущих координат, но и от  $a_1, \dots, a_s$ . Следовательно, таким путем будем получать приближенные решения «пучков» краевых задач, что существенно облегчает процесс получения частных решений и подключения этих решений к оптимизационным алгоритмам.

*Упражнения и задачи.* 1. Предложить эффективный способ выбора итеративных параметров  $\tau_q$ .

2. Показать, что ввиду быстрого нарастания сложности формул целесообразно (при фиксированных значениях геометрических и физических параметров) через каждые несколько шагов осуществлять аппроксимацию приближений  $u_q$ .

## § 21. Выделение гладкой части решения. Аппроксимационные свойства структур решений

Рассмотрим однородную краевую задачу

$$\begin{aligned} Au &= f; \quad x \in \Omega; \\ L_i u|_{\partial\Omega_i} &= 0 \quad (i = 1, \dots, m), \end{aligned} \quad (3.701)$$

где  $A$  — линейный эллиптический дифференциальный оператор порядка  $2m$ , а  $f \in C^l(\Omega \cup \partial\Omega)$ . (Методы, описанные в § 11—12, позволяют всегда перейти от неоднородных краевых условий к однородным.) Для простоты будем считать, что граница  $\partial\Omega$  принадлежит классу  $C^\infty$ . Тогда из выполнения некоторых условий общего вида [127], накладываемых на граничные операторы  $L_i$ , и того, что  $f \in C^l(\Omega \cup \partial\Omega)$ , следует:  $u \in C^{l+2m}(\Omega \cup \partial\Omega)$ , и при этом

$$\|u\|_{C^{l+2m}(\Omega \cup \partial\Omega)} \leq C \|f\|_{C^l(\Omega \cup \partial\Omega)}. \quad (3.702)$$

Таким образом, гладкость решения тем большая, чем глаже правая часть основного уравнения  $Au = f$  (ниже увидим, что от этого зависит скорость приближения к точному решению). Естественно поэтому стремление сделать такое преобразование исходной задачи, которое привело бы к уравнению с более гладкой правой частью. Сделаем замену искомой функции  $u = v + \varphi$ , где  $v$  — новая неизвестная функция. Тогда для функции  $v$  получаем уравнение

$$Av = f - A\varphi = f_1. \quad (3.703)$$

Следовательно, для того чтобы получить более гладкую правую часть  $f_1$ , надо соответствующим образом выбрать функцию  $\varphi$ .

1. Отметим два подхода, которые могут быть применены для выбора  $\varphi$ .

Первый часто применяемый подход описан в работе [98]. Он основан на том, что для многих типов уравнений с частными произ-

водными могут быть получены точные решения для всего пространства  $\mathbb{R}^n$  (с теми или иными условиями на бесконечности) при достаточно произвольной функции  $f$ . Обычно решение такой задачи имеет вид

$$u_0(x) = \int_{\xi \in \Omega_1} f(\xi) K(\|x - \xi\|, x, \xi) d\xi, \quad (3.704)$$

где  $\Omega_1$  — область, внутри которой расположены возбудители поля, а  $K$  — некоторое ядро, имеющее особенность при  $\|x - \xi\| \rightarrow 0$ .

Сделаем замену

$$\begin{aligned} u &= u_0 - \int_{\Omega_1} f(\xi) K(\sqrt{\|x - \xi\|^2 + [\omega(x)]^{p+1}}, x, \xi) d\xi + v = \\ &= u_0 - u_1 + v, \end{aligned} \quad (3.705)$$

где  $p$  — наивысший порядок краевых условий (3.701). Так как  $u_0$  есть решение основного уравнения, имеем  $Au_0 = f$ . Кроме того, при  $x \rightarrow \partial\Omega$   $\omega(x) \rightarrow 0$ , а тогда  $u_1 - u_0 \rightarrow 0$  вместе со своими производными до порядка  $p$  включительно. Поэтому

$$L_i u|_{\partial\Omega_1} = (L_i u_0 - L_i u_1 + L_i v)|_{\partial\Omega_1} = L_i v|_{\partial\Omega_1} = 0.$$

Отсюда следует, что функция  $v$  удовлетворяет тем же граничным условиям, что и функция  $u$ . Подставляя формулу (3.705) в уравнение (3.701), получаем

$$Au \equiv Au_0 - Au_1 + Av = f - Au_1 + Av = f. \quad (3.706)$$

Отсюда получаем уравнение для функции

$$Av = Au_1, \quad (3.707)$$

где

$$f_1 = Au_1 = \int_{\Omega_1} f(\xi) K_1(x, \xi) d\Omega; \quad (3.708)$$

$$K_1(x, \xi) = AK(\sqrt{\|x - \xi\|^2 + [\omega(x)]^{p+1}}, x, \xi). \quad (3.709)$$

Ядро  $K(\sqrt{\|x - \xi\|^2 + [\omega(x)]^{p+1}}, x, \xi)$  не имеет в области  $\Omega_1$  особенностей, поэтому  $K_1$  — непрерывная функция и интегрирование в (3.708) ведет к усреднению функции  $f$ , следствием чего является более высокая гладкость функции  $f_1$ . (В некоторых случаях  $f_1$  может оказаться бесконечно дифференцируемой.)

Второй подход [130, 131] основан на непосредственном использовании метода  $R$ -функций. Идею этого метода покажем на примере. Пусть  $f = f_1$  в  $\Omega_1 \cup \Omega$ ,  $f_1 \in C^m(\Omega_1 \cup \partial\Omega_1)$ ,  $f \equiv f_2$  в  $\Omega \setminus \Omega_1$ ,  $f_2 \in C^m(\text{Cl}(\Omega \setminus \Omega_1))$ ,  $\omega = 0$  — уравнение  $\partial\Omega$ , а  $\omega_1 = 0$  — нормализованное уравнение  $\partial\Omega_1$ . Чтобы устранить разрыв, который имеет функция  $f$  на  $\partial\Omega_1$ , представим решение  $u$  в виде  $u = v + \omega^{k+1} \Psi$ , где  $k$  — максимальный порядок краевых условий в данной задаче на  $\partial\Omega$ . Тогда функция  $v$  удовлетворяет тем же краевым условиям, что и функция  $u$ , но для  $v$  получаем уравнение  $Av = f - A(\omega^{k+1} \Psi)$ .

Применив метод построения структур, описанный в § 1—13, можем выбрать  $\Psi$  так, чтобы выполнялись условия

$$D_s [f_1 - A(\omega^{k+1}\Psi)]|_{\omega_s=0} = D_s [f_2 - A(\omega^{k+1}\Psi)]|_{\omega_s=+0} \quad (3.710)$$

$$(s = 0, 1, \dots, m).$$

В результате получим уравнение  $Av = f_0$ ,  $f_0 \in C^m(\Omega \cup \partial\Omega)$ , с требуемой степенью гладкости.

Описанными методами сглаживания правой части уравнения (следовательно, и его решения) не исчерпываются подходы, которые могут быть использованы в данной ситуации.

2. Остановимся на вопросе об аппроксимационных свойствах структур решений. Мы видели, что приближенное решение, получаемое с помощью структурных формул, обычно представляется в виде

$$\tilde{u} = B(\Phi_1, \dots, \Phi_s), \quad (3.711)$$

где  $\Phi_i \in L_i \subset C(\Omega \cup \partial\Omega)$ ,  $\dim L_i = l_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ). Для однородных краевых условий функции вида (3.711) образуют линейное пространство  $L(B) \subset C(\Omega \cup \partial\Omega)$ , причем

$$N = \dim L(B) \leq \sum_{k=1}^s l_k.$$

При этом любая функция  $v \in L(B)$  удовлетворяет однородным краевым условиям задачи (3.701). (Напомним, что к однородным краевым условиям всегда можно перейти описанными ранее методами. Аналогично можно было бы рассматривать и неоднородные краевые условия, считая  $L(B)$  линейным многообразием.) Из теории приближений известно, что для любого линейного подпространства  $L_N$  размерности  $N$

$$\sup_{u \in W^1 A(\Omega \cup \partial\Omega)} \inf_{\varphi \in L_N} \|u - \varphi\|_{C(\Omega \cup \partial\Omega)} \geq \frac{C_1^1 A}{N^{1/n}},$$

где

$$W^1 A(\Omega \cup \partial\Omega) = \{u \in C^1(\Omega \cup \partial\Omega), \|u\|_{C^1(\Omega \cup \partial\Omega)} \leq A\},$$

и существует такое  $L_N$ , что

$$\sup_{u \in W^1 A(\Omega \cup \partial\Omega)} \inf_{\varphi \in L_N} \|u - \varphi\|_{C(\Omega \cup \partial\Omega)} \leq \frac{C_1^2 A}{N^{1/n}}.$$

Здесь константы  $C_1^1$ ,  $C_1^2$  зависят от  $\Omega$ , а  $n = \dim \Omega$ . Поскольку неравенство (3.702) дает для неизвестного решения лишь оценку

$$\|u\|_{C^{i+2m}(\Omega \cup \partial\Omega)} \leq A = C \|f\|_{C^i(\Omega \cup \partial\Omega)},$$

можно считать, что структура решения (3.711) оптимальна (по порядку) с точки зрения теории приближений, если

$$\sup_{u \in W^{i+2m} A(\Omega \cup \partial\Omega)} \inf_{\varphi \in L_N} \|u - \varphi\|_{C(\Omega \cup \partial\Omega)} \leq \frac{C_0 A}{N^{(i+2m)/n}} \quad (3.712)$$

( $C_0 = \text{const}$ ). (Следствием (3.712) является полнота структуры, но не наоборот.) Для структур общего вида оценки аппроксимационных

свойств исследовались в работах [52—54]. В то же время оптимальность (в указанном смысле) для структур общего вида до сих пор по существу не исследована. Однако, используя рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведенным в работах [52—54, 127], и результаты И. Ю. Харрика [182], можно показать, что структуры специального вида (которые могут быть построены для любых краевых условий) «с пограничной зоной» (см. п. 1 § 19) и структуры различного типа (см. § 5—12) оптимальны с точки зрения теории приближений.

Ограничимся случаем, когда  $s = 2$ , и построим структуру с пограничной зоной. Пусть  $h(x) \in C^{l+2}(\Omega \cup \partial\Omega)$  и при этом  $h(x) = 1$  на границе  $\partial\Omega$ ;  $0 \leq h \leq 1$  при  $\rho(x, \partial\Omega) \leq CN^{-1/n}$ ,  $h(x) = 0$  при  $\rho(x, \partial\Omega) > CN^{-1/n}$  ( $\rho(x, \partial\Omega)$  — расстояние от  $x$  до  $\partial\Omega$ ;  $\|h(x)\|_{C^q(\Omega \cup \partial\Omega)} \leq CN^{q/n}$ ,  $0 \leq q \leq l+2$ ). Пусть порядок краевого условия  $B_1 u = 0$  равен  $\alpha_1$ , тогда структура вида

$$W = \Phi_1 + \frac{\omega^{\alpha_1}}{\alpha_1!} h(x) (-B_1 \Phi_1 + \omega \Phi_2)$$

оптимальна при условии, что  $L_1, L_2$  оптимальны, т. е. если

$$\sup_{u \in W^{l+2, A}(\Omega \cup \partial\Omega)} \inf_{\varphi \in L_1} \|u - \varphi\|_{C(\Omega \cup \partial\Omega)} \leq \frac{C^2 A}{(l_1)^{(l+2)/n}};$$

$$\sup_{u \in W^{l+2-\alpha_1, A}(\Omega \cup \partial\Omega)} \inf_{\varphi \in L_2} \|u - \varphi\|_{C(\Omega \cup \partial\Omega)} \leq \frac{C^2 A}{(l_2)^{(l+2-\alpha_1)/n}}$$

и  $l_1 = \beta l_2$ , где  $\beta > 0$  от  $N$  не зависит.

Отметим, что метод  $R$ -функций позволяет легко строить функцию  $h(x)$  с требуемыми свойствами. В качестве пространств  $L_k$  можно брать пространства алгебраических полиномов, сплайнов и атомарных функций. На практике часто используют (без теоретического обоснования, а лишь на основе хороших результатов экспериментов на тестах) структуры, у которых  $l_1 = N$ ,  $l_k = 0$  при  $k > 1$ . Используя в качестве  $L_k$  ( $k > 1$ ) специально выбранные (граничные) пространства сплайнов или атомарных функций, можно доказать аппроксимационную оптимальность структур, у которых

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{l_1}{N} = 1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{l_k}{N} = 0 \quad (k > 1).$$

В работе [126] (см. также § 16) отмечается, что применение в качестве аппроксимирующих пространств атомарных функций приводит к меньшим вычислительным затратам, чем при использовании других функций (в том числе — сплайнов). Однако реализацию этого подхода на практике еще предстоит осуществить.

*Упражнения и задачи.* 1. Провести сравнительный анализ приведенных в п. 1 методов сглаживания и указать оптимальные области их применимости.

2. Провести исследование полноты и оптимальности по порядку структур решений, построенных в настоящей главе, в различных нормированных пространствах, применяемых на практике.



## РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

### § 1. Генераторы программ серии «Поле» для решения краевых задач математической физики

В таких сложных задачах, как расчет физико-механических полей с учетом геометрических форм сред, распределения и расположения возбудителей поля, величин физических параметров и другой информации, важен и почти неизбежен этап проведения численных экспериментов. Эти эксперименты необходимы для проведения анализа, выяснения пригодности и корректности выбранных физических и математических моделей поля; выбора метода и реализующего его вычислительного алгоритма; составления и отладки программ; решения тестовых (модельных) задач; анализа численных результатов и др. Для того чтобы все эти вопросы можно было решать достаточно эффективно и оперативно, необходимо создание экспериментальной базы.

Опыт использования вычислительной техники показывает, что наилучшая форма такой базы — это автоматизированные программирующие системы (пакеты программ), освобождающие экспериментатора-математика от рутинной работы по составлению и отладке программ, выполнению вспомогательных расчетов и оформлению результатов и т. д.

Важными требованиями к экспериментальной базе являются ее универсальность, пригодность к использованию в различных ситуациях, возникающих в задачах исследования, расчета и оптимизации физико-механических полей. (Впрочем, во многих случаях оправдано создание специализированной экспериментальной базы.) Достичь такой универсальности можно лишь, опираясь в первую очередь на универсальные методы (сеточные, конечных элементов, вариационные), не отказываясь в то же время от возможности привлечения, там где это выгодно, и других специальных методов [37, 39, 83, 151, 173, 183, 196].

Заметим, что грань между упомянутыми универсальными методами весьма условна: разностные методы и метод конечных элементов в большинстве случаев можно трактовать как вариационные со специальным выбором базисных («пробных») функций, а один и тот же вычислительный алгоритм в ряде случаев получать как вариационным, так и проекционным методом. В конечном счете, какой бы из названных выше методов не применялся, в нем должен предусматриваться сбор информации со всей области и ее границы, т. е.

в любом случае без некоторой  $\varepsilon$ -сети не обойтись, хотя, возможно, она в явном виде (например, в вариационных методах) и не представлена. Густота этой сети зависит от размерности  $N$  аппроксимирующего пространства (в вариационных методах — это число координатных функций).

Из сказанного следует, что правильнее было бы говорить о прямых методах вообще, т. е. таких методах, которые сводят решение краевой задачи к системе (или последовательности систем) алгебраических уравнений. Поэтому главными вопросами при разработке программирующих систем и пакетов программ в математической физике являются вопросы формирования матриц упомянутых систем уравнений и последующего их решения (включая и задачи на собственные значения).

Немаловажны, конечно, и другие вопросы, касающиеся обработки и оценки полученных результатов, сервиса, дисциплины работы с пакетом и т. п., решение которых сопряжено со значительными трудностями с точки зрения как применения системного программирования, так и учета специфики применяемых методов.

Системы алгебраических уравнений, к которым приводят прямые методы, являются конечномерными образами бесконечномерных краевых задач и должны достаточно полно вобрать всю информацию, содержащуюся в постановке краевой задачи. Главная трудность при этом состоит в том, что наряду с аналитической информацией об уравнениях и краевых условиях, в постановке краевой задачи присутствует и информация геометрического характера о форме области, в которой ищется решение, о форме участков границы, на которых заданы краевые условия, и др. (см. § 9 гл. 3).

Вопрос, касающийся решения систем полученных алгебраических уравнений, связан с их обусловленностью, которая, как правило, является хорошей для разреженных матриц и часто бывает плохой для плотно заполненных матриц.

Известно, что применение сеточных методов обычно приводит к хорошим системам уравнений, однако значительные трудности возникают при учете (точнее, формализации этого учета) геометрической информации и заданных краевых условий. Метод конечных элементов как раз и возник из стремления сохранить достоинство сеточных методов — хорошую обусловленность систем уравнений, и в то же время получить достаточно эффективные средства для привязки к геометрическим формам областей произвольного вида. Однако при этом возник ряд других проблем, связанных с формализацией процесса дискретизации и зависимостью от него результатов решения задачи, с учетом краевых условий, с большим объемом вычислений и табличной формой представления выходной информации и другими факторами, которые затрудняют проведение расчетов и принятие на их основе инженерных решений.

Этих недостатков в значительной мере лишены классические вариационные методы, в которых в качестве аппроксимационного аппарата использовались не сплайны, как в методе конечных эле-

ментов, а те или иные классические полиномы (степенные, тригонометрические и др.). Однако до недавнего времени (до создания теории  $R$ -функций) не было универсальных методов, позволяющих при построении базисных функций обеспечить удовлетворение краевым условиям и, кроме того, при таком подходе получались (за редкими исключениями) плотно заполненные матрицы, обусловленность которых быстро ухудшалась с ростом размерности аппроксимирующих пространств. (Методы ортогонализации, которые теоретически могли бы помочь в этом случае, на практике сами оказываются неустойчивыми.)

Описанные в предыдущей главе методы построения структур решений краевых задач, опирающиеся на теорию  $R$ -функций, содержат конструктивно простые средства для удовлетворения самым различным типам краевых условий при практически произвольной геометрии областей. В то же время они позволяют использовать в качестве аппроксимационного аппарата как классические полиномы, так и функции с локальными носителями (сплайны (§ 15 гл. 3), атомарные функции (§ 16 гл. 3) и др. [101]). Эти обстоятельства ставят теорию  $R$ -функций в исключительно выгодное положение в смысле использования ее в качестве теоретической базы при разработке программирующих систем в области краевых задач математической физики. В частности, в Институте проблем машиностроения АН УССР на этой основе было создано несколько версий ГП серии «Поле» [67—71], позволивших в десятки раз сократить затраты труда на составление и отладку программ, а также обработку полученных результатов. При этом, учитывая большой идейный и практический задел в развитии сеточных методов, метода конечных элементов, методов типа Трефтца и т. д., который накопила мировая практика, было решено создавать программирующие системы серии «Поле» открытого типа, к которым можно было бы достаточно просто подключать различные прямые методы.

Первым необходимым условием для создания таких систем является полная формализация постановки краевых задач, выбранных методов их решения и обработки полученной информации [65, 96].

Таким образом, должна быть задана следующая информация:

А. Об общих характеристиках задачи (размерности пространства, в котором поставлена задача; числа искомых функций, вектор-функций и т. д.; линейности или нелинейности основного уравнения и краевых условий и др.).

Б. Об уравнениях задачи.

В. О краевых условиях.

Г. О форме областей и участков их границ.

Д. О методах решения.

Е. О результатах, которые должны быть выданы (расчетные формулы с описанием входящих в них операторов, параметров и др.).

Кроме того, каждый из пунктов А — Е может сопровождаться дополнительной (сервисной) информацией, выбор которой зависит

от применяемого метода решения. Эти пункты с сопровождающей их информацией влияют на вычислительную схему алгоритмов как отдельно взятой программы, так и рабочего комплекса программ решения поставленной задачи в целом, а также влияют на режим работы всей программирующей системы (ПС).

Опишем более подробно, как зависят от информации А — Е (с учетом сервиса) вычислительные алгоритмы и режим работы ПС. Информация А влияет почти на все вычислительные схемы алгоритмов, реализованных как в отдельных программах, так и в рабочем комплексе программ в целом.

Это означает, во-первых, что все модули с переменной структурой, алгоритм которых зависит от информации А, должны адаптироваться к ней. Под адаптацией модуля здесь понимается не только внутренняя перестройка модуля на данный алгоритм, а и осуществление «вырезов» (или «вставок») в модулях тех операторов, идентификаторов и массивов, которые при реализации данных алгоритмов в работе не должны (или должны) участвовать. Во-вторых, должна видоизменяться (расширяться или сужаться) внешняя связь между модулями. В-третьих, вычислительный процесс должен настраиваться на решение поставленной проблемы.

Вся эта настройка производится специальной программой — конструктором — с помощью таблиц, содержащих в соответствии с предметной областью информации А список имен текстов в определенном порядке следования, по которому затем комплектуются модули, и таблиц текстов групп модулей, близких по своей структуре, из которых компилируются тела модулей.

Информация Б содержит данные (в аналитической форме) о возбудителях поля и форме областей их действия, о форме подобластей с разнородными физическими характеристиками и о самих этих характеристиках. (Последние могут быть константами, функциями, векторами, тензорами.) Информация Б влияет на отдельные вычислительные алгоритмы и в зависимости от вида уравнений может влиять на подключение необходимых модулей к рабочему комплексу программ для реализации соответствующих вычислительных алгоритмов.

Информация В также является аналитической и сопровождается данными: о нагружающих функциях и участках границ, на которых они заданы; о функциях и участках границ, присутствующих в краевых условиях третьего типа и с косой производной; о формах подобластей с разнородными средами и их характеристиками.

Кроме отмеченной выше информации, краевые условия (в зависимости от применяемых конструктивных средств теории  $R$ -функций) могут сопровождаться дополнительной (с элементами сервиса) информацией: об аппроксимационных средствах и их носителях или регионах действия; об участках границ, на которых заданы различные типы краевых условий, и особенностях их построения; о функциях, продолжающих граничную информацию внутрь области; о весовых функциях и т. п. Информация В в основном вли-

яет на выбор специальных (сменных) модулей, реализующих вычислительные алгоритмы по данным крайевым условиям.

Присутствие информации Г о форме областей и участков их границ, задаваемой системами уравнений, неравенств и логическими формулами, вызвано необходимостью решать крайевые задачи в областях сложной формы. Эта информация используется как для конструирования приближенных решений, так и для определения областей (с помощью предикатов) в которых действуют возбудители поля или функции, характеризующие разнородные среды и др. Информация Г сопровождается данными о базовых подобластях и влияет на вычислительные алгоритмы по преобразованию (методом  $R$ -функций) геометрической информации в аналитическую.

Информация Д о методах решения формирует «инструментальную базу», с помощью которой решается задача, и требует наличия больших сервисных возможностей. Она включает в себя информацию о методе, с помощью которого формируются матрицы, и о методе решения систем алгебраических уравнений или нахождения собственных чисел и собственных векторов. При этом каждый из указанных методов сопровождается определенной дополнительной информацией. Так, например, если задача решается с помощью метода Рунге, то для того чтобы сформировать матрицу системы Рунге, необходимо задать информацию о методе интегрирования по области (подобластях) и контуру (участках контура) в сопровождении соответствующих сеток, а также задать формулы для подынтегральных выражений, зависящих от вида основного уравнения, крайевых условий, их коэффициентов. Естественно, что эта информация влияет на все вычислительные алгоритмы.

Информация, определяющая выдачу результатов (и их оформление) на основе полученного решения, содержит данные о виде формул, о подобластях, в которых необходимо получить искомые величины, о методах интегрирования и сопровождающих их сетках (если среди расчетных характеристик есть интегральные), а также включает указания о том, в каком виде должны быть оформлены результаты (таблицы, картины линий уровня, аксонометрические рисунки). Эта информация влияет не только на вычислительные алгоритмы по оформлению результатов, но и на некоторые другие, имеющие с ними непосредственную связь.

Из приведенного выше модульного анализа постановки краевой задачи вытекает ряд требований к внешнему входному языку.

1. Максимальное приближение входного языка к обычным способам задания информации А — Е.
2. Простота языка в эксплуатации и доступность его освоения.
3. Исключение процесса программирования в обычном смысле этого слова.
4. Наличие в арсенале языка развитых сервисных возможностей.
5. Возможность отладки отдельных модулей, составленных пользователем, со всем рабочим комплексом программ ПС, включая проведение численных экспериментов.

6. Простота пополнения банка модулей новыми модулями и возможность использования других служебных (эксплуатационных) модулей.

Проблемной ориентацией ГП серии «Поле» [112] является решение краевых задач, в первую очередь для эллиптических уравнений с частными производными, в общем случае с переменными (элементарными или кусочно-элементарными) коэффициентами и правыми частями, без ограничений на тип краевых условий и геометрию области.

Организационно ГП «Поле» состоит из двух частей — функционального и системного наполнения.

Функциональное наполнение отражает специфику предметной области ГП и включает следующее.

1. Совокупность модулей, используемых при составлении рабочих программ для решения задач данной предметной области. В этой совокупности модулей есть банки: а) постоянных (универсальных) модулей, которые могут быть использованы для решения различных типов краевых задач; б) сменных (специализированных) модулей, предназначенных для решения определенных классов задач.

2. Набор стандартных схем счета, из которых состоит программа решения той или иной типовой задачи. Под этими схемами в ГП «Поле» подразумеваются вычислительные схемы: а) структур решений (см. гл. 3); б) преобразования геометрической информации в аналитическую (см. гл. 2); в) аппроксимирующих последовательностей; г) функциональных компонент и кортежных операций над ними [75]; (Функциональные компоненты представляют собой элементарные функции и их суперпозиции (см. § 4, гл. 1), присутствующие в постановке краевой задачи. Сюда относятся и те формулы, которые служат для описания геометрических компонент.) д) методов формирования матриц; е) методов решения алгебраических систем и нахождения собственных чисел и векторов; ж) методов интегрирования; з) оформления результатов и выполнения расчетов по заданным формулам; и) режимов работ ГП «Поле» (полное решение задачи от обработки входной информации до получения результатов, полное решение задачи и запоминание полученных матриц, проведение численных экспериментов с полученными ранее матрицами, получение результатов по введенным с перфокарт коэффициентам, закливание вычислительной схемы по заданному алгоритму).

Системное наполнение является административным органом ГП «Поле», отражающим дисциплину работы с ним. Системное наполнение включает такие компоненты.

1. Язык заданий (директив) как средство общения пользователя с ГП «Поле». Директивы ГП «Поле» подразделяются на основные, отладочные и служебные. К основным относятся: а) директивы, служащие для задания аналитической и геометрической информации (виды уравнений, краевых условий, форм областей и участков их границ); б) сервисные директивы, необходимые для задания стар-

товых параметров (характеристик) и проведения численных экспериментов. К отладочным директивам относятся те, с помощью которых производятся отладка программ для вновь подключаемой задачи (класса задач), подключение новых методов решения, сервисных алгоритмов и др. Служебные директивы необходимы для пополнения банка модулей ГП «Поле», информационных таблиц и выполнения других вспомогательных работ с ГП.

2. Архив, представляющий собой систему хранения элементов функционального наполнения и служебной информации в ГП «Поле». Он выполнен в виде библиотеки объектных и исходных модулей (универсальных, специализированных и системных), организация и работа с которыми осуществляется средствами модифицированной мониторной системы «Дубна».

3. Монитор — совокупность программных средств, обеспечивающих сервисные и операционные возможности ГП «Поле», которая состоит из таких частей; а) управляющей программы; б) транслятора входного языка, содержащего синтаксические анализаторы (дешифраторы), компиляторы (по входной информации) аналитических модулей, анализаторы ошибок; в) компоновщика рабочего комплекса программ, состоящего из компиляторов рабочего комплекса программ (с помощью мониторной системы «Дубна»); г) анализатора ошибок и полноты информации.

Описанная выше организация ГП «Поле» позволяет видоизменять входной язык в зависимости от категории пользователей, а именно: а) для разработчиков программного обеспечения входной язык определяется наличием всех директив с полным набором служебных и ключевых слов и числовых параметров, а также предоставлением возможности подключения отдельных модулей с перфокарт для их отладки и апробации; б) для пользователей — непрограммистов, ознакомленных с методами решения краевых задач, используемыми в ГП «Поле», входной язык представляет собой систему директив упрощенного вида; в) для специалистов, знакомых с математической постановкой краевых задач, но не знакомых с методами их решения, заложенными в ГП «Поле», входным языком будет одна из директив (или некоторая их часть), с помощью которой будут изменяться те или иные идентификаторы (функции) или числовые параметры, характеризующие соответственно форму области, краевые условия, возбудители поля и др.; г) пользователей — инженеров технического профиля, не знающих входного языка (директив) ГП «Поле», может быть подключен специальный входной язык в терминах, характерных для данной специальности, или в виде относительных параметров, изменяющихся в некоторой последовательности по желанию заказчика или по заданному алгоритму (например, алгоритму минимизации некоторого функционала избранным методом).

Подробное описание входного языка и эксплуатационных возможностей ГП «Поле» требует специального рассмотрения [67—71]. В данной работе ограничимся кратким разбором входного

языка с точки зрения разработчиков автоматизированных систем программирования и их пользователей.

Во-первых, каждая директива может включать следующее.

1. Ключевые слова: а) заголовки директив, которые отличаются друг от друга по типу входной информации; б) имена модулей, которые необходимо подключить к рабочему комплексу программ; в) идентификаторы аналитических выражений и идентификаторы, определяющие состав компонент, входящих в соответствующие аналитические выражения; г) указатели типа информации, к каким объектам она относится (например, сетки, формулы, правые и левые части расширенной матрицы и т. д.); д) указатели, относящиеся к базовым геометрическим объектам (например, треугольник, квадрат и т. д.); е) указатели, относящиеся к распечатке сигнальной информации и промежуточных результатов и др.

2. Разделительные символы, которые используются следующим образом: а) директивы отделяются друг от друга символом «;»; б) каждый заголовок директивы отделяется от основной ее части символом «:», применяемым после слов внутри директивы, за которыми следует перечень инструкций для их выполнения во время вычислительного процесса или числовая последовательность; в) идентификаторы, числа, аналитические выражения и некоторые другие элементы информации отделяются друг от друга запятыми («,»); г) некоторые группы информации отделяются друг от друга символом «|»; д) имена модулей и некоторые другие выражения заключаются в скобки вида «< >», «( )»; е) знак «—» (минус) используется при обязательном пояснении индексов (цифр); ж) общим символом окончания информации является директива «конец информации»; з) комментарий заключается в «звездочки» (\* ... \*); и) символ «пробел» ( ) может быть применен многократно в директивах для раздела идентификаторов и слов.

3. Аналитические выражения, с помощью которых могут быть заданы: а) функциональные компоненты в виде основных элементарных функций и их суперпозиций; б) логические формулы, определяющие формы областей и участки их границ; в) вид основных уравнений краевой задачи; г) формулы, определяющие элементы матриц; д) формулы, по которым необходимо получить результирующую информацию.

В аналитических выражениях могут быть (если они разрешены в данной директиве) арифметические, логические и другие операции, основные элементарные функции,  $R$ -функции, суперпозиции указанных операций и функций. операторы типа grad,  $\Delta$ ,  $\Delta\Delta$ ,

$$D(i, j) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x_1^i \partial x_2^j} \text{ и т. д.}$$

4. Управляющие и числовые параметры, назначение которых состоит в следующем: а) с помощью управляющих параметров могут быть заданы тип симметрии и максимальная степень аппроксимирующих последовательностей, варианты их «усечений» и усреднений результатов, дублирование результатов, управление печатью



и др., б) с помощью числовых параметров могут быть заданы сетки для интегрирования по области и контуру и для оформления результатов, координаты точек вершин (и соответствующие размеры) базовых геометрических объектов, коэффициенты неопределенных компонент структур, параметры, участвующие в вычислительном процессе в качестве физических и математических констант (например, модуль Юнга, константы  $R$ -операций и др.).

Во-вторых, директивами, в зависимости от несущей ими информации, можно задавать:

1. Вид уравнений.
2. Вид краевых условий и структур решений.
3. Логические формулы, определяющие вид формы областей и участков их границ.
4. Функциональные компоненты.
5. Аппроксимирующие последовательности.
6. Методы решения задач, определяющие вид формирования матриц.
7. Методы интегрирования и сопровождающие их сетки.
8. Методы решения систем алгебраических уравнений и задач на собственные значения.
9. Расчетные формулы и сервисные данные для выдачи результатов и их оформления.
10. Математические и физические константы.
11. Специальные операции ( $R$ -операции; «отсечек», т. е. выделения элементов чертежей; продолжения граничной информации внутрь области).
12. Список имен модулей, подключаемых с перфокарт.
13. Листинг модулей, подключаемых с перфокарт, и модулей, скомпилированных генератором.
14. Печать глобальных массивов (управляющих и числовых параметров, созданных ГП «Поле» по входной информации для рабочего комплекса программ).
15. Запоминание матриц по имени.
16. Чтение матриц по имени.
17. Ввод коэффициентов неопределенных компонент структур решений с перфокарт.
18. Распечатку сигнальной информации (при отладке).
19. Отказ печати директив или их частей.
20. Отмену на отказ печати директив или их частей.
21. Стартовые пробы.

При разработке ГП «Поле» по существу возникло два языка:

1. Входной язык (директивы), о котором вкратце было сказано выше, является языком высокого уровня для широкого круга пользователей.

2. Внутренний язык (язык разработчиков генераторов программ) ГП «Поле», с помощью которого осуществляются организация вычислительной схемы по заданному алгоритму и взаимодействие между модулями рабочего комплекса программ на базе

процедурного языка АЛГОЛ-ГДР. Основным элементом связи между модулями рабочего комплекса программ является *дифференциальный кортеж (диффкор)* [75] или массив дифференциальных кортежей. (О них вкратце будет сказано ниже.) Каждый дифференциальный кортеж может быть получен с помощью модулей, реализующих различные *кортежные операции*. Дифференциальные кортежи и кортежные операции над ними подчиняются законам *кортежной алгебры*, представляющей собой обобщение на многомерное пространство преобразования Тейлора — Пухова [103, 104].

Необходимость применения такого рода операций связана с тем, что ГП «Поле» в основном оперирует сложными аналитическими выражениями, количество которых возрастает с увеличением числа координатных («пробных») функций, и необходимо находить как значения самих функций, так и значения их производных до некоторого порядка.

Дадим определение и краткую характеристику свойств дифференциального кортежа. Пусть  $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Диффкором глубины  $N$  функции  $\varphi(x)$  в точке  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  назовем множество  $G$  элементов, представляющее упорядоченную совокупность значений функции  $\varphi(x)$  и ее всех частных производных до  $N$ -го порядка включительно, подсчитанных в точке  $x^0$ , с заданным приоритетом следования по аргументам  $x_1, \dots, x_n$ .

Например, для функции  $\varphi(x_1, x_2)$  дифференциальный кортеж глубины два в точке  $(x_1^0, x_2^0)$  есть строка

$$\left\{ \varphi(x_1^0, x_2^0), \frac{\partial \varphi(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 \varphi(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 \varphi(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 \varphi(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2} \right\}.$$

Множеству элементов диффкора ставится в соответствие множество строк целых чисел  $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , которое однозначно определяет позицию каждого элемента диффкора и обеспечивает возможность прямого к нему доступа. Здесь  $i_1$  означает порядок дифференцирования по  $x_1$ ,  $i_2$  — порядок дифференцирования по  $x_2$  и т. д. При этом область значений индексов  $i_1, \dots, i_m$  определяется из неравенства

$$i_1 + \dots + i_m \leq N. \quad (4.1)$$

Рассмотрим диффкор

$$\varphi; \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}}_1; \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m^2}}_2; \dots; \dots; \dots; \underbrace{\dots; \dots, \frac{\partial^N \varphi}{\partial x_m^N}}_N. \quad (4.2)$$

Для диффкора назовем несколько важных характеристик:  $m$  — размерность пространства, в котором строится диффкор (базис);  $t$  — текущий порядок дифференцирования;  $N$  — максимальный порядок дифференцирования (количество дифференциальных тензоров);

$l_t$  — длина дифференциальных тензоров диффкора по каждому  $t$ ;  $L_N$  — общая длина диффкора,

$$t = 0, 1, \dots, N; \quad l_t = \frac{(m+t-1)!}{t!(m-1)!}; \quad (4.3)$$

$$L_N = \sum_{t=0}^N l_t = \frac{(m+N)!}{N!m!}.$$

В объектной программе компоненты диффкора (4.2) представляются в виде  $L_N$  упорядоченных вещественных чисел, которые хранятся в смежных ячейках памяти ЭВМ. Строку (4.2) — диффкор — можно рассматривать как отдельный объект, из которого можно извлекать отдельные элементы, благодаря введенной системе индексирования.

Адрес (порядковый номер) компоненты  $(i_1, \dots, i_m)$  диффкора определяется с помощью формулы

$$I \left[ \frac{\partial^t \varphi}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} \right] = 1 + \sum_{r=1}^m \frac{1}{r!} \left\{ \prod_{s=1}^r \left[ \left( \sum_{k=1}^r i_{m-k+1} \right) + s - 1 \right] \right\}. \quad (4.4)$$

Дифференциальные кортежи с одинаковыми характеристиками ( $m$ ,  $N$ ) могут быть объединены в массивы диффкоров по известным правилам образования массивов [120]. При программировании каждому диффкору или массиву диффкоров ставится в соответствие имя. Имя — идентификатор, который относится к диффкору или массиву диффкоров. Для обращения к элементу массива используется имя с индексами, т. е. такое имя, за которым следует список (в квадратных скобках) индексов, например:

$$f[k], \text{ ПСИ}[j], U[l, n].$$

Введем понятие операции над диффкорами. Пусть даны два диффкора  $\Psi$  и  $\Phi$  с одинаковыми базисами и длинами  $N_1$  и  $N_2$  соответственно. В результате операции над диффкорами  $\Psi$  и  $\Phi$  будет получен новый диффкор  $F$  с базисом  $m$  и длиной  $N_3$ , где  $N_3 = \min(N_1, N_2)$ .

**Определение.** Закон, по которому из данных диффкоров (одного или нескольких) получается новый диффкор, называется *кортежной операцией над диффкорами*.

Кортежные операции могут быть одноместными, двухместными и т. д. в зависимости от числа диффкоров, участвующих в кортежной операции.

Пусть задана суперпозиция

$$v = f(u_1, \dots, u_n); \quad f, u_i \in \mathfrak{M}(H), \quad (4.5)$$

где  $u_i = u_i(x_1, \dots, x_m)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и каждое  $u_i$  представлено своим диффкором:

$$U_i = \left\{ u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^N u_i}{\partial x_m^N} \right\} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4.6)$$

Тогда, чтобы получить диффкор  $V$  для функции  $v$ , необходимо провести цепочку кортежных операций, определяемую видом суперпозиции (4.5), над заданными диффкорами (4.6).

Кортежные операции в ГП «Поле» реализуются с помощью постоянных (универсальных) модулей: а) арифметических операций; б) основных элементарных функций; в) специальных дифференциальных операторов ( $D_k, T_k$  и др.) и систем  $R$ -операций; г) операций сдвига дифференциальных кортежей и др.

Кроме того, с помощью диффкоров осуществляется связь с модулями, которые преобразуют граничную и геометрическую информацию в аналитическую, и с другими модулями.

Вычислительные схемы в ГП «Поле» формируются с помощью вычислительных алгоритмов, реализованных в различных сменных (специализированных и постоянных) модулях или с помощью управляющих параметров (числовых).

В качестве организации вычислительной схемы с помощью управляющих параметров рассмотрим алгоритм модуля, реализующего преобразование геометрической информации в аналитическую с использованием набора («цепочки») кортежных операций. Последовательность, в которой выполняются эти операции, определяется директивой.

Так, например, в директиве может быть задана логическая формула, определяющая форму области или участок ее границы, в виде

#### ЛОГИКА ФОРМ ОБЛАСТЕЙ:

$$W5 = (((F1 \wedge F2) \times (F3 \vee F4)) / F6) + F7, \quad (4.7)$$

где  $W5$  — идентификатор, определяющий логическую формулу,  $F_i$  — идентификаторы, определяющие опорные функции (представляющие собой основные элементарные функции или их суперпозиции),  $i$  — индекс (номер) опорной функции; « $\wedge$ » —  $R$ -конъюнкция, « $\vee$ » —  $R$ -дизъюнкция; « $\neg$ » (надчерк) —  $R$ -отрицание, « $+$ », « $\times$ », « $/$ » — арифметические операции (сложение, умножение и деление).

Транслятор входного языка (в частности, синтаксический анализатор «ЛОГИКА») после анализа и декодирования выражения (4.7) сформирует управляющие параметры (шестикомпонентные векторы) в виде последовательности чисел, определяющие закон следования кортежных операций и над какими дифференциальными кортежами они выполняются, в таком порядке:

$$\underbrace{11 - 1 - 128}_1 \quad \underbrace{131 \ 149}_2 \quad \underbrace{18 - 4 - 198}_3 \quad \underbrace{18 - 5168}_4 \quad \underbrace{18 - 2178}_5. \quad (4.8)$$

Из примера (4.7) получено пять шестикомпонентных векторов. Количество векторов определяется количеством открывающихся скобок в выражении (4.7). Каждый вектор определяет двухместную кортежную операцию над диффкорами функций. В данном примере с помощью каждого вектора модулем будут выполнены такие кортежные операции: а) с помощью первого вектора —  $R$ -конъюнкция над  $F1$  и  $-F2$ ; результат будет сформирован в  $F8$  (рабочем диффкоре); б) с помощью второго вектора —  $R$ -дизъюнкция над  $F3$  и  $F4$ ; результат будет сформирован в  $F9$  (рабочем диффкоре); в) с помощью третьего вектора — умножение  $F8$  на  $-F9$ ; результат сформирован в  $F8$ ; г) с помощью четвертого вектора — деление  $F8$  на  $F6$ ; результат сформирован в  $F8$ ; д) с помощью пятого вектора — сложение  $F8$  с  $F7$ ; результат — в  $W5$ .

Компоненты рассмотренных векторов определяют следующее: 1 — признак  $R$ -отрицания для первой из функций («-1» — есть отрицание, «1» — нет отрицания); 2 — номер первой функции; 3 — признак кортежной операции («1» —  $R$ -дизъюнкция; «-1» —  $R$ -конъюнкция; «-2» — сложение; «-3» — вычитание; «-4» — умножение; «-5» — деление; «-6» — извлечение квадратного корня; «-7» — нормализация по формуле (2.274)); 4 — признак  $R$ -отрицания второй функции; 5 — номер второй функции; 6 — номер рабочей функции. Если кортежная операция одноместная, то на месте четвертой и пятой компонент вектора стоят нули.

Изложенные выше идеи положены в основу как уже реализованных, так и создаваемых версий генераторов программ серии «Поле». Более детально с вопросами в этой области можно ознакомиться по работам [67—71, 112].

## § 2. Пример решения с помощью ГП «Поле-3» краевой задачи для уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами

Рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( e^{xy} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (x^2 + y^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial y} \right] - u = v_1, \quad (4.9)$$

где

$$v_1 = e^x [e^{xy} (y^2 + xy + x + 2y + 2) + y - x],$$

в области  $\Omega$ , изображенной на рис. 134 (эта область ограничена синусоидой  $y = \sin \left[ \frac{\pi}{2} (x - 2) \right]$  и отрезками прямых). Краевое условие Дирихле имеет вид

$$u|_{\partial\Omega} = \Phi_i = R_i \quad (i = 1, \dots, 5) \quad \text{на } \Gamma_i, \quad (4.10)$$

где

$$R_1 = (x + y) e^x; \quad R_2 = \frac{y-2}{7,389}; \quad R_3 = 7,389(2 + y); \quad (4.11)$$

$$R_4 = (x + 3) e^x; \quad R_5 = (3 + 0,5x) e^x.$$

В качестве опорных областей выберем полуплоскости

$$\Sigma_2 = \left[ F_2 \equiv \frac{1}{4} (4 - x^2) \geq 0 \right]; \quad \Sigma_3 = (F_3 \equiv 3 - y \geq 0);$$

$$\Sigma_4 = \left[ F_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{5}} (6 - x - 2y) \geq 0 \right]; \quad \Sigma_5 = (F_5 \equiv x + 2 \geq 0); \quad (4.12)$$

$$\Sigma_6 = (F_6 \equiv 2 - x \geq 0)$$

и область

$$\Sigma_1 = \left\{ F_1 \equiv y - \sin \left[ \frac{\pi}{2} (x - 2) \right] \geq 0 \right\}, \quad (4.13)$$

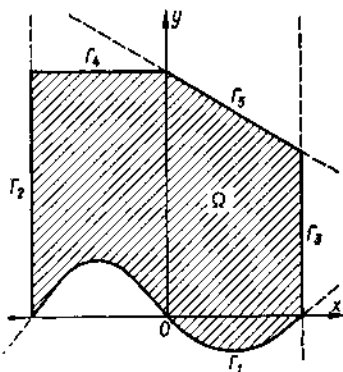


Рис. 134.

расположенную выше синусоиды. Функции  $F_i$  будут использованы для построения уравнения  $\omega = 0$  границы  $\partial\Omega$  и склейки граничных значений (4.10). Поскольку область  $\Omega$  может быть представлена как пересечение областей  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  и  $\Sigma_4$ , функция  $\omega$  может быть построена в виде

$$\omega \equiv (F_2 \wedge_0 (F_1 \wedge_0 (F_3 \wedge_0 F_4))). \quad (4.14)$$

Для решения данной задачи методом Ритца генератору программ «Поле-3» зададим следующую инструкцию:

1. РЕШИТЬ КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ:
2.  $D(1,0) (E1D(1,0) U) + D(0,1) (E2D(0,1) U) - U = V (V1 \text{ В } W3);$
3. С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ:
4.  $UD2 = \Phi (B0 = P1, W1/\Phi1 = R1 \text{ НА } W2, R2 \text{ НА } W3, R3 \text{ НА } W4, R4 \text{ НА } W5, R5 \text{ НА } W6);$
5. ЛОГИКА ФОРМ ОБЛАСТЕЙ:
6.  $W2 = F1, W3 = F5, W4 = F6, W5 = F3, W6 = F4,$
7.  $W7 = ((F2 \wedge (F7 \wedge (F3 \wedge F4))) \wedge (F8 \vee (F9 \vee (F10 \vee \vee F11))))),$
8.  $W8 = F12,$
9.  $W1 = (F2 \wedge (F1 \wedge (F3 \wedge F4)));$
10. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ КОМПОНЕНТЫ:
11.  $F1 = Y - \sin(1.570796327 * (X - 2)),$
12.  $D(1,0) F1 = -1.570796327 * \cos(1.570796327 * (X - 2)),$   
 $D(0,1) F1 = 1,$
13.  $F2 = (4 - X * X)/4, D(1,0) F2 = -X/2, D(0,1) F2 = 0,$
14.  $F3 = 3 - Y, D(1,0) F3 = 0, D(0,1) F3 = -1,$
15.  $F4 = (6 - X - Y - Y)/\text{SQRT}(5), D(1,0) F4 = -1/\text{SQRT}(5),$   
 $D(0,1) F4 = -2/\text{SQRT}(5),$
16.  $F7 = Y - \sin(1.570796327 * (X - 2)),$
17.  $F5 = X + 2, D(1,0) F5 = 1, D(0,1) F5 = 0,$
18.  $F6 = 2 - X, D(1,0) F6 = -1, D(0,1) F6 = 0,$

19.  $F8 = 0.0001 - (X - 2) ** 2 - Y * Y$ ,  $F9 = 0.0001 - (X - 2) ** 2 - (Y - 2) ** 2$ ,
20.  $F10 = 0.0001 - X * X - (Y - 3) ** 2$ ,  $F11 = 0.0001 - (X + 2) ** 2 - (Y - 3) ** 2$ ,
21.  $F12 = (X + Y) * EXP(X)$ ,
22.  $V1 = EXP(X) * (EXP(X * Y) * (Y * (Y + X + 2) + X + 2) + Y - X)$ ,
23.  $E1 = EXP(X * Y)$ ,  $D(1,0) E1 = Y * F[1]$ ,  $D(0,1) E1 = X * F[1]$ ,
24.  $E2 = X * X + Y * Y + 1$ ,  $D(1,0) E2 = X + X$ ,  $D(0,1) E2 = Y + Y$ ,
25.  $G1 = 1$ ,
26.  $G3 = 100$ ,
27.  $G2 = (X + Y) * EXP(X) + 10 - 11$ ,
28.  $R1 = (X + Y) * EXP(X)$ ,  $D(1,0) R1 = EXP(X) * (1 + X + Y)$ ,  $D(0,1) R1 = EXP(X)$ ,
29.  $R2 = (-2 + Y) / 7.389056099$ ,  $D(1,0) R2 = 0$ ,  $D(0,1) R2 = 1 / 7.389056099$ ,
30.  $R3 = (2 + Y) * 7.389056099$ ,  $D(1,0) R3 = 0$ ,  $D(0,1) R3 = 7.389056099$ ,
31.  $R4 = (X + 3) * EXP(X)$ ,  $D(1,0) R4 = (X + 4) * EXP(X)$ ,  $D(0,1) R4 = 0$ ,
32.  $R5 = (3 + X/2) * EXP(X)$ ,  $D(1,0) R5 = (3.5 + X/2) * EXP(X)$ ,  $D(0,1) R5 = 0$ ;
33. АППРОКСИМИРОВАТЬ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ КОМПОНЕНТЫ:
34.  $P1$  — ФУНКЦИЕЙ ВИДА (1), ГДЕ
35.  $I$  —  $\langle \text{SPLINE} \rangle$  С ПАРАМЕТРАМИ (3,  $B$ ,  $B$ , 23, 23)
36. В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ  $(-2, -1, 2, 3)$ ;
37. ИНТЕГРИРОВАТЬ: ОБЛАСТЬ —  $\text{INSPL1 } W7$  С
38. СЕТКОЙ  $(-2, -1, 2, 3, 5)$ ;
39. ПРИМЕНИТЬ ОПЕРАЦИЮ:  $R1$ ;
40. КОНСТАНТЫ:  $(0, 0, 0)$ ;
41. СФОРМИРОВАТЬ МАТРИЦУ, ГДЕ:
42. ЛЕВАЯ ЧАСТЬ — ИНТЕГРАЛЫ ПО ОБЛАСТИ ОТ ВЫРАЖЕНИЯ
43.  $\langle E1 \times D(1,0) U1I \times D(1,0) U1J + E2 \times D(0,1) U1I \times D(0,1) U1J + U1I + U1J \rangle$ ,
44. ПРАВАЯ ЧАСТЬ МАТРИЦЫ — ИНТЕГРАЛЫ ПО ОБЛАСТИ ОТ ВЫРАЖЕНИЯ
45.  $\langle -(E1 \times D(1,0) U0 \times D(1,0) U1J + E2 \times D(0,1) U0 \times D(0,1) U1J + U0 \times U1J + V \times U1J) \rangle$ ;
46. ОБРАБОТКА:  $\text{SIMUL}$  (НАПЕЧАТАТЬ: КОЭФФ);
47. ВИД ФОРМЫ РЕЗУЛЬТАТА:
48. ТАБЛ/СЕТКА (1) ДЛЯ ФОРМУЛ (1, 2, 3, 4, 5)/,
49. СЕТКИ:  $I$  —  $(-2, -1, 3, 0, 0, 1, 0, 1) B W7$ ,
50. ФОРМУЛЫ:  $\Phi1 = U$ ,  $\Phi2 = D(1,0) U$ ,  $\Phi3 = D(0,1) U$ ,  $\Phi4 = G3 \times (\Phi1 - G2) / G2$ ,  $\Phi5 = G2$ ;
51. КОНЕЦ ИНФОРМАЦИИ.

По приведенной выше директиве ГП «Поле-3» сформирует отлаженную программу решения данной задачи, выполнит счет и выдаст указанную в директиве информацию: напечатает коэффициенты, полученные в результате решения системы Рунца (директива 46), выдаст значения искомой функции, ее первых частных производных и относительную ошибку, полученную путем сравнения полученных значений  $U$  с точным решением  $G2$  (директивы 47—50).

Обратим внимание на то, что в директиве присутствуют некоторые функции (например,  $F7 - F12$ ), которых нет в постановке задачи. Они имеют вспомогательный характер — с их помощью исключаются малые окрестности угловых точек при интегрировании (во избежание возможного переполнения ячеек). Этой же цели служит добавка  $10^{-11}$  к точному решению (директива 27). Однако, несмотря на эти «технологические» моменты, изучение инструкций по эксплуатации ГТ «Поле-3» и приобретение навыков занимают лишь одну-две недели у человека, имеющего математическую подготовку на уровне программ вузов.

### § 3. Расчет стационарных температурных полей

Применению метода  $R$ -функций к расчету температурных полей посвящены работы [134—141, 160—164 и др.].

1. Рассмотрим краевую задачу для двумерного уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  в области  $\Omega$  (рис. 135, а) со смешанными краевыми условиями:

$$u|_{AOC} = \varphi_1; \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{ABC} = q_1, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{DEF} = q_2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{DF} = q_3; \quad (4.16)$$

где

$$q_1 = 4a^2 [1 - 8a^{-4} (a^2 - x_2^2) x_2^2];$$

$$q_2 = 4b^2 [1 - 8b^{-4} (b^2 - x_2^2) x_2^2];$$

$$q_3 = 4h (h^2 - 3x_1^2); \quad \varphi_1 = x_1^4. \quad (4.17)$$

Условия (4.16) с точностью до знака являются условиями на производные по нормали  $\nu$  к  $\partial\Omega$ , поэтому их можно заменить одним условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \begin{cases} -q_1 & \text{на } ABC; \\ q_2 & \text{на } DEF; \\ -q_3 & \text{на } DHF \end{cases} \quad (4.18)$$

( $\nu$  — внутренняя нормаль к  $\partial\Omega$ ).

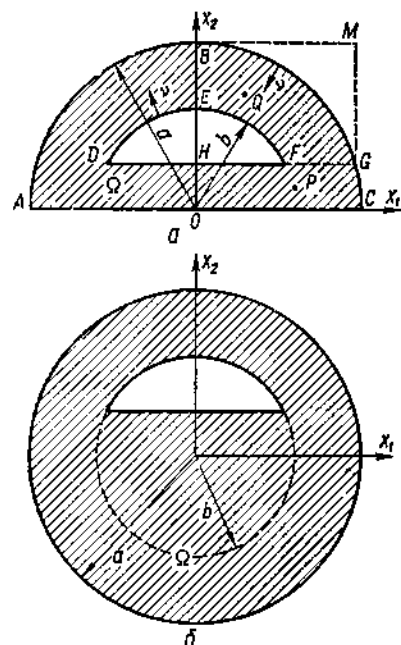


Рис. 135.



Известно точное решение поставленной задачи:

$$u_T = x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2x_2^2. \quad (4.19)$$

Пусть  $\omega_1 = 0$  — уравнение прямой  $AOC$ , а  $\omega_2 = 0$  — нормализованное уравнение  $\partial\Omega \setminus AOC$ . В качестве функции  $\omega_1$  можно взять  $\omega_1 \equiv x_2$ . Для построения уравнения  $\omega_2 = 0$  выберем опорные функции

$$\sigma_1 \equiv \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad (\text{нормализованное уравнение}$$

окружности радиуса  $a$  с центром в начале координат);

$$\sigma_2 \equiv \frac{1}{2b}(b^2 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad (\text{нормализованное уравнение}$$

окружности радиуса  $b$  с центром в начале координат);

$$\sigma_3 \equiv h - x_2 = 0 \quad (\text{нормализованное уравнение прямой } DHF).$$

Соответственно  $\Sigma_1 = (\sigma_1 \geq 0)$  и  $\Sigma_2 = (\sigma_2 \geq 0)$  — круги радиусов  $a$  и  $b$ , а  $\Sigma_3 = (\sigma_3 \geq 0)$  — полуплоскость, расположенная ниже прямой  $DHF$ . В качестве уравнения  $\omega_2 = 0$  можно взять уравнение границы области  $\Omega_2$  (рис. 135, б), которая определяется следующей логической формулой:

$$\Omega_2 = \Sigma_1 \wedge (\bar{\Sigma}_2 \vee \Sigma_3). \quad (4.20)$$

Следуя правилу, описанному в § 10 гл. 2, получаем

$$\omega_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2 - x_2^2) \wedge_0 \left\{ \frac{1}{2b}(x_1^2 + x_2^2 - b^2) \vee_0 (h - x_2) \right\} = 0. \quad (4.21)$$

Такой выбор функции  $\omega_2$ , которая равна нулю не только на  $\partial\Omega_2 = \partial\Omega \setminus AOC$ , но и на нижней половине окружности радиуса  $a$ , возможен в связи с тем, что нас интересует поле лишь в области  $\Omega$ . Поведение функции  $\omega_2$  вне этой области, вообще, безразлично.

Для склейки граничных значений нормальной производной (4.18) введем вспомогательные функции

$$\begin{aligned} L_1 &= x_2; \\ L_2 &= x_2 - h; \\ L_3 &= b^2 - x_1^2 - x_2^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Пусть

$$S_i = \begin{cases} \sqrt{\sigma_i^2 \vee_0 \bar{L}_i}, & L_i \leq |\sigma_i|; \\ |\sigma_i| \sqrt{2L_i [(-\sigma_i^2) \vee_0 L_i]^{-1}}, & L_i > |\sigma_i|. \end{cases} \quad (4.23)$$

(Нижняя строчка (4.23) получается из верхней путем тождественных преобразований и не имеет неопределенностей в производных от  $S_i$ .) Тогда согласно (2.282)  $S_1 = 0$  будет уравнением дуги  $ABC$ ,  $S_2 = 0$  — дуги  $DEF$ , а  $S_3 = 0$  — отрезка  $DF$ . Применяя извест-

ную формулу «склейки» (3.8), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega_1} = \psi \Big|_{\partial \Omega_1} = \left( -\frac{q_1}{S_1} + \frac{q_2}{S_2} - \frac{q_3}{S_3} \right) \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \right)^{-1} \Big|_{\partial \Omega_1}. \quad (4.24)$$

Для решения данной задачи можно использовать структуру решения (3.318):

$$u = \omega_1 \Phi_1 + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} [\psi + \omega_2 \Phi_2 - D_1^{(2)}(\omega_1 \Phi_1) - D_1^{(2)}\psi] + \varphi, \quad (4.25)$$

где

$$D_1^{(2)} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Задача решалась с помощью ГП «Поле-3» методом Ритца. В качестве аппроксимирующего полинома для неопределенной компоненты  $\Phi_1$  выбран полином 11 степени, а функция  $\Phi_2$  полагалась тождественно равной нулю. Ввиду четности краевых условий, как функций  $x_1$ , и симметрии области  $\Omega$  относительно оси  $Ox_2$  достаточно было взять лишь четные по  $x_1$  члены аппроксимирующего полинома и вычислять коэффициенты матрицы Ритца, интегрируя лишь по правой половине области  $\Omega$ . Для вычислений использована 256-точечная квадратурная формула ( $16 \times 16$ ) Гаусса по двум областям:  $OCCGH$  и  $HGMB$  (эти прямоугольники автоматически «деформировались» в областях  $OCCGH \setminus \Omega$  и  $HGMB \setminus \Omega$  с соответствующей перестройкой весовых коэффициентов, и, таким образом, в правой половине области  $\Omega$  было размещено 512 точек интегрирования). Заметим, что в директиве ГП «Поле-3», кроме приведенных выше формул, для решения данной задачи сообщались лишь краткие команды: «МЕТОД РИТЦА», «ПОЛИНОМ СТЕПЕННОЙ 4ЧВ» (4ЧВ означает, что берутся четные степени по  $x_1$  и все — по  $x_2$ ) и т. п.

Результаты решения ГП «Поле-3» оформляет в виде таблиц, картин линий уровня (на широкой печати), выдает другие характеристики, производит сравнение полученных результатов с точным и так далее — в соответствии с директивой. При этом результаты могут оформляться для различных вариантов буквенных параметров. Ниже приведены результаты приближенного и точного решений данной задачи в том виде, в каком они оформляются ГП «Поле-3»:

$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u$	$\delta$
$a = 1, b = 0,65, h = 0,45$				
0,700	0,225	0,0938	0,0862	1,16%
0,500	0,650	-0,392	-0,386	0,69%
$a = 1, b = 0,75, h = 0,45$				
0,700	0,225	0,0938	0,0848	1,37%
0,500	0,750	-0,465	-0,505	4,00%

	$a = 1, b = 0,85, h = 0,45$				
0,700	0,225	0,0938	0,0883	0,83%	
0,500	0,850	-0,499	-0,546	4,68%	

	$a = 1, b = 0,7, h = 0,3$				
0,700	0,300	-0,0164	-0,0189	0,38%	
0,500	0,700	-0,432	-0,458	2,52%	

	$a = 1, b = 0,55, h = 0,45$				
0,700	0,225	0,0938	0,0982	0,68%	
0,500	0,775	-0,478	-0,441	3,69%	

Для простоты взяты две точки —  $P$  и  $Q$  (см. рис. 135,  $a$ ), а также введено обозначение для «относительной нормализованной погрешности»  $\sigma = |u_T - u| \cdot \|u_T\|^{-1} \times 100$ .

Возможность изменять буквенные параметры в рамках одной директивы для ГП «Поле-3» предоставляет пользователю дополнительное удобство. Кроме того, изменение буквенных параметров может производиться целенаправленно, например, при минимизации некоторого функционала  $I(u)$  заданным методом (наискорейшего спуска, случайного поиска и т. д.).

В рассмотренном примере получена сравнительно невысокая точность приближения. Для достижения более высокой точности потребовалось бы взять полиномы более высокой степени и повысить точность интегрирования (этому соответствует изменение в директиве ГП «Поле» нескольких чисел). Однако это потребовало бы больших затрат машинного времени.

2. Рассмотрим стационарное температурное поле  $u(x_1, x_2)$  в области  $\Omega$  (рис. 136,  $a$ ), удовлетворяющее уравнению

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) = 0 \quad (4.26)$$

при граничных условиях

$$\left( -\frac{\partial u}{\partial \nu} + h^{(2)}(x)u \right) \Big|_{\partial\Omega} = h^{(1)}(x) \Big|_{\partial\Omega}, \quad (4.27)$$

где

$$h^{(i)}(x) = \begin{cases} h_1^{(i)} & \text{на } CD; \\ h_2^{(i)} & \text{на } EFG; \\ 0 & \text{на } GABC \cup ED \end{cases} \quad (4.28)$$

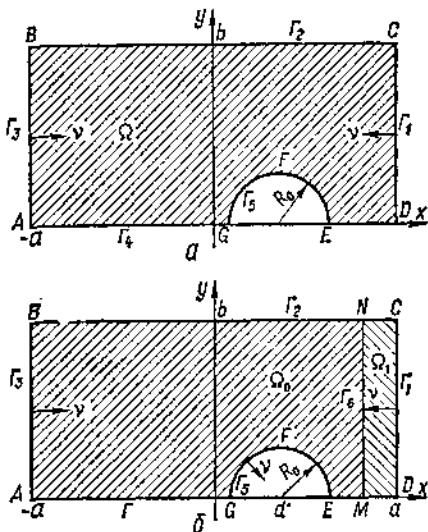


Рис. 136

( $i = 1, 2$ , а  $\nu$  — направление внутренней нормали). Если область состоит из двух подобластей —  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  (рис. 136, б) — с различными коэффициентами теплопроводности, то к граничным условиям (4.27) добавляются условия на границе раздела сред (в данном случае на прямой  $MN$ ):

$$u_0|_{MN} = u_1|_{MN}, \quad \lambda_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \Big|_{MN} = \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{MN}, \quad (4.29)$$

где  $u = u_0$  в  $\Omega_0$  и  $u = u_1$  в  $\Omega_1$ . Геометрические размеры подобластей указаны на рис. 136,  $h^{(2)} = \frac{\alpha}{\lambda}$ ,  $h^{(1)} = h^{(2)} t$ ,  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи,  $t$  — температура окружающей среды ( $\alpha$  и  $t$  — функции, заданные на  $\partial\Omega$ ).

Учитывая результаты § 13 гл. 3, структуру решения задачи (4.26), (4.27), (4.29) представим в виде

$$u(x) = \omega \Phi^{(i)}(\varphi, x_2) + \sum_{i+j=0}^m C_{ij} \chi_{ij}(\varphi, x_2), \quad (4.30)$$

где

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 + \beta(x_1, x_2);$$

$$\beta(x_1, x_2) = (\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 + \lambda_1)^{-1} \frac{\partial \omega_6}{\partial x_1} | \omega_6 | \omega^2 (\omega_6^2 + \omega^2)^{-1};$$

$$\Phi^{(i)}(x_1, x_2) = \frac{(h_1^{(i)} \omega_3 + \omega_1 h_2^{(i)}) \omega_2^* \omega_3}{\omega_2^* \omega_3 \omega_6 + \omega_1 \omega_3 \omega_5 + \omega_1 \omega_2^* \omega_6 + \omega_1 \omega_2^* \omega_3} \quad (i = 1, 2);$$

$$\omega(x_1, x_2) = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 f_3; \quad f_1 \equiv \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2); \quad f_2 \equiv \frac{1}{b} (bx_2 - x_2^2);$$

$$f_3 \equiv \frac{1}{2R_0} [(x_1 - d)^2 + x_2^2 - R_0^2]; \quad \omega_1 \equiv a + x_1; \quad \omega_2 \equiv b - x_2;$$

$$\omega_3 \equiv a - x_1; \quad \omega_4 \equiv x_2; \quad \omega_5 \equiv bx_2 - x_2^2; \quad \omega_6 \equiv (x_1 - d)^2 + x_2^2 - R_0^2;$$

$$\omega_6 \equiv x_1 - p; \quad \chi_{ij} = \varphi_{ij} + \omega [-D_1 \varphi_{ij} + \varphi_{ij} \Phi^{(2)}].$$

Здесь

$$\varphi_{ij} = P_i(a_1 x_1 + b_1) P_j(a_2 x_2 + b_2),$$

где  $P_k(x)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) — полиномы Чебышева;  $a_1 = a^{-1}$ ;  $a_2 = 2b^{-1}$ ;  $b_1 = 0$ ;  $b_2 = -1$ .

Заметим, что если  $\lambda_0 = \lambda_1$ , то  $\beta(x_1, x_2) \equiv 0$  и структура решения (4.30) превращается в обычную структуру решения (3.306), учитывающую краевое условие третьего типа. (Характерной особенностью структуры (4.30), отличающей ее от других структур, учитывающих условия стыковки на границе двух сред, является замена лишь одного аргумента  $x_1$  на  $x_1 + \beta$ . Второй аргумент можно не изменять, учитывая, что линия раздела  $MN$  — прямая.)

Для нахождения неопределенных постоянных был применен метод Ритца, который в данной случае приводит к минимизации

функционала

$$I(u) = \lambda_0 \int_{\Omega_0} [(\nabla u)^2 - 2Fu] d\Omega + \lambda_1 \int_{\Omega_1} [(\nabla u)^2 - 2Fu] d\Omega + \\ + \lambda_0 \int_{CB} h_1^{(2)} u^2 d\Gamma + \lambda_1 \int_{EFG} h_2^{(2)} u^2 d\Gamma, \quad (4.31)$$

где  $F = -\Delta [\omega\Phi^{(1)}(x_1, x_2)]$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$ . Соответствующая система Ритца имеет вид

$$\sum_{i+j=0}^m C_{ij} \left\{ \lambda_0 \int_{\Omega_0} (\nabla\chi_{ij}, \nabla\chi_{ks}) d\Omega_0 + \lambda_1 \int_{\Omega_1} (\nabla\chi_{ij}, \nabla\chi_{ks}) d\Omega_1 + \right. \\ \left. + \lambda_0 h_1^{(2)} \int_{CB} \chi_{ij} \chi_{ks} d\Gamma + \lambda_1 h_2^{(2)} \int_{EFG} \chi_{ij} \chi_{ks} d\Gamma \right\} = \\ = - \sum_{m=0}^1 \lambda_m \int_{\Omega_m} (\nabla\omega\Phi^{(1)}, \nabla\chi_{ks}) d\Omega_m + h_1^{(1)} \int_{CB} \chi_{ks} d\Gamma + h_2^{(1)} \int_{EFG} \chi_{ks} d\Gamma. \quad (4.32)$$

Результаты расчета температурного поля при  $\lambda_0 = \lambda_1$  представлены на рис. 137, а при  $\lambda_0 \lambda_1^{-1} = 10$  — на рис. 138. При этом взяты следующие значения геометрических и теплофизических величин:  $a = 0,21$  м,  $b = 0,12$  м,  $d = 0,086$  м,  $\rho = 0,36$  м. Кроме того, для рис. 137, а —  $R_0 = 0,074$ ,  $t_1 = 388$ ,  $t_5 = 200$ ;  $\alpha_1 = 520$ ; для рис. 137, б —  $R_0 = 0,074$ ,  $t_1 = 800$ ,  $t_5 = 50$ ,  $\alpha_1 = 200$ ; для рис. 137, г —  $\lambda = 10$ ,  $\alpha_5 = 150$ ; для рис. 138, б —  $\lambda_0 = 10$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\alpha_5 = 1500$ ; для рис. 138, а —  $R_0 = 0,037$ ,  $t_1 = 388$ ,  $t_5 = 200$ ,  $\alpha_1 = 520$ ,  $\alpha_5 = 40$ ,  $\lambda = 38$  ( $R_0$  — в м,  $t$  — в  $^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha$  — в  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ,  $\lambda$  — в  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ .)

В табл. 8 приведены значения для изотерм, изображенных на рис. 137, 138.

3. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области  $\Omega$  (рис. 139, а), имеющей форму бесконечного

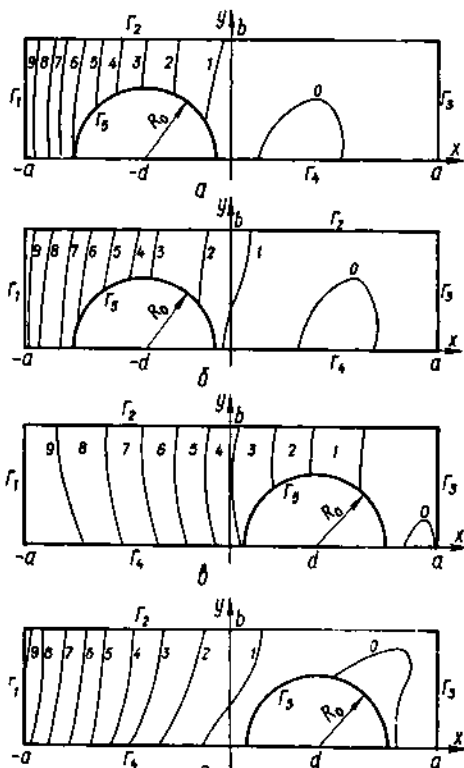


Рис. 137.

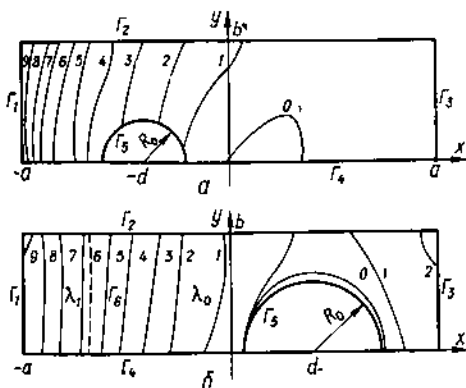


Рис. 138.

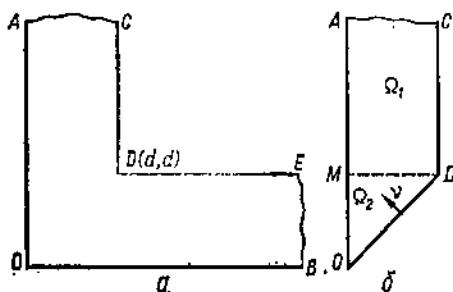


Рис. 139.

уголка, при условии, что линии  $AOB$  и  $CDE$  являются изотермами:

$$u|_{AOB} = 1000, \quad u|_{CDE} = 0. \quad (4.33)$$

Нетрудно заметить, что температурное поле на большом расстоянии от точек  $O$  и  $D$  будет таким, как между двумя параллельными бесконечными изотермами. Другими словами, если считать, что отрезки  $AC$  и  $BE$  расположены далеко от  $O$  и  $D$ , то вдоль  $AC$   $u \approx 1000(1 - x_1 a^{-1})$ , а вдоль  $BE$   $u \approx 1000(1 - x_2 a^{-1})$ .

В данном случае область  $\Omega$  обладает симметрией относительно прямой  $OD$ . Это позволяет рассмотреть поле в половине области (рис. 139, б), которую представим в виде соединения двух областей —  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Для решения задачи применим регионально-структурный метод (см. § 19 гл. 3).

Структуру решения задачи представим в виде

$$u = \begin{cases} u_1 \equiv 1000(1 - x_1 a^{-1}) + v_1, & x \in \Omega_1; \\ u_2 \equiv 1000(1 - x_1 a^{-1}) + v_2, & x \in \Omega_2. \end{cases} \quad (4.34)$$

При этом на границе  $MD$  контакта областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  должны выполняться условия сопряжения

$$u_1 = u_2; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \quad (4.35)$$

Таблица 8

Рисунок	Изотерма									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
137, а	205,8	217,6	229,4	241,3	253,1	264,9	276,7	288,5	300,3	312,1
137, б	327,0	330,9	335,1	339,3	343,5	347,7	351,3	356,1	360,3	364,6
137, в	301,7	309,0	316,5	324,7	332,5	340,4	348,2	356,1	368,9	371,8
137, г	56,05	105,9	165,9	225,8	285,7	345,6	405,5	465,4	525,3	585,2
138, а	356,0	357,1	360,2	362,3	364,5	366,6	368,7	370,8	372,9	375,1
138, б	77,34	145,5	213,6	281,7	349,8	417,9	486,1	554,2	622,5	690,5

Для функций  $v_1$  и  $v_2$  получаем следующую краевую задачу:

$$\Delta v_i = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (4.36)$$

$$v_1 = 0, \quad x \in AO \cup DC; \quad (4.37)$$

$$v_1 = v_2; \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad x \in MD; \quad (4.38)$$

$$v_2|_{AO} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_2}{\partial \nu} \right|_{OD} = -\frac{\partial}{\partial \nu} [1000(1 - x_1 d^{-1})] = 500\sqrt{2} d^{-1}. \quad (4.39)$$

Функция

$$v_1 = \sum_{k=1}^n C_k \sin \frac{k\pi x_1}{d} \exp(-k\pi x_2 d^{-1}) \quad (4.40)$$

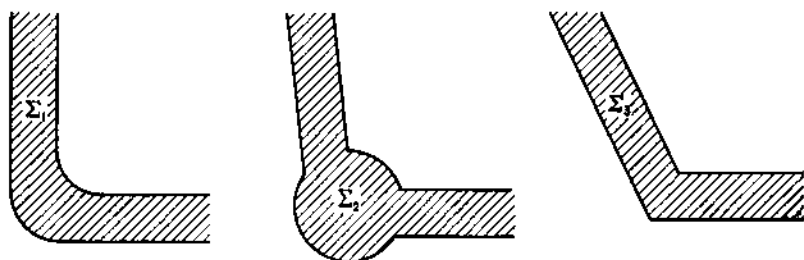


Рис. 140.

точно удовлетворяет уравнению Лапласа и краевым условиям (4.37) при любых константах  $C_k$ . Функцию  $v_2$ , точно удовлетворяющую условиям (4.38) и (4.39), представим в виде

$$v_2 = \frac{v_1 \omega_1 \omega_3^2 + (\Phi + \omega_3 f) \omega_1 \omega_2^2}{\omega_1 \omega_2^2 + \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_1 \omega_3^2}; \quad (4.41)$$

$$\omega_1 = x_1, \quad \omega_2 = d - x_2, \quad \omega_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2 - x_1),$$

где

$$\Phi = \sum_{l=0}^m \sum_{j=0}^{[i2^{-l}]} B_{ij} (x_1^l x_2^{i-j} + x_2^j x_1^{i-j}) \quad ([i2^{-l}] = \text{entier}(i2^{-l})). \quad (4.42)$$

Выражение для полинома  $\Phi$  с неопределенными коэффициентами  $B_{ij}$  выбрано в таком виде, чтобы оно было инвариантно при замене  $x_2$  на  $x_1$ , а  $x_1$  на  $x_2$ . (Таким образом учитывается симметрия поля относительно биссектрисы первого координатного угла.)

Для определения постоянных  $C_i$  и  $B_{ij}$  был применен метод Бубнова — Галеркина. При этом, так как  $\Delta u_1 \equiv 0$  в подобласти  $\Omega_1$ , квадратуры для нахождения коэффициентов матриц соответствующей системы линейных уравнений вычислялись лишь по области  $\Omega_2$  (треугольнику  $MDO$ ). Численные результаты решения этой задачи и сравнение их с результатами Р. С. Минасяна [85, 86], которые дают значения искомой функции с избытком  $u^+$  и с недостатком  $u^-$ , и значениями  $u^B$ , полученными по методу

элементарных балансов, приведены в работах [135, 138]. Относительная погрешность при 45 координатных функциях (из них 10 коэффициентов  $B_j$ ) не превышает 1%.

Таким образом, в рассмотренном примере структура решения строилась так, чтобы приближенное решение вырождалось в точное при удалении на бесконечность и чтобы вычисление квадратур осуществлялось в ограниченной области.

Отметим, что примененный метод можно использовать и для других областей, например изображенных на рис. 140.

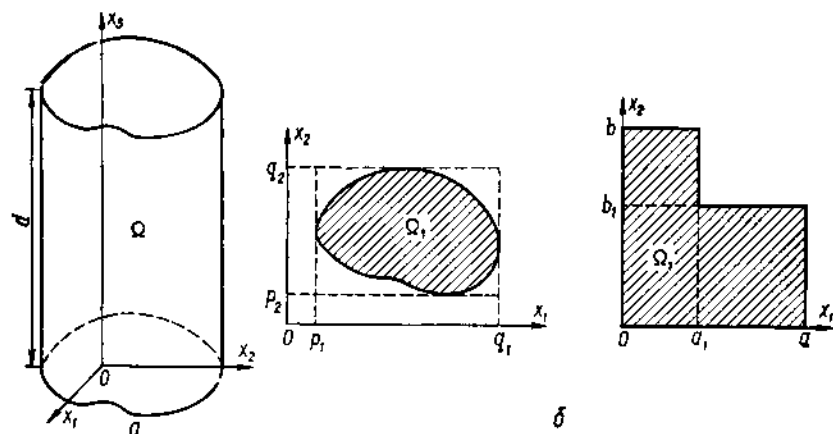


Рис. 141.

4. Рассмотрим пространственную стационарную задачу для призматического тела  $\Omega$  (рис. 141), ограниченного плоскостями  $x_3 = 0$  и  $x_3 = d$ . (Остальные размеры указаны на рисунке.) Будем считать, что внутри  $\Omega$  поле описывается уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} = 0, \quad (4.43)$$

а на границе  $\partial\Omega$  удовлетворяются краевые условия

$$\left. \frac{\partial N}{\partial x_3} \right|_{\partial\Omega_1} = -1; \quad (4.44)$$

$$N|_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1} = 0, \quad (4.45)$$

где  $\partial\Omega_1$  — нижнее основание призмы,  $N = uaP^{-1}\lambda$ ,  $u = t - t_c$ ,  $t_c$  — температура окружающей среды,  $P$  — тепловой поток,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности.

Применим к уравнению (4.43), с учетом граничных условий, конечное интегральное преобразование

$$\bar{N}(x_1, x_2, \gamma) = \int_0^d N(x_1, x_2, x_3) K(x_3, \gamma) dx_3, \quad (4.46)$$



где ядро преобразования  $K(x_3, \gamma)$  определяется из решения задачи

$$\frac{d^2 K}{dx_3^2} + \gamma^2 K = 0; \quad (4.47)$$

$$K|_{x_3=d} = 0, \quad \frac{dK}{dx_3} \Big|_{x_3=0} = 0, \quad (4.48)$$

и, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$K(x_3, \gamma) = \cos \gamma_m x_3, \quad (4.49)$$

где  $\gamma_m = \pi (2m+1) (2d)^{-1} (m \geq 0, \text{целое})$ .

В области изображений получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial x_2^2} - \gamma_m^2 \bar{N} = -1; \quad (4.50)$$

$$\bar{N}|_{\partial \Omega_i} = 0. \quad (4.51)$$

Структуру решения задачи (4.50), (4.51) выбираем в виде

$$\bar{N}(x_1, x_2, \gamma) = \sum_{i,j} C_{ij}(\gamma) \chi_{ij}(x_1, x_2), \quad (4.52)$$

полагая

$$\chi_{ij}(x_1, x_2) = \omega_i(x_1, x_2) P_i(\alpha_1 x_1 + \beta_1) P_j(\alpha_2 x_2 + \beta_2), \quad (4.53)$$

где  $\{P_i(x)\}$  — полиномы Чебышева,  $\alpha_i, \beta_i (i=1, 2)$  — масштабные коэффициенты, которые выбираются так, чтобы при изменении  $x_i$  в пределах от  $p_i$  до  $q_i (i=1, 2)$  (рис. 141, а) аргументы соответствующих полиномов Чебышева  $\alpha_i x_i + \beta_i$  изменялись от  $-1$  до  $1$ . В частности, для призм с сечением в виде уголка (рис. 141, б) удобно положить

$$\omega = \frac{x_1 x_2 (a - x_1) (b - x_2) [(a_1 - x_1) \wedge_0 (b_1 - x_2)]}{a^{-1} (a - a_1) x_1 x_2 (a - x_1) (b - x_2) + [(a_1 - x_1) \wedge_0 (b_1 - x_2)]}. \quad (4.54)$$

Коэффициенты  $C_{ij}(\gamma)$  могут быть найдены в результате решения системы Рунца

$$\sum_{i,j} C_{ij} \int_{\Omega} [(\nabla \chi_{ij}, \nabla \chi_{ks}) + \gamma_m^2 \chi_{ij} \chi_{ks}] d\Omega = \int_{\Omega} \chi_{ks} d\Omega. \quad (4.55)$$

Приближенное решение задачи (4.50) — (4.51) для  $n$  координатных функций получим в виде [134, 135]

$$N_n(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m=0}^p \bar{N}_n(x_1, x_2, \gamma_m) \left[ \int_0^d K^2(x_3, \gamma_m) dx_3 \right]^{-1} K(x_3, \gamma_m).$$

Численные результаты для  $a = d = 1, p = 70, n = 6, 10, 15, x = 0, 0; 0, 4; 0, 8$  при  $a = b$  и  $a^{-1} (a - b) = 0, 3$  приведены в работе [140].

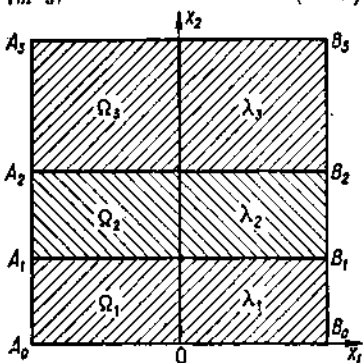


Рис. 142.

Когда  $a = b$ , получено точное решение в виде ряда [13]. Сравнение результатов этих работ показывает, что при  $n = 15$  погрешность не превышает 5%.

5. Рассмотрим тестовую задачу о температурном поле в трехслойной пластине (рис. 142). Предполагается, что внутри каждой из подобластей  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) удовлетворяется уравнение

$$\operatorname{div}(\lambda_i \operatorname{grad} u_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad (4.56)$$

удовлетворяются краевые условия

$$\begin{aligned} u_1|_{A_n B_0} = 0, \quad u_3|_{A_n B_1} = R_0 + x_1; \\ u_i|_{A_{i-1} A_i} = 0; \quad u_i|_{B_{i-1} B_i} = a_i + b_i x_2 \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (4.57)$$

где  $a_i, b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — заданные постоянные, такие, что значения  $u$  на границе изменяются непрерывно, и условия на границах сред

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_{A_1 B_1} = \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{A_1 B_1}; \quad u_1|_{A_1 B_1} = u_2|_{A_1 B_1}; \\ \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{A_2 B_2} = \lambda_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \Big|_{A_2 B_2}; \quad u_2|_{A_2 B_2} = u_3|_{A_2 B_2}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Точное решение этой краевой задачи при

$$\begin{aligned} b_1 = \lambda_2 \lambda_3 A^{-1}; \quad b_2 = \lambda_1 \lambda_3 A^{-1}; \quad b_3 = \lambda_1 \lambda_2 A^{-1}; \\ a_1 = b_1 l; \quad a_2 = (b_3 - b_2) d + a_3; \quad a_3 = 1 + b_3 l; \\ A = 2d(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3) \end{aligned}$$

имеет вид

$$u(x_1, x_2) = \Phi(x_2)(x_1 + R_0), \quad \Phi(x_2) = a_i + b_i x_2 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.59)$$

Применяя результаты § 13 гл. 3, структуру решения данной задачи для области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$  представим в виде единого аналитического выражения

$$u(x_1, x_2) = \Phi_0(\varphi, \theta) + \omega_0(\varphi, \theta) \sum_{i+j=0}^m C_{ij} P_i(\varphi R_0^{-1}) P_j(\theta l^{-1}), \quad (4.60)$$

где  $P_i, P_j$  — полиномы Чебышева,

$$\theta_i = x_2 + \left[ \gamma_1 \frac{|\omega_i| \omega_0^2 \omega_2^2}{\omega_0^2 + \omega_1^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{|\omega_2| \omega_0^2 \omega_1^2}{\omega_0^2 + \omega_2^2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right] (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{-1};$$

$$\omega_1 = x_2 + d; \quad \omega_2 = x_2 - d; \quad \omega_0 = (R_0^2 - x_1^2)(l^2 - x_2^2); \quad \theta_1 = \varphi; \quad \theta_2 = \theta;$$

$$\gamma_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad \gamma_2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3}; \quad \Phi_0(\varphi, \theta) = \Phi(\theta)(R_0 + \varphi).$$

В этом случае функции  $v = u - \Phi_0$  (по методу Ритца) соответствует задача о минимуме функционала

$$I(v) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \int_{\Omega_i} [(\nabla v)^2 + 2Fv] d\Omega_i, \quad (4.61)$$

где  $F = -\Delta \Phi_0(\varphi, \theta)$ .

При проведении численного расчета было взято [135]  $\lambda_1 \lambda_2^{-1} = 0,25$ ;  $\lambda_2 \lambda_3^{-1} = 0,25$ ;  $R_0 L^{-1} = 0,5$ ;  $l L^{-1} = 0,5$ ;  $6d L^{-1} = 1$ , где  $L = 2R_0$  — характерный размер.

В табл. 9 приведены значения для  $k = 6, 10, 15$  ( $k$  — число координатных функций) (вторые, третьи, четвертые строки соответственно; первые строки — точное решение). Из таблицы видно,

Таблица 9

$x_1 L^{-1}$	$x_2 L^{-1}$			$x_1 L^{-1}$	$x_2 L^{-1}$		
	-0,375	0,025	0,325		-0,375	0,025	0,325
-0,275	0,06428	0,1961	0,2194	+0,025	0,1500	0,4575	0,5119
	0,06986	0,1924	0,2193		0,1575	0,4494	0,5106
	0,06674	0,1942	0,2196		0,1545	0,4505	0,5100
	0,06688	0,1950	0,2193		0,1543	0,4523	0,5112
-0,075	0,1214	0,3703	0,4144	+0,225	0,2071	0,6318	0,7069
	0,1281	0,3627	0,4127		0,2180	0,6231	0,7086
	0,1253	0,3656	0,4132		0,2160	0,6224	0,7073
	0,1254	0,3659	0,4146		0,2160	0,6227	0,7064

что максимальная нормированная погрешность  $\delta = \|u_k - u_T\| \times \|u_T\|^{-1} 100\% < 1,5\%$ .

6. Рассмотрим задачу об определении стационарного температурного поля в круговом цилиндре конечной высоты  $2l$ , состоящем из двух коаксиальных частей с различными коэффициентами теплопроводности  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (рис. 143). На основаниях цилиндра  $x_3 = \pm l$  поддерживается нулевая температура:

$$u|_{x_3=\pm l} = 0, \quad (4.62)$$

а между боковой поверхностью цилиндра и окружающей средой происходит теплообмен

$$\left[ \frac{\partial u_i}{\partial \rho} + h(u_i - u_{cp}) \right] \Big|_{\rho=R} = 0. \quad (4.63)$$

Между телами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  предполагается идеальный тепловой контакт

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_1} = \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_1}, \quad u_1(R_1, x_3) = u_2(R_1, x_3). \quad (4.64)$$

В каждой из областей  $\Omega_i$  удовлетворяется уравнение

$$\operatorname{div}(\lambda_i \operatorname{grad} u_i) = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (4.65)$$

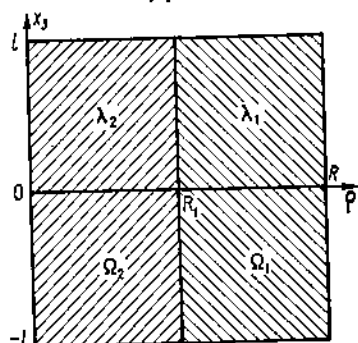


Рис. 143.

Структуру решения сформулированной краевой задачи представим в виде (см. § 10, 13 гл. 3):

$$u(x_1, x_2) = -\omega_0 h u_{cp} + \sum_{i=1}^n C_{il} (P_i(\varphi R^{-1}) P_i(\theta l^{-1}) \omega_1 (1 + \omega_0 h) - \omega_0 D_i^{(2)} [P_i(\varphi R^{-1}) P_i(\theta l^{-1})]), \quad (4.66)$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{2l} (l^2 - \theta^2) \wedge_0 \frac{1}{2R} (R^2 - \varphi^2); \quad \omega_1 = l^2 - \theta^2; \quad h = \alpha \lambda_1^{-1};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2R} (R^2 - \varphi^2); \quad \varphi = \rho + \gamma \frac{|\omega_3| \omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega_3^2} \frac{\partial \omega_3}{\partial \rho}; \quad (4.67)$$

$$\theta = x_3 + \gamma \frac{|\omega_3| \omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega_3^2} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}; \quad \omega_3 = \frac{1}{2R} (R_1^2 - x_1^2);$$

$$\omega_0 = (l^2 - x_3^2) (R^2 - \rho^2); \quad \rho^2 = x_1^2 + x_2^2; \quad \gamma = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

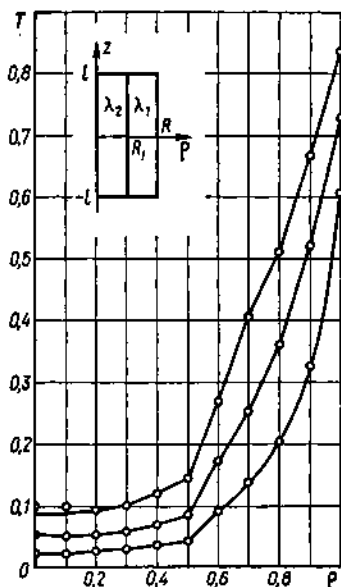


Рис. 144.

Для функции  $v = u - \Phi_0$ , где  $\Phi_0 = -\text{div}(\lambda_i \text{grad}(\omega_0 h u_{cp}))$  в  $\Omega_i$ , получим задачу о минимуме функционала

$$I(v) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \int_{\Omega_i} [(\nabla v)^2 + 2Fv] d\Omega_i + \lambda_1 h \int_S v^2 dS, \quad (4.68)$$

где  $F = -\Delta \Phi_0$ ,  $S$  — боковая поверхность цилиндра. (Заметим, что размерность квадратур в формуле (4.68) понижается на единицу при переходе к цилиндрическим координатам.)

Рассмотренная задача может быть решена методом разделения переменных [13]. Зависимости  $T$  от  $\rho$ , полученные этим методом, приведены на рис. 144 в виде сплошных линий, а описанным выше методом — отмечены кружочками [134].

7. Рассмотренные в предыдущих двух пунктах задачи являются тестами.

Более сложная задача, для которой точное решение не известно, решена в работе [136].

Как и в предыдущем случае, рассматривается осесимметричная задача для уравнения (4.65), но тело состоит из трех частей с различными коэффициентами теплопроводности. Геометрия тела видна из рис. 145. Предполагается, что в областях  $\Omega_i$  коэффициент

теплопроводности равен  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и выполняются граничные условия

$$u_i|_{x_i=l} = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad (4.69)$$

$$\left[ \frac{\partial u_i}{\partial \nu_{01}} + h(u_i - u_{cp}) \right] \Big|_{S_{01}} = 0; \quad (4.70)$$

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu_{i,i+1}} \Big|_{S_{i,i+1}} = \lambda_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial \nu_{i,i+1}} \Big|_{S_{i,i+1}}, \quad (4.71)$$

где  $S_{01}$  — внешняя поверхность тела  $\Omega_1$  без верхнего основания,  $S_{12}$  и  $S_{23}$  — границы между телами  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  соответственно.

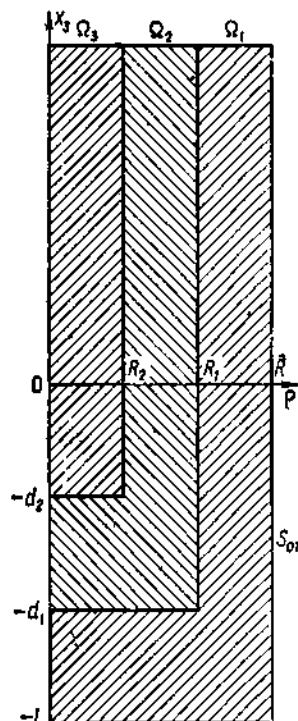


Рис. 145.

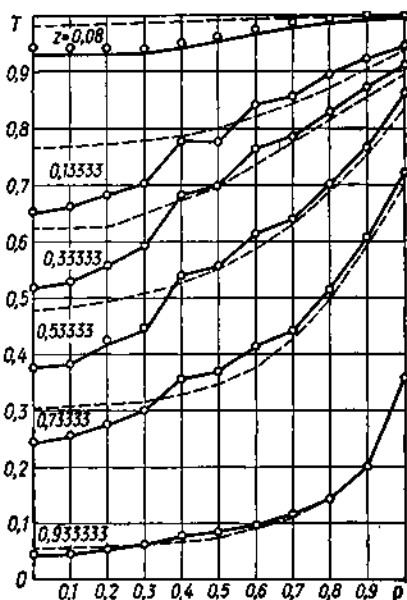


Рис. 146.

Структура решения (4.66) предыдущей задачи удовлетворяет крайевым условиям (4.69), (4.70) и условиям сопряжения (4.71), если

$$\omega_1 = l - \theta; \quad \omega_2 = \frac{1}{2R} (R^2 - \rho^2) \Lambda_0(\theta + l);$$

$$\varphi = \rho + \left[ \gamma_1 \frac{|\omega_3| \omega_0^2 \omega_4^2}{\omega_0^2 + \omega_3^2} \frac{\partial \omega_3}{\partial \rho} + \gamma_2 \frac{|\omega_4| \omega_0^2 \omega_3^2}{\omega_0^2 + \omega_4^2} \frac{\partial \omega_4}{\partial \rho} \right] (\omega_3^2 + \omega_4^2)^{-1};$$

$$\theta = x_3 + \left[ \gamma_1 \frac{|\omega_3| \omega_0^2 \omega_4^2}{\omega_0^2 + \omega_3^2} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} + \gamma_2 \frac{|\omega_4| \omega_0^2 \omega_3^2}{\omega_0^2 + \omega_4^2} \frac{\partial \omega_4}{\partial x_3} \right] (\omega_3^2 + \omega_4^2)^{-1};$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2R_1} (R_1^2 - \rho^2) \Lambda_0(x_3 - d_1); \quad \omega_4 = \frac{1}{2R_2} (R_2^2 - \rho^2) \Lambda_0(x_3 - d_2).$$

Как и в предыдущем пункте, задачу сведем к минимизации функционала (4.68).

При численной реализации для  $Lh = 5,0$ ;  $RL = 1,0$ ;  $R_1L^{-1} = 0,6$ ;  $R_2L^{-1} = 0,3$  рассмотрено три случая [134]: первый —  $\lambda_1\lambda_2^{-1} = 10$ ;  $\lambda_3\lambda_2^{-1} = 40$ ;  $lL^{-1} = 1,0$ ;  $\alpha_1L^{-1} = -0,9$ ;  $\alpha_2L^{-1} = -0,8$ ; второй —  $\lambda_1\lambda_2^{-1} = 10$ ;  $\lambda_3\lambda_2^{-1} = 40$ ;  $lL^{-1} = 1,0$ ;  $\alpha_1L^{-1} = -2,0$ ;  $\alpha_2L^{-1} = -2,0$ ; третий —  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  (однородная среда);  $lL^{-1} = 1,0$ ;  $\alpha_1L^{-1} = -0,9$ ;  $\alpha_2L^{-1} = -0,8$ . На рис. 146 приведены значения температуры по сечениям  $x_3 = \text{const}$ , полученные при 28 координатных функциях для этих трех случаев (сплошные кривые — первый случай, кружочки — второй, штриховые кривые — третий).

#### § 4. Нестационарные температурные поля

1. Пусть  $\Omega$  — тело вращения с осью  $Ox_3$  (рис. 147). Заштрихованным областям  $\Sigma_1$  (цилиндр) и  $\Sigma_2$  (кольцо) соответствуют области, в которых действуют распределенные источники энергии, удельную мощность которых характеризует функция

$$w = \begin{cases} Pv_i^{-1}, & x \in \Sigma_i \quad (i = 1, 2); \\ 0, & x \in \Omega \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2), \end{cases} \quad (4.72)$$

где  $v_i$  — объем области  $\Sigma_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Рассмотрим два различных случая:

а)  $\alpha = 0$ ;  $w \equiv 0$ ; основное уравнение

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \Delta_0 u; \quad (4.73)$$

краевые условия

$$u(r, L, t) = 0;$$

$$\frac{\partial u(r, 0, t)}{\partial x_3} = -\frac{q}{\lambda}; \quad (4.74)$$

Рис. 147.

$$\frac{\partial u(R, x_3, t)}{\partial r} + hu(R, x_3, t) = 0; \quad (4.75)$$

начальное условие

$$u(r, x_3, 0) = 0. \quad (4.76)$$

б)  $\alpha \neq 0$ ;  $w \neq 0$ ; основное уравнение

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u(r, x_3, t)}{\partial t} = \Delta_0 u(r, x_3, t) + \frac{w}{\lambda}; \quad (4.77)$$

краевые условия

$$u(x, t)|_{S_1} = 0; \quad \frac{\partial u(r, 0, t)}{\partial x_r} = -\frac{q}{\lambda}; \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial u(R, x_3, t)}{\partial r} + hu(R, x_3, t) = 0; \quad (4.79)$$

начальное условие  $u(r, x_3, 0) = 0$ , где  $\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ ,

$S_1$  — верхнее основание рассматриваемого тела (полученное при вращении ломаной  $ABCD$  вокруг оси  $Ox_3$ ),  $\lambda$  и  $a$  — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности материала,  $q = P\gamma (\lambda R^2)^{-1}$ ,  $h = \alpha \lambda^{-1}$  — коэффициент относительной теплоотдачи,  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи,  $x = (x_1, x_2, x_3) = (r, x_3)$  — текущая точка области  $\Omega$ .

Для безразмерной критериальной функции  $Q = \frac{1}{2} u \lambda \rho R P^{-1}$  при  $z = Lx_3$ ;  $r = \rho R$ ;  $h^* = hR$ ;  $Fo = atR^{-2}$ ,  $b = RL^{-1}$  задача (4.73) — (4.76) преобразуется к виду

$$\frac{\partial Q}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial \rho} + b^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}; \quad (4.80)$$

$$Q(\rho, 1, t) = 0, \quad \frac{\partial Q(\rho, 0, t)}{\partial z} = -\frac{\gamma}{2b}; \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial Q(\rho, z, t)}{\partial \rho} + h^* Q(\rho, z, t) = 0;$$

$$Q(\rho, z, 0) = 0, \quad (4.82)$$

а задача (4.77) — (4.79) — к виду

$$\frac{\partial Q}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial \rho} + b^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + F; \quad (4.83)$$

$$Q(\rho, z, Fo)|_{(\rho, z) \in S_1^*} = 0; \quad \frac{\partial Q(\rho, 0, Fo)}{\partial z} = -\frac{\gamma}{2b}; \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial Q(\rho, z, Fo)}{\partial \rho} + h^* Q(\rho, z, Fo) = 0;$$

$$Q(\rho, z, 0) = 0, \quad (4.85)$$

где

$$F = \begin{cases} \left[ 2 \left( \frac{r_1}{R} \right)^2 \frac{l_1}{R} \right]^{-1}, & x \in \Sigma_1; \\ \left[ 2 \left[ \left( \frac{r_3}{R} \right)^2 - \left( \frac{r_2}{R} \right)^2 \right] \frac{l_1}{R} \right]^{-1}, & x \in \Sigma_2; \\ 0, & x \in \Omega \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2), \end{cases} \quad (4.86)$$

а  $S_1^*$  — результат преобразования  $S_1$  при переходе от координат  $(r, x_3)$  к координатам  $(\rho, z)$ .

Применим к уравнениям (4.80), (4.83) и соответствующим им граничным условиям интегральное преобразование Лапласа

$$\bar{Q}(\rho, z, p) = \int_0^{\infty} Q(\rho, z, F_0) \exp(-p F_0) dF_0.$$

Тогда в области изображений краевая задача (4.80) — (4.82) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \rho} + b^2 \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial z^2} - p \bar{Q} = 0; \quad (4.87)$$

$$\bar{Q}(\rho, 1, p) = 0; \quad \frac{\partial \bar{Q}(\rho, 0, p)}{\partial z} = -\frac{\gamma}{2bp}; \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial \bar{Q}(1, z, p)}{\partial \rho} + h^* \bar{Q}(1, z, p) = 0,$$

а краевая задача (4.83) — (4.85) — вид

$$\frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \rho} + b^2 \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial z^2} - p \bar{Q} + \frac{1}{\rho} F = 0; \quad (4.89)$$

$$\bar{Q}(\rho, z, p) \Big|_{(\rho, z) \in S_1^*} = 0; \quad \frac{\partial \bar{Q}(\rho, 0, p)}{\partial z} = -\frac{\gamma}{2bp}; \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial \bar{Q}(1, z, p)}{\partial \rho} + h^* \bar{Q}(1, z, p) = 0.$$

Эти задачи можно свести к вариационным [134], а именно: для краевой задачи (4.87), (4.88) — к задаче о минимуме функционала

$$I(\bar{Q}) = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \rho} \right)^2 + b^2 \left( \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} \right)^2 + p \bar{Q}^2 \right] \rho d\rho dz d\varphi + \\ + \int_{S_2^*} h^* \bar{Q}^2 dS_2^* + \frac{\gamma}{bp} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{Q} \rho d\rho d\varphi, \quad (4.91)$$

а для (4.89) — (4.91) — к задаче о минимуме функционала

$$I(\bar{Q}) = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \rho} \right)^2 + b^2 \left( \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} \right)^2 + p \bar{Q} + \frac{2}{\rho} F \bar{Q} \right] \rho d\rho dz d\varphi + \\ + \int_{S_2^*} h^* \bar{Q}^2 dS_2^* + \frac{\gamma}{bp} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{Q} \rho d\rho d\varphi, \quad (4.92)$$

где  $S_2^*$  — боковая поверхность тела (в координатах  $\rho, z$ ).

Функцию  $\bar{Q}$  представим в виде

$$\bar{Q}(\rho, z, p) = \sum_{ij} \bar{C}_{ij}(p) \chi_{ij}(\rho, z). \quad (4.93)$$

Здесь для вариационной задачи (4.91)

$$\chi_{ij}(\rho, z) = \rho^{2i} (1-z)^{2j+1}, \quad (4.94)$$



а для (4.92)

$$\begin{aligned} \chi_{ij}(\rho, z) &= \omega(\rho, z) \rho^{2i} (1-z)^{2j}; \\ \omega(\rho, z) &= (1-z) [(\rho - r_0 R^{-1}) V_0 (1 - dL^{-1} - z)]. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Коэффициенты-изображения  $\bar{C}_{ij}(\rho)$  для  $i+j=0, 1, \dots, n$  определяются из системы Рунца

$$\sum_{i+j}^n (A_{ijks} + B_{ijks}\rho) \bar{C}_{ij}(\rho) = \bar{E}_{ks}(\rho), \quad (4.96)$$

где для вариационной задачи (4.91)

$$\begin{aligned} A_{ijks} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial \rho} \frac{\partial \chi_{ks}}{\partial \rho} + b^2 \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial z} \frac{\partial \chi_{ks}}{\partial z} \right] \rho d\rho dz d\varphi + 2\pi \int_0^1 h^* \chi_{ij} \chi_{ks} |_{\rho=1} dz; \\ B_{ijks} &= \int_{\Omega} \chi_{ij} \chi_{ks} \rho d\rho dz d\varphi; \\ \bar{E}_{ks}(\rho) &= \frac{\pi \gamma}{\rho b} \int_0^1 \chi_{ks}(\rho, 0) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (4.97)$$

При  $b=1$ ;  $\gamma=1$ ;  $h^*=0,2$  после точного дифференцирования и интегрирования для коэффициентов (4.97) получаем

$$\begin{aligned} A_{ijks} &= 2\pi \left\{ \frac{2ik}{(i+k)(2j+2s+3)} + \frac{(2j+1)(2s+1)}{2(i+k+1)(2j+2s+1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,2}{2(j+s)+3} \right\}; \\ B_{ijks} &= \frac{\pi}{(i+k+1)(2j+2s+1)}; \\ \bar{E}_{ks}(\rho) &= \frac{\pi}{2\rho(k+1)}. \end{aligned}$$

Для вариационной задачи (4.92) при  $b=1$ ;  $\gamma=0$  коэффициенты  $A_{ijks}$  и  $B_{ijks}$  находим по формулам (4.96) для соответствующих  $\chi_{ij}$ , а  $\bar{E}_{ks}(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} F \chi_{ks} \rho d\rho dz d\varphi = \frac{\psi}{\rho}$ . Коэффициенты-оригиналы  $C_{ij}(F_0)$  с помощью теоремы о свертке [134] преобразуются к виду

$$C_{ij}(F_0) = \left\{ \frac{\Delta_{ksij}(0)}{\Delta'(0)} + \sum_{s=1}^n \frac{\Delta_{ksij}(\rho_s)}{\rho_s \Delta'(\rho_s)} \exp(\rho_s F_0) \right\} \psi, \quad (4.98)$$

где  $\rho_s$  — корни уравнения  $\Delta(\rho) = 0$ ,

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} A_{0000} + B_{0000}\rho & \dots & A_{0n00} + B_{0n00}\rho \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{000n} + B_{000n}\rho & \dots & A_{0n0n} + B_{0n0n}\rho \end{vmatrix}, \quad (4.99)$$

а  $\Delta_{ksij}$  — алгебраические дополнения элементов  $A_{ijks} + B_{ijks}\rho$ .

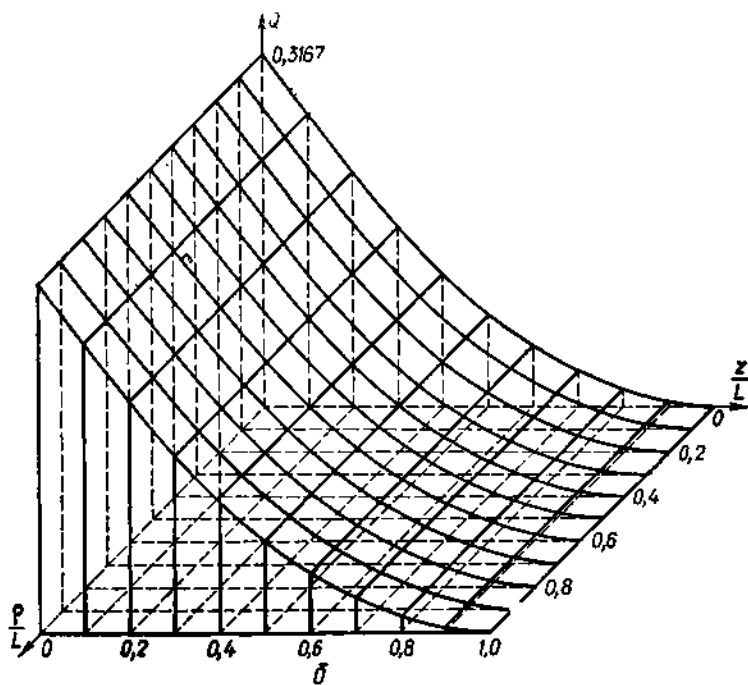
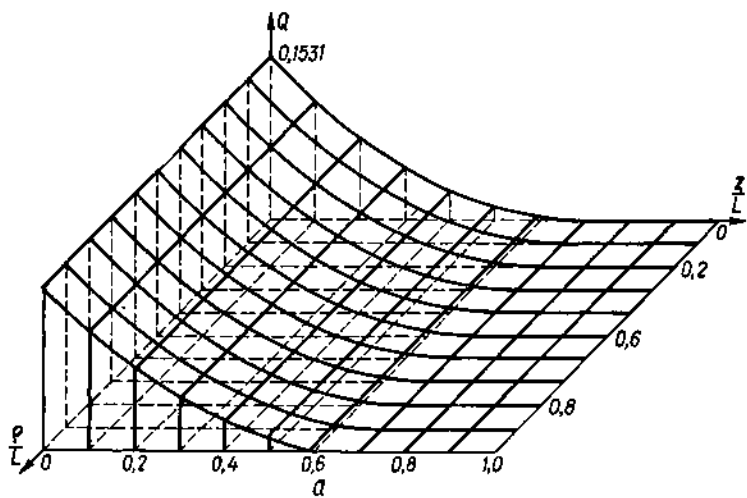


Рис. 148.

Приближенное решение задачи (4.80) — (4.82) имеет вид

$$Q_n(\rho, z, Fo) = \sum_{i+j=0}^n C_{ij}(Fo) \rho^{2i} (1-z)^{2j+1}, \quad (4.100)$$

а для задачи (4.83) — (4.85) —

$$Q_n(\rho, z, Fo) = \sum_{i+j=0}^n C_{ij}(Fo) \omega(\rho, z) \rho^{2i} (1-z)^{2j}. \quad (4.101)$$

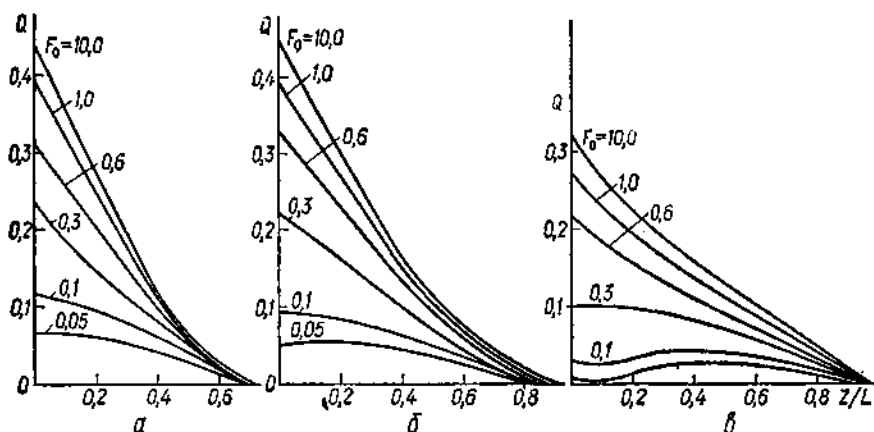


Рис. 149.

Численные результаты [134], полученные при  $RL^{-1} = 1$ ;  $l_1L^{-1} = 0,1$ ;  $r_1L^{-1} = 0,1$ ;  $r_2L^{-1} = 0,3$ ;  $r_3L^{-1} = 0,4$ ;  $r_0R^{-1} = 0,3$ ;  $Lh = 1,0$ , приведены для задачи (4.80) — (4.82) при  $\alpha = 0$  на рис. 148, а —  $Fo = 0,1$  и б —  $Fo = 0,7$ , а для задачи (4.83) — (4.85) при  $\alpha L^{-1} = 0,3$ ;  $\rho = 0; 0,4; 0,7$ ; — на рис. 149, а, б, в соответственно.

2. Рассмотрим задачу об остывании слитка стали в изложнице. Пусть начальная температура стали (область  $\Omega_2$  на рис. 150)  $1000^\circ\text{C}$ , а изложницы (область  $\Omega_1$ ), в которой она находится,  $100^\circ\text{C}$ . Теплообмен поверхности изложницы с окружающей средой, имеющей температуру  $20^\circ\text{C}$ , происходит по закону Ньютона ( $\alpha = 46,5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ). Теплофизические свойства материалов: слитка —  $\lambda_2 = 37 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ,  $a_2 = 0,0218 \text{ м}^2/\text{ч}$ ; изложницы —  $\lambda_1 = 29,1 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ,  $a_1 = 0,0248 \text{ м}^2/\text{ч}$ . Размеры изложницы  $l_1 = l_2 = l = 0,26 \text{ м}$ , слитка  $l_3 = 0,39 \text{ м}$ ,  $l_4 = 0,78 \text{ м}$  (см. рис. 150). Расчет

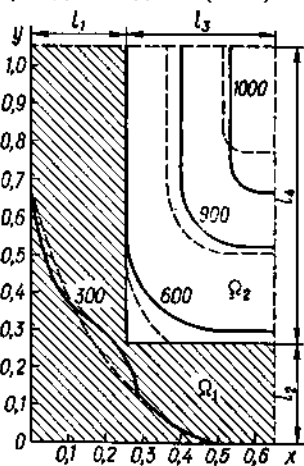


Рис. 150.

нестационарного температурного поля в этом случае сводится к решению следующей задачи теплопроводности:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1 \Delta u; \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{\beta} a_1 \Delta u_2; \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_1+l_2} = \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l_2+l_1} = 0 \quad (i = 1, 2); \\ \left[ \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \alpha (u_n - u_c) \right] \Big|_{x_1=0} = 0; \\ \left[ \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \alpha (u_n - u_c) \right] \Big|_{x_2=0} = 0; \end{aligned} \quad (4.103)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \Big|_{\Gamma_1} = \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial v_1} \Big|_{\Gamma_1}; \quad u_1|_{\Gamma_1} = u_2|_{\Gamma_1}; \quad (4.104)$$

$$u_1|_{t=0} = 100^\circ \text{C}; \quad u_2|_{t=0} = 1000^\circ \text{C}, \quad (4.105)$$

где  $u_i(x_1, x_2, t)$  ( $i = 1, 2$ ),  $a_1 = \beta a_2$ ,  $\Gamma_1$  — граница контакта изложницы и слитка,  $u_n$  — температура внешней поверхности изложницы,  $u_c$  — температура окружающей среды;  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — коэффициенты теплопроводности,  $a_1$  и  $a_2$  — коэффициенты температуропроводности для материала изложницы и слитка соответственно.

Для функций

$$w_1 = \frac{u_1 - u_c}{w_0}, \quad w_2 = \frac{u_2 - u_c}{w_0}$$

краевая задача (4.102) — (4.105) принимает вид

$$\frac{\partial w_1}{\partial Fo} = \Delta w_1, \quad \beta \frac{\partial w_2}{\partial Fo} = \Delta w_2; \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x=0,65} = \frac{\partial w_i}{\partial y} \Big|_{y=1,04} = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (4.107)$$

$$\left( \frac{\partial w_1}{\partial x} - h w_1 \right) \Big|_{x=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} - h w_1 \right) \Big|_{y=0} = 0;$$

$$\lambda_1 \frac{\partial w_1}{\partial v_1} \Big|_{\Gamma_1} = \lambda_2 \frac{\partial w_2}{\partial v_1} \Big|_{\Gamma_1}; \quad w_1|_{\Gamma_1} = w_2|_{\Gamma_1}; \quad (4.108)$$

$$w_1|_{Fo=0} = 80; \quad w_2|_{Fo=0} = 980, \quad (4.109)$$

где  $w_i = w_i(x, y, Fo)$  ( $i = 1, 2$ );  $x = x_1 L^{-1}$ ;  $y = x_2 L^{-1}$ ;  $h = h_1 L$ ;  $h_1 = \alpha \lambda_1^{-1}$ ;  $L = 1$  м;  $w_0 = 1^\circ \text{C}$ .

Применим к уравнениям (4.106) и граничным условиям (4.107) — (4.109) интегральное преобразование Лапласа

$$\bar{w}(x, y, p) = \int_0^\infty w(x, y, Fo) \exp(-p Fo) dFo. \quad (4.110)$$

Тогда в области изображений краевая задача (4.106) — (4.109) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta \bar{w}_1 - p \bar{w}_1 = -80 = F_1; \\ \Delta \bar{w}_2 - p \beta \bar{w}_2 = -980\beta = F_2; \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x} \Big|_{x=0,65} = \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial y} \Big|_{y=1,04} = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (4.112)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x} - h \bar{w}_1 \right)_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} - h \bar{w}_1 \right) \Big|_{y=0} = 0;$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial v_1} \Big|_{\Gamma_1} = \lambda_2 \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial v_1} \Big|_{\Gamma_1}, \quad \bar{w}_1 \Big|_{\Gamma_1} = \bar{w}_2 \Big|_{\Gamma_1}. \quad (4.113)$$

Структуру решения полученной краевой задачи представим в виде [134]

$$w(\varphi, \theta, \rho) = \sum_{i+j=0}^n \bar{C}_{ij}(\rho) \chi_{ij}(\varphi, \theta), \quad (4.114)$$

где

$$\chi_{ij}(\varphi, \theta) = \cos \frac{i\pi\varphi}{0,65} \cos \frac{j\pi\theta}{1,04} [1 + (\varphi - 0,769\varphi^2) \cdot 1,598] \times$$

$$\times [1 + (\theta - 0,48\theta^2) \cdot 1,598];$$

$$\varphi = x + \gamma |\omega_1| \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \omega_0^2 (\omega_1^2 + \omega_0^2)^{-1};$$

$$\theta = y + \gamma |\omega_1| \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \omega_0^2 (\omega_1^2 + \omega_0^2)^{-1};$$

$$\gamma = 0,12; \quad \omega_0 = xy(0,65 - x)(1,04 - y);$$

$$\omega_1 = (0,26 - x) \vee_0(0,26 - y).$$

Система Ритца для определения коэффициентов-изображений имеет вид

$$\sum_{i+j=0}^n \bar{C}_{ij}(\rho) (A_{i/jks} + B_{i/jks}\rho) = D_{ks},$$

где

$$A_{i/jks} = 29,1 \int_{\Omega_1} \left[ \frac{\partial \chi_{ij}(\varphi, \theta)}{\partial x} \frac{\partial \chi_{ks}(\varphi, \theta)}{\partial x} + \frac{\partial \chi_{ij}(\varphi, \theta)}{\partial y} \frac{\partial \chi_{ks}(\varphi, \theta)}{\partial y} \right] dx dy +$$

$$+ 46,5 \left\{ \int_0^{0,65} [\chi_{ij}(x, y) \chi_{ks}(x, y)] \Big|_{y=0} dx + \int_0^{1,04} [\chi_{ij}(x, y) \chi_{ks}(x, y)] \Big|_{x=0} dy \right\} +$$

$$+ 37 \int_{\Omega_2} \left[ \frac{\partial \chi_{ij}(\varphi, \theta)}{\partial x} \frac{\partial \chi_{ks}(\varphi, \theta)}{\partial x} + \frac{\partial \chi_{ij}(\varphi, \theta)}{\partial y} \frac{\partial \chi_{ks}(\varphi, \theta)}{\partial y} \right] dx dy;$$

$$B_{i/jks} = 29,1 \int_{\Omega_1} \chi_{ij}(\varphi, \theta) \chi_{ks}(\varphi, \theta) dx dy +$$

$$+ 42,09 \int_{\Omega_2} \chi_{ij}(\varphi, \theta) \chi_{ks}(\varphi, \theta) dx dy;$$

$$D_{ks} = 2328 \int_{\Omega_1} \chi_{ks}(\varphi, \theta) dx dy + 41 \cdot 25 \int_{\Omega_2} \chi_{ks}(\varphi, \theta) dx dy.$$

Коэффициенты-оригиналы  $C_{ij}(Fo)$  с помощью теоремы свертки преобразуются к виду [134]

$$C_{ij}(Fo) = \sum_{k,s} \sum_{m=1}^n \frac{D_{ks} \Delta_{ksij}(p_m)}{\Delta'(p_m)} \exp(p_m Fo). \quad (4.115)$$

Приближенное решение задачи для  $m$  координатных функций получим в виде

$$u_m(x, y, Fo) = 20^\circ \text{C} + \omega_0 \left\{ \sum_{i+j=0}^n C_{ij}(Fo) \chi_{ij}(\varphi, \theta) \right\}. \quad (4.116)$$

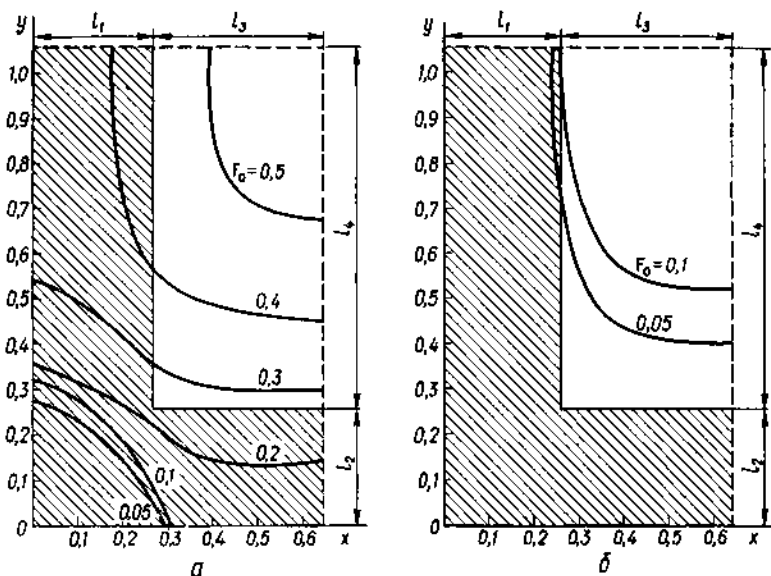


Рис. 151.

Полученные численные результаты [134] для  $n = 2$  (шесть координатных функций) показаны на рис. 150, 151. Штриховые кривые на рис. 150 — экспериментальные данные, полученные в работе [35] при  $Fo = 0,01295$  ( $a$  — динамика изотермы  $u = 300^\circ \text{C}$ ,  $b$  —  $600^\circ \text{C}$  соответственно).

### § 5. Метод линейных итераций в задачах с внешней нелинейностью

Задача с нелинейным краевым условием Стефана — Больцмана [134] будет заменена последовательностью линейных краевых задач с условием Ньютона. Относительные коэффициенты теплоотдачи для каждой итерации находятся как функции координат на основе определения температурного поля в предыдущей итерации [139].

Рассмотрим задачу об определении температурного поля в полном цилиндре высоты  $l$  с осью  $Oz_1$ , нижний торец которого находится

и плоскости  $z_1 = 0$  и теплоизолирован, на внутренней поверхности  $r = b$  поддерживается постоянная температура  $\alpha u_0$ , а остальная часть  $S_1$  поверхности тела излучает тепло по закону Стефана — Больцмана. Внешний радиус цилиндра равен  $a$ . Эта задача сводится к следующей краевой задаче [9]:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\gamma < \rho < \beta, 0 < z < 1); \quad (4.117)$$

$$u \Big|_{\rho=\gamma} = \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \quad (4.118)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \nu} + h^* u^3 \right) \Big|_{S_1} = 0,$$

где  $\nu$  — направление внешней нормали к поверхности  $S_1$ ;  $\gamma = bt^{-1}$ ;  $\rho = rt^{-1}$ ;  $z = z_1 t^{-1}$ ;  $\beta = at^{-1}$ ;  $u = u^* u_0^{-1}$ ;  $h^* = \sigma_0 \epsilon a_0 \mu_0^3 \lambda^{-1}$ .

Последовательность линейных краевых задач для сформулированной задачи представим в виде [134]

$$\Delta u_{21} = 0;$$

$$u_{21} \Big|_{\rho=\gamma} = \alpha;$$

$$\frac{\partial u_{21}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial u_{21}}{\partial \nu} + h^* u_{11}^3 u_{21} \right) \Big|_{S_1} = 0; \quad u_{11} = \alpha, \quad u_{31} =$$

$$= \frac{1}{2} (u_{11} + u_{21}), \quad (4.119)$$

а для  $j = 2, 3, \dots$

$$\Delta u_{1j} = 0;$$

$$u_{1j} \Big|_{\rho=\gamma} = \alpha, \quad \frac{\partial u_{1j}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial u_{1j}}{\partial \nu} + h^* u_{3j-1}^3 u_{1j} \right) \Big|_{S_1} = 0; \quad (4.120)$$

$$\Delta u_{2j} = 0;$$

$$u_{2j} \Big|_{\rho=\gamma} = \alpha, \quad \frac{\partial u_{2j}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial u_{2j}}{\partial \nu} + h^* u_{1j}^3 u_{2j} \right) \Big|_{S_1} = 0, \quad (4.121)$$

где  $u_{3j} = \frac{1}{2} (u_{1j} + u_{2j})$ ,  $j$  — номер итерации.

Структуры решения краевых задач (4.119) — (4.121) представим в виде

$$u_{ij} = f + \psi_{ij}, \quad (4.122)$$

где

$$f = \frac{\alpha \rho^2}{\gamma^2}, \quad \psi_{ij} = \sum_{k,s} C_{ks}^{(i,j)} \chi_{ks}(\rho, z).$$

Последовательность краевых задач (4.119) — (4.121) для функций  $\psi_{ij}$  преобразуется к виду

$$\Delta \psi_{21} = -\frac{4\alpha}{\gamma^2};$$

$u_j$	$z$					
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\rho = 0,2000$						
$u_\lambda$	1968,6	1968,6	1968,6	1968,6	1968,1	1890,8
$u_1$	1944,7	1944,5	1943,6	1942,2	1940,2	1937,7
$u_2$	1925,4	1925,0	1924,1	1922,5	1920,3	1917,4
$u_3$	1927,0	1928,0	1926,7	1924,2	1922,9	1920,0
$u_4$	1927,5	1927,2	1926,2	1924,7	1922,5	1919,7
$u_5$	1927,5	1927,2	1926,3	1924,7	1922,5	1919,7
$\rho = 0,2250$						
$u_\lambda$	1911,3	1911,3	1911,3	1911,3	1910,0	1719,3
$u_1$	1841,2	1840,3	1837,6	1833,0	1826,7	1818,6
$u_2$	1785,6	1784,6	1781,6	1776,5	1769,4	1760,3
$u_3$	1792,4	1791,4	1788,4	1783,3	1776,2	1767,7
$u_4$	1791,8	1790,8	1787,8	1782,8	1775,8	1766,8
$u_5$	1791,9	1790,9	1787,9	1782,9	1775,9	1766,9
$\rho = 0,2500$						
$u_\lambda$	1860,0	1860,0	1860,0	1860,0	1858,6	1634,9
$u_1$	1754,1	1752,5	1747,7	1739,7	1728,5	1714,1
$u_2$	1668,4	1666,6	1661,3	1625,3	1639,8	1623,7
$u_3$	1675,9	1677,1	1672,7	1663,8	1651,2	1635,3
$u_4$	1678,1	1676,3	1671,0	1662,2	1649,8	1633,9
$u_5$	1678,2	1676,5	1671,2	1662,3	1649,3	1634,1

$$\psi_{21} \Big|_{\rho=\gamma} = 0, \quad \frac{\partial \psi_{21}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial \psi_{21}}{\partial v} + h^* u_{11}^3 \psi_{21} \right) \Big|_{s_1} =$$

$$= - \left( \frac{\partial f}{\partial v} + h^* u_{11}^3 f \right) = f_{21}, \quad (4.123)$$

а для  $j = 2, 3, \dots$  — к виду

$$\Delta \psi_{1j} = - \frac{4\alpha}{\gamma^2};$$

$$\psi_{1j} \Big|_{\rho=\gamma} = 0, \quad \frac{\partial \psi_{1j}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial \psi_{1j}}{\partial v} + h^* u_{3j-1}^3 \psi_{1j} \right) \Big|_{s_1} =$$

$$= - \left( \frac{\partial f}{\partial v} + h^* u_{3j-1}^3 f \right) = f_{1j}; \quad (4.124)$$

$$\Delta \psi_{2j} = - \frac{4\alpha}{\gamma^2};$$

$$\Delta \psi_{2j} \Big|_{\rho=\gamma} = 0; \quad \frac{\partial \psi_{2j}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial \psi_{2j}}{\partial v} + h^* u_{1j}^3 \psi_{2j} \right) \Big|_{s_1} =$$

$$= - \left( \frac{\partial f}{\partial v} + h^* u_{1j}^3 f \right) = f_{2j}. \quad (4.125)$$



Метод Ритца приводит эти задачи к задачам о минимуме функционалов

$$I(\psi_{21}) = \int_{\Omega} \left[ (\text{grad } \psi_{21})^2 - \frac{8\alpha}{\gamma^2} \psi_{21} \right] d\Omega + \int_{S_1} [h^* u_{11}^3 \psi_{21}^2 - 2f_{21} \psi_{21}] dS_1, \quad (4.126)$$

а для  $j = 2, 3, \dots$  —

$$I(\psi_{1j}) = \int_{\Omega} \left[ (\text{grad } \psi_{1j})^2 - \frac{8\alpha}{\gamma^2} \psi_{1j} \right] d\Omega + \int_{S_1} [h^* u_{3j-1}^3 \psi_{1j}^2 - 2f_{1j} \psi_{1j}] dS_1; \quad (4.127)$$

$$I(\psi_{2j}) = \int_{\Omega} \left[ (\text{grad } \psi_{2j})^2 - \frac{8\alpha}{\gamma^2} \psi_{2j} \right] d\Omega + \int_{S_1} [h^* u_{1j}^3 \psi_{2j}^2 - 2f_{2j} \psi_{2j}] dS_1.$$

Неопределенные коэффициенты  $C_{ks}^{(ij)}$  для полученной последовательности вариационных задач определяются из соответствующих систем Ритца.

В табл. 10 приведены значения температуры  $u_j(\rho, z)$  в некоторых точках рассматриваемого полого цилиндра, полученные при  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ;  $\gamma = 0,1875$ ;  $\beta = 0,25$ ;  $h^* = 0,05896 \cdot 10^{-8}$ ;  $\alpha = 2000$ . Для сравнения приведены также значения  $u_k(\rho, z)$ , полученные в работе [9] другим методом.

## § 6. Примеры расчета двумерных полей напряжений и деформаций

В § 12 гл. 3 были построены структуры решений основных типов краевых задач теории упругости для уравнений равновесия, взятых в форме Ламе (3.404). Структура каждой из этих задач имеет вид

$$u = B(\Phi), \quad (4.128)$$

где  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$  — неопределенная компонента (в данных задачах  $m \leq 3$ ), а  $B$  — оператор, построенный с помощью функций  $\omega$  и  $\omega_i$  такой, что при любом выборе неопределенной компоненты  $\Phi$  (в некотором функциональном пространстве) точно удовлетворяются краевые условия соответствующей задачи. Если граничные условия неоднородные, то  $\Phi(0) \neq 0$ . Пусть  $\Phi(0) = u_0$ . Тогда, положив  $u = v + u_0$ , приходим к краевой задаче (см. § 12 гл. 3)

$$Av \equiv (\lambda + \mu) \text{grad div } u + \mu \Delta u = K, \quad (4.129)$$

где

$$K = \rho F - (\lambda + \mu) \text{grad div } u_0 - \mu \Delta u_0, \quad (4.130)$$

с однородными краевыми условиями.

Множество функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям, определяют линейное функциональное пространство  $\mathfrak{M}_0$ . Можно показать [88], что оператор  $A$  — положительный (а в некоторых случаях и положительно определенный) на множестве  $\mathfrak{M}_0$  и, таким образом, можно использовать метод Ритца: решение задачи минимизирует функционал

$$I(v) = (Av, v) - 2(K, v). \quad (4.131)$$

(Заметим, что применение формул типа формулы Грина позволяет в выражении  $(Av, v)$  понизить порядок производных со второго до первого, что существенно с вычислительной точки зрения.)

Рассмотрим примеры решения двумерных (плоских и осесимметричных краевых задач). Рассмотрим вначале первую основную задачу теории упругости. На границе  $\partial\Omega = (\omega = 0)$  ( $\omega$  — нормализована) заданы напряжения

$$\sigma_n = f_1, \quad \tau_n = f_2. \quad (4.132)$$

Используя методику, описанную в § 12 гл. 3, структуру решения представим в виде

$$u_1 = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} f_1 + \frac{1}{\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} f_2 + \Phi_1 - \omega D_1 \Phi_1 + \omega T_1 \Phi_2 - \\ - 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \omega \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 T_1 \Phi_2 + 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} T_1 \Phi_1 + \\ + \omega^2 \Phi_3 + Q_1; \quad (4.133)$$

$$u_2 = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} f_1 - \frac{1}{\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} f_2 + \Phi_2 - \omega D_1 \Phi_2 - \omega T_1 \Phi_1 + \\ + 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \omega \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 T_1 \Phi_1 - 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} T_1 \Phi_2 + \\ + \omega^2 \Phi_4 + Q_2,$$

где  $Q_1 \equiv Q_2 \equiv 0$  для плоской задачи и для осесимметричной

$$Q_1 = - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{1}{x_1} \Phi_1; \quad Q_2 = - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{1}{x_1} \Phi_2. \quad (4.134)$$

Рассмотрим две тестовые задачи.

1. Упругий прямоугольник (рис. 152) сжимается с двух противоположных сторон равномерно распределенной нагрузкой. (Не нарушая общности рассуждений нагрузку можно считать единичной.) Постановка задачи имеет вид

$$\sigma_n(x_1, \pm b) = -1; \quad \sigma_n(\pm a, x_2) = 0; \quad \tau_n(x_1, x_2)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.135)$$

Для решения задачи применим структуру решения (4.133) при  $Q_1 \equiv Q_2 \equiv 0$ . Нормализованное уравнение границы  $\partial\Omega$  напишем в виде

$$\omega(x_1, x_2) \equiv (\omega_1 \wedge_0 \omega_2) \wedge_0 \gamma = 0, \quad (4.136)$$

где

$$\omega_1 = \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2); \quad \omega_2 = \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2), \quad (4.137)$$

$\gamma$  — малая положительная константа. Функции  $\omega_1$  и  $\omega_2$  используем также для склейки (см. § 1 гл. 3) граничных значений функций  $\sigma_n$ . Отметим, что величина  $\gamma$  выбирается на основе численных экспериментов. В данной и других рассматриваемых ниже задачах теории упругости в качестве критерия выбора величины  $\gamma$  служила следующая интегральная характеристика.

Если рассматриваемое тело расщечь какой-либо плоскостью, перпендикулярной к линии действия внешних сил, то суммарная нормальная нагрузка в полученном сечении не будет зависеть от выбора такой плоскости и будет равна внешней нагрузке, которую легко подсчитать. В данном примере она равна  $2a$ .

При фиксированном числе координатных функций существует наилучшее значение  $\gamma$ , при котором отклонение приближенного значения указанной суммарной нагрузки от точной наименьшее. (Опыт показывает, что зависимость  $\gamma$  от числа координатных функций в большинстве случаев не существенна.) Впрочем, константу  $\gamma$  можно рассматривать наравне с неопределенными константами, участвующими в методе Ритца, и выбирать ее из условия минимума соответствующего функционала.

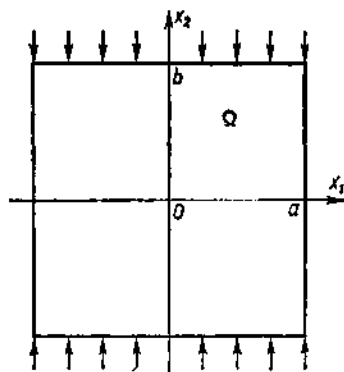


Рис. 152.

Многочисленные эксперименты показывают, что при очень малом  $\gamma$  сходимость последовательности координатных функций плохая, при увеличении  $\gamma$  сходимость сначала улучшается, а затем резко ухудшается (см. § 17 гл. 3).

Вернемся к задаче (4.132). При решении ее (в условиях эксплуатации ГП «Поле-3») были выбраны:  $a = 1$ ;  $b = 1,5$ ;  $\gamma = 0,05$ . В качестве аппроксимирующих выбирались полиномы Чебышева (с соответствующей масштабировкой по осям координат), при этом учитывалась симметрия задачи.

Для аппроксимации  $\Phi_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) выбирались полиномы максимальной — пятой степени. Для  $\Phi_1$  и  $\Phi_3$  нечетные по  $x_1$  и четные по  $x_2$ , для  $\Phi_2$  и  $\Phi_4$  — наоборот. Учет симметрии позволил осуществлять интегрирование лишь по четверти области  $\Omega$ . Для этой цели была использована формула Гаусса с числом узлов 36. Значения перемещений  $u_1$  и  $u_2$  в лежащих на осях координат точках, полученные приближенно ( $u_i^n$ ) и по точным формулам ( $u_i^T$ ), следующие:

	$x_1$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$x_2 = 0$	$u_1^n$	0,07756	0,1561	0,2353	0,3127	0,3892
	$u_1^T$	0,07800	0,1560	0,2340	0,3120	0,3900
$x_1 = 0$	$x_2$	0.0	0.5	1.0	1.5	
	$u_2^n$	0,0000	-0,4558	-0,9117	-1,3657	
	$u_2^T$	0,0000	-0,4550	-0,9101	-1,3651	

Подготовка директивы для генератора программ «Поле-3» занимает около 2 ч, время счета (на ЭВМ «БЭСМ-6») — 109 с.

2. Пусть тело  $\Omega$  (см. рис. 152) является телом вращения, с осью  $Ox_2$ , а условия его нагружения остаются прежними: по торцам приложена равномерно распределенная нагрузка, боковая поверхность свободна от внешних воздействий.

Для описания осевого сечения тела сохраним уравнение (4.136). Сохраним также при численной реализации метод, аппроксимирующие полиномы, значения величин  $a$  и  $b$ , метод и сетку интегрирования. Примем, что  $\gamma = 0,025$ .

Будем считать, что  $Q_1$  и  $Q_2$  определяются формулами (4.134). В этом случае переход от директивы для генератора программ «Поле-3», составленной для предыдущего примера, к директиве для данной осесимметричной задачи связан лишь с изменением двух перфокарт. Полученные значения следующие:

	$r$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$z = 0$	$u_1^n$	0,05884	0,1188	0,1798	0,2395	0,3001
	$u_1^T$	0,06000	0,1200	0,1799	0,2399	0,2999
	$z$	0	0,5	1,0	1,5	
$r = 0$	$u_2^n$	0,0000	0,5019	1,002	1,501	
	$u_2^T$	0,0000	0,5000	1,000	1,500	

Время счета составило 118 с.

В рассмотренных выше тестах нормированная относительная погрешность по напряжениям составляла примерно 1%.

3. Предположим, что в задаче п. 1 внешняя нагрузка, приложенная к двум противоположным сторонам прямоугольника, равномерно распределена по участкам ширины  $2c$  ( $c < a$ ) (рис. 153, а), т. е.

$$\sigma_n(x_1, \pm b) = \begin{cases} -1 & \text{при } |x_1| \leq c; \\ 0 & \text{при } |x_1| > c. \end{cases} \quad (4.138)$$

Используем структуру решения (4.133) при  $Q_1 = Q_2 = 0$ . Уравнение границы  $\partial\Omega$  возьмем в виде (4.136). Для склейки граничных значений функции  $\sigma_n$  (т. е. для построения функции  $f_1$ , входящей в структуру решения (4.133)), используем функции

$$\omega_1^* = \omega_2 \vee_0 \bar{\omega}_3, \quad \omega_2^* = (\omega_1 \wedge_0 \omega_2) \vee_0 \omega_3, \quad (4.139)$$

где  $\omega_3 = C^2 - x_1^2$ , а  $\omega_1$  и  $\omega_2$  определяются по формулам (4.137). Уравнения  $\omega_1^* = 0$  и  $\omega_2^* = 0$  есть уравнения линий  $ABCD$ ;  $EFGH$  и  $ABQPFE$ ;  $DCMNGH$  (рис. 153, б) соответственно. То, что эти функции имеют ветви нулей вне области  $\Omega$ , не имеет, вообще,

значения, так как нас интересует лишь поле внутри области  $\Omega$ . Можно было бы, конечно, строить уравнения отрезков  $BC$ ,  $FG$  и ломаных  $BQPF$ ,  $CMNG$  в «чистом виде», пользуясь формулами § 12 гл. 2, но это привело бы к более сложным формулам с соответствующим увеличением машинного времени и накопления погрешностей.

При сохранении прежних размеров прямоугольника ( $a = 1$ ;  $b = 1,5$ ) и при  $c = 0,5$ ,  $\gamma = 0,05$  переход от директивы ГП «Поле-3»

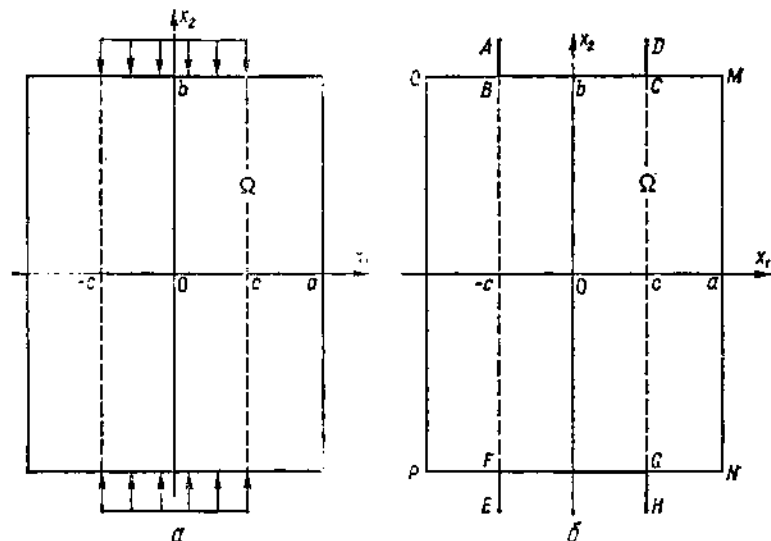


Рис. 153.

для задачи п 1. связан с изменением трех перфокарт. Контроль точности результатов (так как точное решение не известно) приведем исходя из интегрального соотношения

$$\delta = \int_0^a \sigma_2(x_1, x_2') dx_1 = cP = c.$$

Интегралы в сечениях вычислялись по формуле прямоугольников с шагом 0,05, интегралы по области — по формуле Гаусса (300 точек в области  $\Omega$ ). Значения  $\delta$  по сечениям  $x_2'$ , вычисленные при 36 (над чертой) и 62 (под чертой) координатных функциях, следующие:

$x_2$	0,00	0,25	0,5	0,75	1,00	1,25
$\delta$	1,030	1,028	0,980	1,031	1,031	1,026
	1,032	1,021	0,999	1,023	1,034	1,000

При этом полиномы Чебышева  $\Phi_i$  выбирались так:  $\Phi_1$  и  $\Phi_3$  — нечетные по  $x_1$  и четные по  $x_2$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_4$  — четные по  $x_1$  и нечетные по  $x_2$ . Максимальная степень полиномов при 36 координатных

функциях была такой: для  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — 9, для  $\Phi_3$  и  $\Phi_4$  — 5; при 62 координатных функциях — для  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — 13, для  $\Phi_3$  и  $\Phi_4$  — 5.

На рис. 154 представлены напряжения  $\sigma_2$  в сечениях  $x_2$ , равных 0; 0,5; 1 упругого тела, полученные при 62 координатных функциях. При решении этой задачи с помощью ГП «Поле-3» за основу взят пакет перфокарт для рассмотренного выше теста (см. п. 1). При этом пришлось изменить 10 перфокарт. (В основном они касались информации о логике формирования функций  $\omega_i$  и об

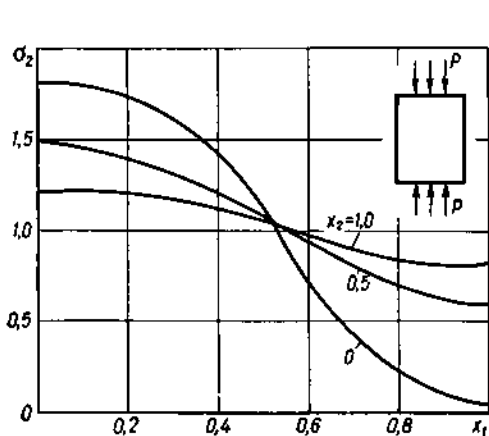


Рис. 154.

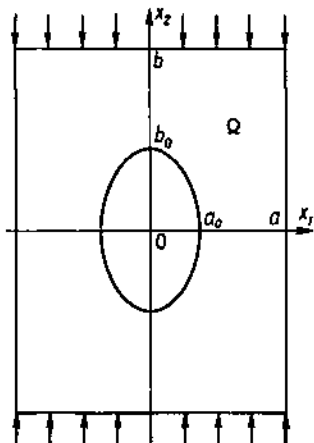


Рис. 155.

опорных функциях.) Программист на эти изменения потратил примерно 10 мин. Время счета на ЭВМ «БЭСМ-6» — 5 мин 46 с.

4. Рассмотрим задачу о сжатии упругого прямоугольника с эллиптической полостью (рис. 155). Пусть  $\partial\Omega = (\omega = 0)$  — граница области  $\Omega$ :

$$\omega \equiv ((\omega_1 \wedge_0 \omega_2) \wedge_0 \omega_3^*) \wedge_0 \gamma,$$

где

$$\omega_1 \equiv \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2); \quad \omega_2 \equiv \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2);$$

$$\omega_3 \equiv \left( \frac{x_1^2}{a_0^2} + \frac{x_2^2}{b_0^2} - 1 \right); \quad \omega_3^* \equiv \frac{\omega_3}{\sqrt{\omega_3^2 + |\nabla \omega_3|^2}}.$$

Кроме того, обозначим  $\omega' \equiv \omega_1$ ;  $\omega'' \equiv \omega_2 \omega_3$ .

Краевые условия в этой задаче следующие:

$$\sigma_n|_{\omega=0} = -1; \quad \sigma_n|_{(\omega_1=0) \cup (\omega_2=0)} = 0; \quad \tau_n|_{\omega=0} = 0. \quad (4.140)$$

Функции  $\omega'$  и  $\omega''$  используются для склейки граничных значений  $\sigma_n$  (см. § 1 гл. 3). Структуру решения возьмем такую же, как и в задаче п. 1.

При численной реализации принято:  $a = 1$ ;  $b = 1,5$ ;  $a_0 = 0,3$ ;  $b_0 = 0,5$ ;  $\gamma = 0,025$ . Степени и четность полиномов Чебы-

шева выбирались так же, как и в предыдущем примере. Контроль точности осуществлялся на основе интегрального равенства

$$\delta = \frac{1}{P} \int_{c(x_1)}^a \sigma_2(x_1, x_2') dx_1 = 1, \quad (4.141)$$

где

$$C(x_2) = \begin{cases} 0,6 \sqrt{0,25 - x_2^2} & \text{при } |x_2| \leq 0,5; \\ 0 & \text{при } |x_2| > 0,5. \end{cases}$$

Интегралы в сечениях вычислялись по формуле прямоугольников с шагом 0,05, интеграл по области — по формулам Гаусса (200 точек в области). Значения  $\delta$ , вычисленные при 62 координатных функциях, следующие:

$x_2$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25
$\delta$	1,002	0,984	0,986	0,993	0,989	1,008

На рис. 156 представлены напряжения  $\sigma_2$  в сечениях  $x_2$ , равных 0; 0,5; 1.

При решении рассмотренной задачи с помощью ГП «Поле-3» за основу взят пакет перфокарт для теста п. 1. Пришлось добавить три перфокарты (время работы программиста около 2 мин). Время счета на ЭВМ «БЭСМ-6» — 9 мин 3 с.

5. Сохраним все условия, численные значения, функции  $\omega$  и  $\omega_1$  предыдущей задачи, но будем считать, что задача, осесимметричная с осью вращения  $Oz = Ox_2$ . Ось  $Ox_1$  в этом случае — это радиальная ось  $Or$ . Структуру решения возьмем такую же, как и в задаче п. 2. Таким образом, приходим к задаче о сжатии цилиндра с эллипсоидальной полостью.

Контроль точности результатов будем проводить исходя из интегрального равенства

$$\delta = \frac{1}{P} \int_{c(z)}^a \sigma_z(r, z_i) r dr = 1, \quad (4.142)$$

где

$$c(z) = \begin{cases} 0,6 \sqrt{0,25 - z^2}, & |z| \leq 0,5; \\ 0, & |z| > 0,5. \end{cases}$$

Значения  $\delta$ , соответствующие 62 координатным функциям, следующие:

$z$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25
$\delta$	1,006	0,992	0,984	0,994	0,996	0,999

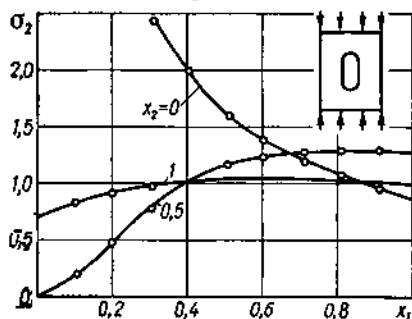


Рис. 156.

На рис. 157 приведены напряжения  $\sigma_z$  в сечениях  $z$ , равных 0; 0,5; 1,0. В качестве основы при решении данной задачи с помощью ГП «Поле-3» взят пакет перфокарт теста п. 2. При этом пришлось добавить три перфокарты, подготовка которых заняла у программиста около 5 мин. Время счета на ЭВМ «БЭСМ-6» — 9 мин 36 с.

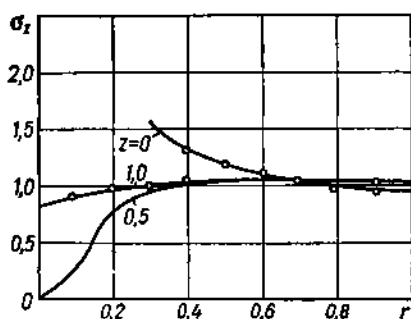


Рис. 157.

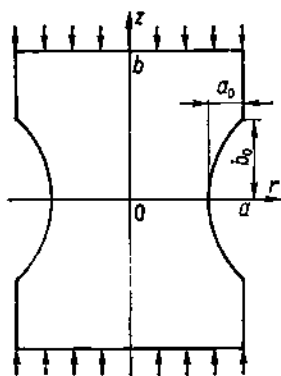


Рис. 158.

6. Рассмотрим осесимметричную задачу о сжатии конечного цилиндра с выточкой по боковой поверхности (рис. 158), сжатого по торцам равномерно распределенной нагрузкой.

Краевые условия следующие:

$$\sigma_n(r, \pm b) = -1; \quad \sigma_n|_S = 0, \quad \tau_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.143)$$

где  $S$  — боковая поверхность тела.

Уравнение  $\partial\Omega$  напишем в виде

$$\omega \equiv ((\omega_1 \wedge_0 \omega_2) \wedge_0 (\omega_3 \wedge_0 \omega_4)) \wedge_0 \gamma = 0,$$

где

$$\omega_1 \equiv \frac{1}{2b} (b^2 - z^2); \quad \omega_2 \equiv \frac{1}{2a} (a^2 - r^2);$$

$$\omega_3 \equiv \frac{(r-a)^2}{a_0^2} + \frac{z^2}{b_0^2} - 1; \quad \omega_4 \equiv \frac{(r+a)^2}{a_0^2} + \frac{z^2}{b_0^2} - 1;$$

Таблица II

$\gamma$	$z$						
	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	$\max \delta  - \delta $
$\emptyset$	1,022	0,942	0,956	0,991	1,097	1,038	0,097
0,1	1,015	0,967	0,984	1,008	1,097	1,014	0,097
0,05	0,983	0,958	1,007	1,060	1,003	0,994	0,060
0,025	0,989	0,991	0,999	1,002	1,044	1,002	0,044
0,01	0,990	0,926	0,949	0,989	1,003	1,005	0,074



$$\omega_3^* \equiv \frac{\omega_3}{\sqrt{\omega_3^2 + |\nabla \omega_3|^2}};$$

$$\omega_4^* \equiv \frac{\omega_4}{\sqrt{\omega_4^2 + |\nabla \omega_4|^2}}.$$

Введем также обозначения:  $\omega' \equiv \omega_1$ ,  $\omega'' \equiv \omega_2 \omega_3 \omega_4$ . (Функции  $\omega'$  и  $\omega''$  используются для склейки (см. § 1 гл. 3) граничных значений  $\sigma_n$ .)

При численной реализации принято:  $a = 1$ ;  $b = 1,5$ ;  $a_0 = 0,3$ ;  $b_0 = 0,5$ ;  $\gamma = 0,025$ . Для аппроксимации неопределенных компонент использовались полиномы Чебышева, а для интегрирования — формула Гаусса (взято 200 точек в области  $\Omega$ ). Как и во всех предыдущих задачах, применялся метод Рунге. Контроль точности будем осуществлять по формуле (4.142), при

$$c(z) = \begin{cases} 1 - 0,6\sqrt{0,25 - z^2}, & |z| \leq 0,5; \\ 0, & |z| > 0,5. \end{cases}$$

Интегралы в сечениях вычислялись с шагом 0,05 по формуле прямоугольников. Значения  $\delta$ , вычисленные при 46 координатных функциях, следующие:

$z$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25
$\delta$	0,988	0,991	0,999	1,002	1,044	1,002

На рис. 159 представлены напряжения  $\sigma_z$  в сечениях упругого цилиндра при  $z$ , равных 0; 0,5; 1,0.

При решении этой задачи за основу взят пакет перфокарт для теста п. 2. Пришлось добавить шесть перфокарт, на что потребовалось около 5 мин рабочего времени программиста. Время счета на ЭВМ «БЭСМ-6» составило около 7 мин.

Экспериментальная зависимость  $\delta$  (по прежним сечениям) от  $\gamma$  для последнего примера приведена в табл. 11.

Символу  $\emptyset$  соответствует сторона, получающаяся, если компоненту  $\gamma$  не вводить, т. е. положить  $\omega = (\omega_1 \wedge_0 \omega_2) \wedge_0 (\omega_3 \wedge_0 \omega_4)$ .

## § 7. Вторая основная задача теории упругости.

### Кручение стержней

1. Рассмотрим вначале задачу о кручении призматических стержней односвязного поперечного сечения. Этой задаче посвящены исследования многих авторов, среди которых следует отметить работы Н. И. Мухелишвили [92], Н. Х. Арутюняна, Б. Л. Абрамяна [6], М. Я. Леонова [60], Я. И. Бурака [15] и др. С применением  $R$ -функций задача о кручении стержней в различных постановках

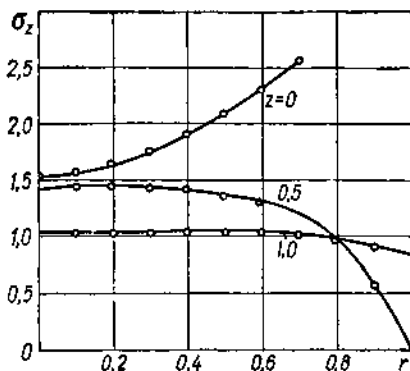


Рис. 159.

рассмотрена в работе [116]. Математическая постановка этой задачи следующая.

В заданной области  $\Omega$ , имеющей форму поперечного сечения стержня, требуется найти функцию напряжений  $u(x_1, x_2)$ , равную нулю на границе  $\partial\Omega$  и удовлетворяющую внутри  $\Omega$  уравнению Пуассона

$$-\Delta u \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 2. \quad (4.144)$$

Если функция напряжений  $u$  определена, можно найти и все остальные величины, характеризующие чистое кручение стержня: жесткость на кручение  $K$ , касательные напряжения  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , действующие в сечении стержня, потенциальную энергию стержня и т. д. В частности, для касательных напряжений и жесткости справедливы формулы

$$\tau_1 = G\theta \frac{\partial u}{\partial x_2}; \quad \tau_2 = -G\theta \frac{\partial u}{\partial x_1}; \quad (4.145)$$

$$K = 2 \int_{\Omega} u d\Omega, \quad (4.146)$$

где  $G$  — модуль сдвига материала стержня, а  $\theta$  — угол закручивания стержня.

Из принципа максимума [44], который может быть применен к уравнению (4.144), следует, что искомая функция  $u$  не может иметь внутри области  $\Omega$  локальных минимумов. Так как на границе  $\partial\Omega$  функция  $u$  равна нулю, следовательно, внутри области  $\Omega$  выполняется неравенство  $u(x_1, x_2) > 0$ .

Представление о форме поверхности  $x_3 = u(x_1, x_2)$  дает ее аналогия с формой натянутой на контур  $\partial\Omega$  гибкой мембраны, подверженной равномерному давлению (аналогия Прандтля [59]). Очевидно, что в данном случае можно использовать структуру решения  $u = \omega\Phi$ , где (как и ранее)  $\partial\Omega = (\omega = 0)$  и  $\omega > 0$  внутри  $\Omega$ .

**Пример 1.** Рассмотрим стержень квадратного поперечного сечения со стороной  $a = 1$ . Функцию  $\omega(x_1, x_2)$  построим в виде

$$\omega = (x_1 \wedge_0 x_2) \wedge_0 [(1 - x_1) \wedge_0 (1 - x_2)]$$

и используем структуру  $u = \omega\Phi$ . Точное значение жесткости на кручение равно 0,1406 [6]. Приближенное значение, полученное при использовании 10 координатных функций (степенные полиномы) [116], равно 0,139. При этом при фиксированной точности интегрирования наблюдалась неустойчивость вычислительного процесса при увеличении числа координатных функций (больше 10). Такое явление характерно для вариационных методов, в которых интегрирование осуществляется приближенно. Кроме того, даже при точном интегрировании при достаточно большом  $n$  могут проявиться также и погрешности, вызываемые ограниченной разрядной сеткой ЭВМ. Другими словами, наблюдается ситуация, которая схематично изображена на рис. 160, где  $n$  — число координатных функций,  $\epsilon$  — точность интегрирования. Область  $I$  — область устойчивости,  $II$  — область неустойчивости вычислительного процесса. (При строгом подходе в  $\epsilon$  следовало бы включить и погрешности округлений, но в большинстве рассмотренных примеров они оказались меньшими по порядку.)

**Пример 2.** Рассмотрим задачу о кручении стержня, сечение которого есть круг радиуса  $R = 1$  с разрезом вдоль отрезка  $[a, 1]$  оси  $Ox_1$  (рис. 161).

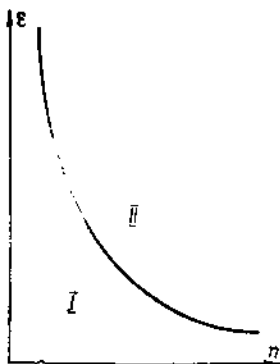


Рис. 160.

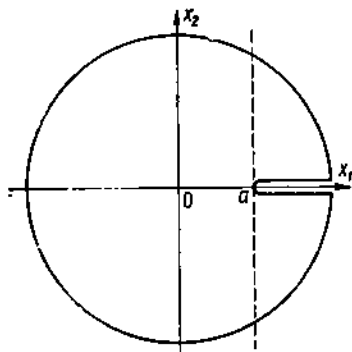


Рис. 161.

Используем структуру вида  $u = \omega\Phi_1 + \omega^2\Phi_2$ , где

$$\omega \equiv \{[(f_2 \vee_0 f_4) \vee f_3] + [(f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 f_2]\} \wedge_0 f_1;$$

$$f_1 \equiv R^2 - x_1^2 - x_2^2; \quad f_2 \equiv x_2; \quad f_3 \equiv -x_2; \quad f_4 \equiv a - x_1.$$

Эта задача решена Н. С. Синяковым [156] в условиях эксплуатации ГП «Поле-3». Время счета одного варианта около 2 мин. Ниже приведены значения жесткости  $K_n$  при различной глубине вреза ( $\rho = 1 - a$ ):

$a$	$K_n$	$K_m$	$a$	$K_n$	$K_m$
0.00	0.8737	0.8780	0.75	1.4862	—
0.25	1.0756	—	1.00	1.5707	1.5707
0.50	1.2971	—			

В качестве аппроксимирующих функций выбирались полиномы Чебышева с учетом четности по  $x_2$  (для  $\Phi_1$  — 42 координатные функции, для  $\Phi_2$  — 12). Интегрирование осуществлялось по методу Гаусса (512 узлов на половине области).

2. Рассмотренная в примере 2 п. 1 задача о кручении кругового стержня с прямолинейным врезом при использовании структуры  $u = \omega\Phi_1 + \omega^2\Phi_2$  не могла бы быть эффективно решена для вреза не вдоль оси симметрии (см. § 17 гл. 3). Приведем тестовый пример, в котором будет использована как упомянутая структура, так и новая.

Пусть область  $\Omega$  есть круг радиуса  $R = \pi$  с врезом вдоль части синусоиды (рис. 162)  $AOB$ .

Рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$\Delta u = 4, \quad x \in \Omega;$$

$$u|_{\partial\Omega} = \begin{cases} \pi_0^2, & x \in \partial\Omega_1, (\pi_0 = 3, 14); \\ x_1^2 + \sin^2 x_1, & x \in \partial\Omega_2, \end{cases}$$

где  $\partial\Omega_1$  — окружность  $\pi_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ ,  $\partial\Omega_2$  — синусоидальный врез  $BOA$ . Точное решение задачи  $u_r = x_1^2 + x_2^2$ .

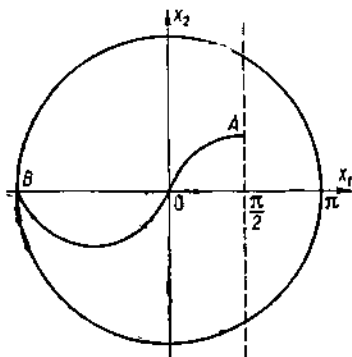


Рис. 162.

Пусть

$$f_1(x) \equiv \pi_0^2 - x_1^2 - x_2^2; \quad f_2(x) \equiv (x_2 - \sin x_1)(1 + \cos^2 x_1)^{-1/2};$$

$$S_i = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{V f_2^2 + f_3^2 - f_3}{2}} + f_2^2 \right\}^{1/2} - \frac{C_i - C_{3-i}}{2} f_2 \quad (i=1, 2);$$

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 1; \quad f_3 = \frac{\pi}{2} - x_1;$$

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^{n_j} C_{ij} T_{ij} \quad (j = 1, 2);$$

$$\omega \equiv f_1 \wedge_0 S; \quad S = S_1 \wedge_0 S_2,$$

где  $T_{ij}$  — произведения полиномов Чебышева, масштабированные по квадрату  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ .

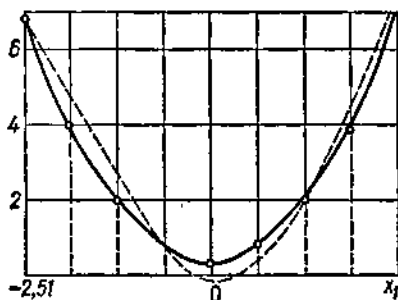


Рис. 163.

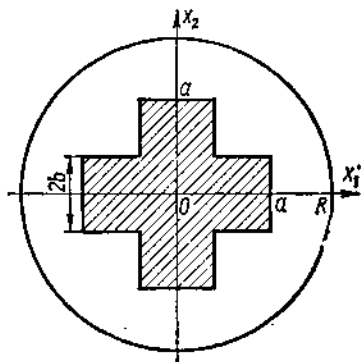


Рис. 164.

Применим последовательно две структуры:

$$u^{(1)} = \omega_1 \Phi_1 + \omega_2 \Phi_2 + u_0;$$

$$u^{(2)} = \omega \Phi_1 + \omega^2 \Phi_2 + u_0.$$

(4.147)

Задача сводится к минимизации функционала

$$I(u_1^{(i)}) = \int_{\Omega} [(\nabla u_1^{(i)})^2 + 8u_1^{(i)} + 2(\nabla u_1^{(i)}, \nabla u_0)] d\Omega,$$

где  $u_1^{(i)} = u^{(i)} - u_0$ ,  $u_0 = [\pi_0^2 f_1^{-1} + (x_1^2 + \sin^2 x_1) \varphi_1^{-1}] (f_1^{-1} +$

$$+ \varphi_1^{-1})^{-1} \quad (i = 1, 2), \quad \varphi_1 = S_1 + S_2; \quad \varphi_2 = 2 \sqrt{f_2^2 \vee_0 \bar{f}_3}.$$

Задача решалась в условиях эксплуатации ГП «Поле-3». Интегрирование осуществлялось методом Гаусса (400 узлов в области  $\Omega$ ). Количество аппроксимирующих функций (полиномов Чебышева) для каждой из неопределенных компонент выбрано равным 21. На рис. 163 приведены значения  $u_\tau$ ,  $u^{(1)}$ ,  $u^{(2)}$  в точках прямой  $x_2 =$

$= -0,628$  (сплошная кривая —  $u_1$ , точки —  $u''$ , штриховая кривая —  $u^{(2)}$ ). Таким образом, применение первой из структурных формул (4.147) приводит к лучшим результатам.

3. Рассмотрим вторую основную задачу теории упругости с неоднородными граничными условиями. Пусть в круглый цилиндрический стержень впаив жесткий неподвижный сердечник крестообразного сечения (рис. 164). Внешнюю границу  $\partial\Omega_1$  упругого тела зададим уравнением

$$\omega_1 \equiv R^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad (4.148)$$

а внутреннюю  $\partial\Omega_2$  — уравнением

$$\omega_2 \equiv [(a^2 - x_1^2) \wedge_0 (a^2 - x_2^2)] \wedge_0 [(b^2 - x_1^2) \vee_0 (b^2 - x_2^2)] = 0. \quad (4.149)$$

Предположим, что к поверхности цилиндра приложены касательные напряжения  $\tau_0$ , которые действуют в плоскостях, перпендикулярных к оси стержня, и под действием которых внешняя граница  $\partial\Omega_1$  совершает как жесткое целое поворот вокруг оси  $Ox_3$  на угол  $\theta$  против хода часовой стрелки. Перемещения на  $\partial\Omega_2$  предполагаются равными нулю. Требуется определить деформированное состояние внутри стержня, а также найти крутящий момент  $M(\theta)$  внешних сил.

Из постановки задачи следует, что

$$u|_{\partial\Omega} = \begin{cases} \theta(-x_2 i_1 + x_1 i_2), & x \in \partial\Omega_1; \\ 0, & x \in \partial\Omega_2. \end{cases} \quad (4.150)$$

Выписанные выше функции  $\omega_1$  и  $\omega_2$  можно использовать для продолжения вектора (4.150) внутрь области:

$$u^0(x_1, x_2) = \frac{\theta(-x_2 i_1 + x_1 i_2) \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}. \quad (4.151)$$

Очевидно, что  $u^0|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$ .

Взяв для  $\partial\Omega$  уравнение  $\omega \equiv \theta\omega_1\omega_2 = 0$ , приближенное решение задачи будем искать в виде

$$u_n = \theta(u^0 + \omega_1\omega_2 \sum_{l+j=0}^n C_{lj} x_1^l x_2^j);$$

$$C_{lj} = C_{lj}^{(1)} i_1 + C_{lj}^{(2)} i_2. \quad (4.152)$$

Учитывая симметрию задачи, некоторые константы можно положить равными нулю и искать решение в виде

$$u_n = \theta \left[ u^0 + \omega_1\omega_2 \sum_{k+p=0}^n (C_{2p, 2k+1}^{(1)} x_1^{2p} x_2^{2k+1} i_1 + C_{2k+1, 2p}^{(2)} x_1^{2k+1} x_2^{2p} i_2) \right]. \quad (4.153)$$

Приведем численные результаты, полученные в работе [47] по методу Рунца, при  $R = 1$  см;  $\nu = 0,3$ ;  $E = 2 \cdot 10^7$  Н/см<sup>2</sup>;  $a = 0,5$  см;  $b = 0,125$  см;  $n = 3$ . Интегрирование осуществлялось по формуле трапеций при  $\Delta x = \Delta y = 1/64$ . Значения коэффициентов  $C_{lj}$

получены следующие:  $C_{01}^{(1)} = -0,806$ ;  $C_{21}^{(1)} = 1,10$ ;  $C_{03}^{(1)} = 1,17$ ;  $C_{10}^{(2)} = 0,806$ ;  $C_{12}^{(2)} = -1,10$ ;  $C_{30}^{(2)} = -1,17$ .

Крутящий момент вычислялся по формуле

$$M = 4l \int_0^{2\pi} (\tau_{r\theta})|_{r=a} d\theta,$$

где  $l$  — длина стержня. Получено значение  $M = 8,85 \cdot 10^7 \theta l$  Н · м. Если  $a = 0,75$  см;  $b = 0,1875$ , то  $M = 19,9 \cdot 10^7 \theta l$  Н · м.

4. Примером неоднородной задачи является также задача о кручении стержней многосвязного поперечного сечения.

Пусть  $\partial\Omega_0 = (\omega_0 = 0)$  есть внешний контур многосвязной области  $\Omega$ , а  $\partial\Omega_i = (\omega_i = 0)$ ,  $i = 1, \dots, m$  — контуры непересекающихся между собой полостей  $\Omega_i$ , целиком содержащиеся внутри области  $\Omega$ . Функция напряжений  $u(x_1, x_2)$  на контурах  $\partial\Omega_0, \partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_m$  должна принимать постоянные и, вообще, различные значения  $C^{(0)}, C^{(1)}, \dots, C^{(m)}$  соответственно [111]. Одна из этих постоянных может быть выбрана произвольно, так как  $u(x_1, x_2)$  определяется с точностью до аддитивной постоянной. Положим, например,  $C^{(0)} = 0$ . Относительно функций  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m$  будем предполагать, что  $\omega_0 > 0$  внутри  $\Omega_0$ , а  $\omega_i > 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) вне соответствующих полостей.

Функция  $u$ , продолжающая указанные выше граничные условия, согласно формуле (3.10) может быть представлена в виде

$$u = \left( \sum_{i=1}^m C^{(i)} \frac{1}{\omega_i} \right) \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{\omega_i} \right)^{-1} + \omega\Phi, \quad (4.154)$$

где  $\omega = \omega_0 \omega_1 \dots \omega_m$ . (Полученная формула может рассматриваться как структура решения с неопределенной компонентой  $\Phi$ .) Особенность этой задачи состоит в том, что постоянные  $C^{(1)}, \dots, C^{(m)}$  также неизвестны и должны быть определены из условий

$$\oint_{\partial\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial \nu_i} dS_i = -2S_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (4.155)$$

где  $u$  — искомая функция напряжений,  $\nu_i$  — направление внешней нормали к  $\partial\Omega_i$ ,  $S_i$  — площадь полости  $\Omega_i$ . Формулы (4.155) представляют собой следствие теоремы Р. Бредта о циркуляции касательных напряжений [59].

Функция  $u(x_1, x_2)$ , как и в задаче кручения стержней односвязного профиля, должна в области  $\Omega = \Omega_0 \setminus (\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m)$  удовлетворять уравнению Пуассона —  $\Delta u = 2$ . После замены  $u = v + \varphi$ , где

$$\varphi = \left( \sum_{i=1}^m \frac{C^{(i)}}{\omega_i} \right) \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{\omega_i} \right)^{-1}, \quad (4.156)$$

уравнение Пуассона преобразуем к виду

$$-\Delta v = 2 + \Delta \varphi. \quad (4.157)$$

При этом искома функция  $v$  везде на границе  $\partial\Omega$  должна быть равна нулю. Уравнение (4.157) является уравнением Эйлера для функционала

$$I(v) = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 - 2(2 + \Delta \varphi)v \right] d\Omega. \quad (4.158)$$

Подставляя в (4.158)  $v = \omega\Phi$ , получаем функционал, минимум которого должен быть найден на множестве функций из  $C(\Omega \cup \partial\Omega) \cap C^1(\Omega)$ , не связанных каким-либо краевым условием.

Пусть  $\chi_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) есть некоторая полная в  $C(\Omega \cup \partial\Omega)$  система функций. Будем искать приближения  $\Phi$  в виде

$$\Phi \approx \Phi_n = \sum_{i=1}^n C_i \chi_i. \quad (4.159)$$

В этом случае функционал  $I(v)$  превращается в функцию  $I(C_1, \dots, C_n)$ , квадратичную относительно своих аргументов. Приравняв нулю частные производные этой функции, получим систему

$$\sum_{i=1}^n C_i a_{ij} + b_j = d_j, \quad (4.160)$$

где

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial(\omega\chi_i)}{\partial x_1} \frac{\partial(\omega\chi_j)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\omega\chi_i)}{\partial x_2} \frac{\partial(\omega\chi_j)}{\partial x_2} \right] d\Omega;$$

$$b_j = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \frac{\partial(\omega\chi_j)}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \frac{\partial(\omega\chi_j)}{\partial x_2} \right] d\Omega;$$

$$d_j = 2 \int_{\Omega} \omega\chi_j d\Omega. \quad (4.161)$$

Учитывая формулу (4.150), получаем

$$b_j = \sum_{s=1}^m C^{(s)} q_{sj}, \quad (4.162)$$

где

$$q_{sj} = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{\omega_s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{\omega_i} \right)^{-1} \right] \frac{\partial(\omega\chi_j)}{\partial x_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{1}{\omega_s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{\omega_i} \right)^{-1} \right] \frac{\partial(\omega\chi_j)}{\partial x_2} \right\} d\Omega.$$

Подставляя (4.162) в систему (4.160), получаем систему  $n$  линейных уравнений, связывающих  $m+n$  произвольных постоянных  $C_1, \dots, C_n, C^{(1)}, \dots, C^{(m)}$ . Недостающую систему  $m$  уравнений получаем из условий (4.155):

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} C_j + \sum_{s=1}^m \beta_{is} C^{(s)} = -2S_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (4.163)$$

где

$$\alpha_{ij} = \oint_{\partial\Omega_i} \frac{\partial}{\partial v_i} (\omega \chi_j) dl,$$

$$\beta_{is} = \oint_{\partial\Omega_i} \frac{\partial}{\partial v_i} \left[ \frac{1}{\omega_s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{\omega_i} \right)^{-1} \right] dl.$$

**Пример.** Рассмотрим задачу кручения квадратного стержня со стороной  $2a$  и квадратным отверстием со стороной  $2b$  (рис. 165). Для внешнего  $\partial\Omega_0$  и внутреннего  $\partial\Omega_1$  контуров можно написать уравнения

$$\omega_0 = (a^2 - x_1^2)(a^2 - x_2^2) = 0;$$

$$\omega_1 = (b^2 - x_1^2)(b^2 - x_2^2) = 0. \quad (4.164)$$

Функция склейки граничных значений функции напряжений может быть написана в виде

$$\varphi = \frac{C^{(1)}\omega_0}{\omega_1 + \omega_0}. \quad (4.165)$$

Выберем следующую аппроксимирующую последовательность:  $\chi_1 \equiv 1$ ;  $\chi_2 \equiv x_1^2$ ;  $\chi_3 \equiv x_2^2$ ;  $\chi_4 \equiv x_1^4$ ;  $\chi_5 \equiv x_1^2 x_2^2$ ;  $\chi_6 \equiv x_2^4$ , ... Если ограничимся шестью координатными функциями, то с учетом симметрии получим следующую структуру решения:

$$u \approx u_0 \equiv \frac{C^{(1)}\omega_0}{\omega_1 + \omega_0} + \omega_0 \omega_1 [C_1 + C_2(x_1^2 + x_2^2) + C_3 x_1^2 x_2^2 + C_4(x_1^4 + x_2^4) + C_5 x_1^2 x_2^2(x_1^2 + x_2^2) + C_6(x_1^6 + x_2^6)].$$

Приведем численные результаты, полученные И. В. Гончарюком [116]. Дифференцирование выполнялось точно, интегрирование проводилось по формуле прямоугольников с шагом  $h = 0,025$ . Для размеров  $a = 2$ ;  $b = 1$  получены следующие значения коэффициентов:  $C^{(1)} = 1,82$ ;  $C_1 = 0,538$ ;  $C_2 = -0,0995$ ;  $C_3 = 0,0330$ ;  $C_4 = 0,0330$ ;  $C_5 = 0,00403$ ;  $C_6 = -0,00745$ . Жесткость на кручение определялась по формуле

$$K = 2 \left( \int_{\Omega} u d\Omega + \sum_{i=1}^m C^{(i)} S_i \right). \quad (4.166)$$

Для указанного случая получено  $K = 34,1$ . В работе [6] приведено значение  $K = 32,95$ , полученное другим методом.

## § 8. Контактные задачи теории упругости

Контактные задачи теории упругости принадлежат к числу смешанных задач и их решение сопряжено со значительными трудностями. Точные решения удалось получить сравнительно для немногих контактных задач и почти все они относятся к телам простой формы [22, 63, 90, 91]. Между тем на практике требуется решать задачи контактного типа для тел весьма сложной формы. В последние годы интенсивно развиваются различные приближенные методы решения контактных задач, среди которых наиболее плодотворными оказались асимптотические [20], ортогональных



многочленов [99], дуальных интегральных уравнений [178]. Эти методы существенно связаны с формой и размерностью рассматриваемых областей. Изменение геометрии области и ее размерности обычно приводит к необходимости изменения метода. До появления метода  $R$ -функций прямые методы к решению контактных задач теории упругости почти не применялись. Это объясняется тем, что контактные задачи характеризуются рядом особенностей, которые не всегда удается учесть при непосредственном применении прямых методов. В первую очередь это относится к особенностям решения в граничных и угловых точках площадки контакта, а в некоторых случаях и сама эта площадка заранее неизвестна. Приближенные решения, полученные без учета этих особенностей, могут неверно отражать картину напряженно-деформированного состояния в контактирующих телах и в лучшем случае можно рассчитывать на их слабую сходимость к точному решению.

Использование теории  $R$ -функций определило новый подход к приближенному решению контактных задач, при котором учет геометрических форм контактирующих тел существенно упростился [100, 128]. При этом подходе появились новые возможности для учета особенностей при конструировании приближенных решений. (Об этом уже говорилось в § 17 гл. 3.) Результаты в этой области приведены в ряде работ [14, 128, 155 и др.].

Приведем некоторые примеры решения контактных задач.

1. Рассмотрим двухмерную задачу о контакте без трения штампов, имеющих гладкие основания, и упругого тела  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ . Совокупность участков  $\partial\Omega_i^t$  ( $i = 1, \dots, m$ ) контакта тела  $\Omega$  со штампами обозначим через  $\partial\Omega_1$ , а остальную часть границы  $\partial\Omega$  — через  $\partial\Omega_2$ . Предположим, что на  $\partial\Omega_2$  внешние воздействия отсутствуют, а массовые силы равны нулю. Требуется определить напряженно-деформированное состояние внутри  $\Omega$  и напряжения на площадке контакта тел.

Как и в предыдущих задачах, равновесие тела  $\Omega$  описывается уравнениями Ламе (3.404). Краевые условия для принятых допущений имеют вид

$$(u, v)|_{\partial\Omega_i^t} = h_i^0(x_1, x_2); \quad (4.167)$$

$$\sigma_n|_{\partial\Omega_2} = 0; \quad \tau_n|_{\partial\Omega} = 0 \quad (v = n),$$

где  $h_i^0(x_1, x_2)$  — функция, описывающая поверхность  $i$ -го штамп после вдавливания.

В соответствии с известной теоремой о функционале энергии [10] сформулированная краевая задача сводится к нахождению минимума функционала

$$I(u) = \int_{\Omega} \left\{ \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right\} d\Omega \quad (4.168)$$

на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям (4.167).

Если в процессе вдавливания штампов площадки контакта можно считать неизменными, то к краевой задаче (3.404), (4.167) или соответствующему функционалу (4.168) с краевыми условиями (4.167) необходимо присоединить условия равновесия штампов. В частности, должны выполняться условия

$$\int_{\partial\Omega_i^i} \sigma_n(x_1, x_2) d\partial\Omega_i^i = P_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (4.169)$$

где  $P_i$  — сила, прижимающая  $i$ -й штамп к упругому телу  $\Omega$ .

Если параметры площадки контакта заранее неизвестны и определяются после деформации упругого тела  $\Omega$ , то к указанным условиям необходимо присоединить условия неразрывности нормальных напряжений в точках отрыва тела от штампа:

$$\sigma_n(x_1, x_2) = 0. \quad (4.170)$$

Условие (4.170) позволяет определять неизвестные границы (или участки границ) площадок контакта. В дальнейшем рассматриваются важные для практики задачи, в которых зоны контакта либо остаются

неизменными в процессе нагружения, либо изменяются после приложения нагрузки. Пользуясь результатами § 12 гл. 3, структуру решения поставленной задачи представим в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= P_0 - \omega \left[ \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_2} \right)^2 \right] D_1(P_0) + fT_1(P_0) + \\ &+ gD_1(Q_0) + \omega \left[ \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \right)^2 \right] T_1(Q_0); \quad (4.171) \\ u_2 &= Q_0 - \omega \left[ \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \right)^2 \right] D_1(Q_0) - fT_1(Q_0) + \\ &+ gD_1(P_0) + \omega \left[ \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_2} \right)^2 \right] T_1(P_0), \end{aligned}$$

где

$$f = 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \frac{\partial\omega}{\partial x_2}; \quad g = \omega \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \frac{\partial\omega}{\partial x_2};$$

$$P_0 = -h \frac{\partial\omega}{\partial x_1} - \Phi_3 \frac{\partial\omega}{\partial x_2} + \omega_1 \Phi_1;$$

$$Q_0 = -h \frac{\partial\omega}{\partial x_2} + \Phi_3 \frac{\partial\omega}{\partial x_1} + \omega_1 \Phi_2.$$

Здесь  $\omega = 0$ ;  $\omega_1 = 0$  и  $\omega_2 = 0$  — нормализованные уравнения  $\partial\Omega$ ,  $\partial\Omega_1$  и  $\partial\Omega_2$  соответственно,  $\Phi_i$  — неопределенные компоненты структуры решения (4.171),  $D_1$  и  $T_1$  — операторы, введенные в § 3 гл. 3, а функция  $h$  представляет собой склейку функций  $h_i^0$ . В данном случае используем формулу [111]

$$h = \sum_{i=1}^m \left[ \left( \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^m \omega_j' \right) \left( \omega_i' + \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^m \omega_j' \right)^{-1} \right] h_i^0. \quad (4.172)$$

(Выражение, стоящее в квадратных скобках, на участке  $\partial\Omega_i$  равно единице, а на остальных участках — нулю.)

Рассмотрим вначале три тестовые задачи.

1. Контактная задача для упругого прямоугольника. Пусть  $\Omega$  есть прямоугольник (рис. 166, а).

Состояние равновесия тела  $\Omega$  описывается уравнениями равновесия Ламе при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \tau_n(x_1, \pm b) = 0; \quad \tau_n(\pm a, x_2) = 0; \quad \sigma_n(\pm a, x_2) = 0; \quad (4.173) \\ u_2(x_1, \pm b) = \mp h, \end{aligned}$$

где  $h$  — половина расстояния, на которое сблизились верхний и нижний штампы. С учетом этих условий структура решения (4.171) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} u_1 = \Phi_1 - \omega \left[ \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_2} \right)^2 \right] D_1(\Phi_1) + f T_1(\Phi_1) + \\ + g D_1 \left( \omega_1 \Phi_2 - \frac{h}{b} x_2 \right) + \omega \left[ \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_2} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \right)^2 \right] T_1 \left( \omega_1 \Phi_2 - \frac{h}{b} x_2 \right); \\ u_2 = \omega_1 \Phi_2 - \frac{h}{b} x_2 - \omega \left[ \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \right)^2 \right] D_1 \left( \omega_1 \Phi_2 - \right. \\ \left. - \frac{h}{b} x_2 \right) - f T_1 \left( \omega_1 \Phi_2 - \frac{h}{b} x_2 \right) + g D_1(\Phi_1) + \\ + \omega \left[ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \right)^2 \right] T_1(\Phi_1), \quad (4.174) \end{aligned}$$

$$\text{где } f = 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \omega \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \frac{\partial\omega}{\partial x_2}; \quad g = \omega \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \frac{\partial\omega}{\partial x_2}.$$

Геометрическую информацию учтем с помощью нормализованных до первого порядка неравенств:

$$\Omega_1 = \left[ \omega_1 \equiv \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2) \geq 0 \right] \text{ (горизонтальная полоса ширины } 2b);$$

$$\Omega_2 = \left[ \omega_2 \equiv \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2) \geq 0 \right] \text{ (вертикальная полоса ширины } 2a);$$

$$\Omega = \{ \omega \equiv \omega_1 \wedge \omega_2 \geq 0 \} \text{ (рассматриваемый прямоугольник).}$$

Неопределенные компоненты  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  будем приближать линейными комбинациями масштабированных полиномов Чебышева с учетом симметрии решения относительно осей координат:

$$\Phi_1 \approx \sum_{k=1}^{n_1} C_k^{(1)} \varphi_k^{(1)}, \quad \Phi_2 \approx \sum_{k=1}^{n_2} C_k^{(2)} \varphi_k^{(2)}, \quad (4.175)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(1)}(x_1, x_2) &= T_{2i+1}\left(\frac{x_1}{a}\right) T_{2j}\left(\frac{x_2}{b}\right); \\ \varphi_k^{(2)}(x_1, x_2) &= T_{2i}\left(\frac{x_1}{a}\right) T_{2j+1}\left(\frac{x_2}{b}\right) \left(k = \frac{1}{2}(i+j+1)(i+j+2) - i, \right. \\ &\quad \left. i+j = 0, 1, 2, \dots\right). \end{aligned} \quad (4.176)$$

Подставляя (4.175) в (4.174), получаем систему координатных функций

$$u_1 = u_{01} + \sum_{i=1}^n C_i f_i; \quad u_2 = u_{02} + \sum_{i=1}^n C_i \psi_i, \quad (4.177)$$

где

$$n = n_1 + n_2, \quad C_i = \begin{cases} C_i^{(1)}, & i \leq n_1; \\ C_{i-n_1}^{(2)}, & i > n_1; \end{cases} \quad (4.178)$$

$$\begin{aligned} u_{01} &= -\frac{h}{b} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \left[ \frac{\omega_1 + 2\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^2 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 \right]; \\ u_{02} &= -\frac{h}{b} x_2 + \frac{h}{b} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \left[ \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 \right]; \\ f_i &= \varphi_i^{(1)} - \omega \left[ \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^2 \right] D_1(\varphi_i^{(1)}) + f T_1(\varphi_i^{(1)}) + \\ &+ g D_1(\omega_1 \varphi_{i-n_1}^{(2)}) + \omega \left[ \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^2 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 \right] T_1(\omega_1 \varphi_{i-n_1}^{(2)}); \quad (4.179) \\ \psi_i &= g D_1(\varphi_i^{(1)}) + \omega \left[ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 \right] T_1(\varphi_i^{(1)}) + \\ &+ \omega_1 \varphi_{i-n_1}^{(2)} - \omega \left[ \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 \right] D_1(\omega_1 \varphi_{i-n_1}^{(2)}) - \\ &- f T_1(\omega_1 \varphi_{i-n_1}^{(2)}) \quad (\varphi_\alpha^{(2)} \equiv 0, \forall \alpha < 0, \varphi_\beta^{(1)} \equiv 0, \forall \beta > n_1). \end{aligned}$$

Вариационный метод Ритца приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно параметров  $C_i$ :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} C_j = b_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4.180)$$

Для коэффициентов  $a_{ij}$  и  $b_i$  получаем формулы

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \left\{ \lambda \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial f_j}{\partial x_1} + \right. \right.$$

$$+ \frac{\partial \psi_l}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_l}{\partial x_2} + \mu \left( \frac{\partial \psi_l}{\partial x_1} + \frac{\partial f_l}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial \psi_l}{\partial x_1} + \frac{\partial f_l}{\partial x_2} \right) d\Omega; \quad (4.181)$$

$$b_l = \int_{\Omega} \left\{ \lambda \left( \frac{\partial u_{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{02}}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial f_l}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_l}{\partial x_2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial u_{01}}{\partial x_1} \frac{\partial f_l}{\partial x_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial u_{02}}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_l}{\partial x_2} \right) + \mu \left( \frac{\partial u_{02}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial \psi_l}{\partial x_1} + \frac{\partial f_l}{\partial x_2} \right) \right\} d\Omega.$$

Постоянная заглабления штампа  $h$  может быть найдена по формуле

$$h = P \left[ \int_{-l}^l \sigma_{x_1}(x_1, b) dx_1 \right]^{-1}, \quad (4.182)$$

где  $P$  — прижимающая штамп сила.

Приведем результаты численных расчетов, выполненных Н. С. Синекопом, при  $a = 1,0$ ;  $b = 1,0$ ;  $\lambda = 0,57692$ ;  $\mu = 0,38464$ .

Таблица 12

$x_2$	$x_1$				
	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
1,0	0,5020	0,5027	0,5045	0,5070	0,5049
	0,5014	0,5013	0,5011	0,5022	0,5019
	0,5008	0,5008	0,5005	0,4986	0,5010
0,5	0,4984	0,4988	0,4976	0,4967	0,4961
	0,5008	0,5008	0,5015	0,5047	0,5057
	0,5001	0,5002	0,5004	0,5000	0,5028
0,0	0,5000	0,5028	0,5019	0,5053	0,5050
	0,5000	0,4985	0,4986	0,4967	0,4956
	0,5000	0,5000	0,5014	0,5016	0,5000

Вычисление квадратур выполнялось по формуле Гаусса. Общее число узлов интегрирования в области  $\Omega$  составило 1600. Фактически вычисления в связи с симметрией задачи выполнялись в 400 узлах. Погрешность вычисления квадратур для всех коэффициентов системы не превышала 0,01%.

В табл. 12 приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_n$  в сечениях  $x_2 = \text{const}$ , причем каждой точке  $(x_1, x_2)$  соответствуют три числа, полученные для  $n = 6$ ; 10; 15. Точное значение  $\sigma_n$  во всех точках равно 0,5 [59].

Из таблицы видно, что точность приближения возрастает с увеличением числа координатных функций и при  $n = 10$  отклонение не превышает 0,28%.

2. Контактная задача для упругой полосы рассматривалась в работе [20] при  $l < b$  (Рис. 166, б). Ниже эта же задача решается приближенно для конечной полосы. Моделирование бесконечной полосы осуществляется путем выбора достаточно большого значения параметра  $a$ . При больших значениях результаты, полученные

приближенным методом, должны согласоваться с результатами, полученными в [20]. В этой задаче система краевых условий имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_2(x_1, \pm b) = \mp h, \quad |x_1| \leq l; \\ \sigma_n(x_1, \mp b) = 0, \quad |x_1| > l; \\ \sigma_n(\pm a, x_2) = 0. \end{aligned} \quad (4.183)$$

Для решения задачи используем структуру решения (4.174). Нормализованные до первого порядка уравнения участков границы представим в виде

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2) \wedge_0 \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2) = 0; \\ \omega_1 &\equiv \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2) \vee_0 \frac{1}{2l} (x_1^2 - l^2) = 0; \\ \omega_2 &\equiv \omega \vee_0 \frac{1}{2l} (l^2 - x_1^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.184)$$

Функции  $\omega$ , и  $\omega_2$  обращаются в нуль не только на соответствующих участках  $\partial\Omega_1$  (участок контакта) и  $\partial\Omega_2$  (свободная граница тела), но и на прямых  $x_1 = \pm l$  вне области  $\Omega$ . Но поскольку поле рассматривается лишь внутри области  $\Omega$ , такой выбор функций  $\omega_1$  и  $\omega_2$  вполне оправдан. Можно было бы написать уравнения участков  $\partial\Omega_1$  и  $\partial\Omega_2$  так, чтобы функции  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не имели нулей вне  $\Omega$ , но это привело бы к более громоздким формулам.

Для учета особенностей у краев штампов построенную ранее функцию  $h$  заменим функцией

$$h_1 = \frac{2}{\pi} h \operatorname{arccctg} \varphi, \quad (4.185)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{1}{l\sqrt{2}} \times \\ \times \sqrt{\sqrt{\left[ (x_1^2 - l^2) + \left( \frac{x_2^2 - b^2}{2b} \right)^2 \right]^2 + 4l \left( \frac{x_2^2 - b^2}{2b} \right)^2 + x_1^2 - l^2 +} \\ + \left( \frac{x_2^2 - b^2}{2b} \right)^2}. \end{aligned}$$

Действительно, при таком выборе функции  $h$  значения осадки под штампами сохраняется  $\left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arccctg} \varphi = 1 \right.$  на  $\partial\Omega_1$ ), однако при вычислении давления под штампами (которое пропорционально  $\left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|_{\partial\Omega_1}$ ) возникнут особенности порядка  $r^{-1/2}$ , где  $r$  — расстояние до граничной точки площадки контакта. Именно такие особенности и должны быть у точного решения задачи.

Отметим еще один момент. Чтобы иметь возможность увеличивать длину полосы и сохранять при этом хорошую аппроксимацию

неопределенных компонент в «наиболее напряженной» части полосы  $[-a_1 \leq x_1 \leq a_1, -b \leq x_2 \leq b]$ , где  $a_1$  — близко по значению к  $l$ , будем выбирать функции  $\varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(2)}$  вместо (4.176) в виде

$$\varphi_i^{(1)} = \eta_{2i+1}(x_1) T_{2i+1}\left(\frac{x_1}{a_1}\right) \times T_{2j}^*\left(\frac{x_2}{b}\right);$$

$$\varphi_i^{(2)} = \eta_{2i}(x_1) T_{2i}\left(\frac{x_1}{a_1}\right) \times T_{2j}\left(\frac{x_2}{b}\right),$$

где

$$\eta_n(x_1) = [1 + (|x_1^2 - a_1^2| + x_1^2 - a_1^2)^n]^{-1}.$$

Нетрудно убедиться в том, что  $\eta_m(x_1) \equiv 1$  при  $|x_1| \leq a_1$ , а при  $x_1 \rightarrow a$   $\eta_m(x_1)$  компенсирует рост функции  $T_m(x_1)$ .

При численной реализации принято  $l = 0,5; b = 1; a = b,$

$2b, 3b$ . Распределение контактных напряжений приведено на рис. 167, а. Давлению под штампом при  $a = \infty$  соответствует штриховая кривая [154—156], которая сливается с приближенным распределением при  $a = 3b$ . Расчеты проведены при 21 координатной функции, интегралы вычислены по формулам Гаусса (400 точек на четверть области).

3. Контактная задача для полосы с круговым отверстием (рис. 167, б). Такая задача рассматривалась в [156] при  $l < b$ . Сохраним на внешнем контуре прямоугольника  $[-a, a] \times [-b, b]$  краевые условия (4.173). Кроме того, положим

$\sigma_n = 0; \tau_n = 0$  при  $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ . Сохраним без изменений все формулы предыдущей задачи, заменив функции  $\omega$  и  $\omega_2$  на функции

$$\omega^* = \omega \wedge_0(x_1^2 + x_2^2 - R^2); \quad \omega_2^* = \omega_2 \wedge_0(x_1^2 + x_2^2 - R^2)$$

соответственно.

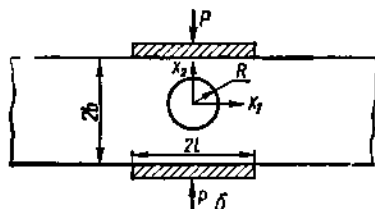
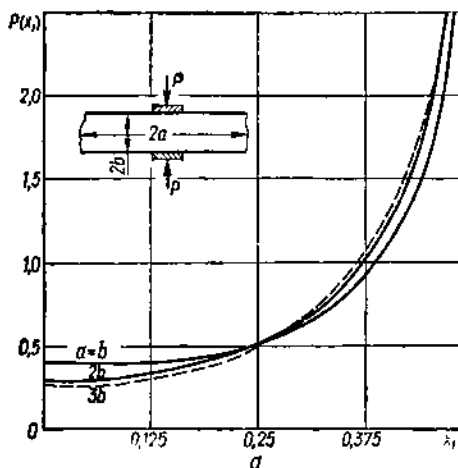


Рис. 167.

Таблица 13

$x_1$	$l/b = 0,5$		$l/b = 0,25$	
	$b = 3$	$b = 2,5$	$b = 3$	$b = 2,5$
0,0	0,451 0,459	0,297 0,304	0,586 0,593	0,559 0,553
0,5	0,642 0,648	0,574 0,570	0,706 0,711	0,692 0,689
0,9	1,711 1,702	1,918 1,913	1,531 1,522	1,586 1,578

В табл. 13 при  $R = 1$ ,  $a = 3b$  и 28 координатных функциях приведены контактные напряжения (над чертой — вычисленные значения, под чертой — результаты работы [156]). Перейдем к решению новых контактных задач.

4. Сжатие упругого прямоугольника с боковыми вырезами (рис. 168, а). По верхнему и нижнему основаниям тело  $\Omega$  сжимается плоскими гладкими штампами. Сохраним обозначения  $\partial\Omega = (\omega = 0)$ ;  $\partial\Omega_1 = (\omega_1 = 0)$  и  $\partial\Omega_2 = (\omega_2 = 0)$  для границы тела,

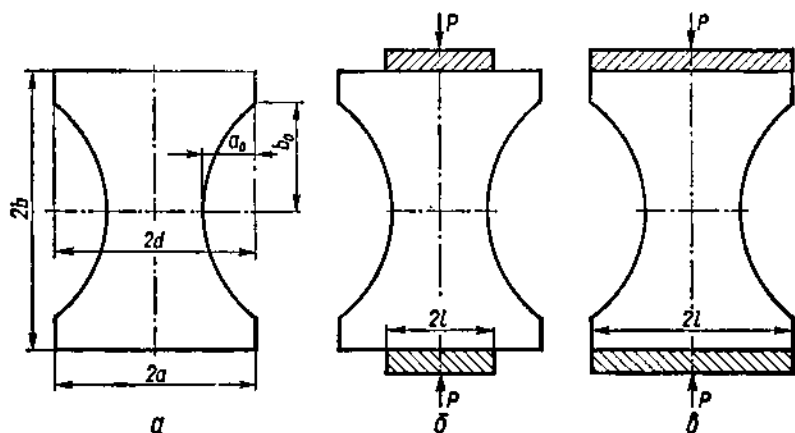


Рис. 168.

участка контакта и свободной границы соответственно. Граничные условия имеют тот же вид, что и в предыдущих задачах.

Рассмотрим влияние эллиптических вырезов на характер напряженно-деформированного состояния и контактные напряжения. Пусть

$$f_1 \equiv \frac{1}{2a} (a^2 - x_1^2); \quad f_2 \equiv \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2);$$

$$g_1 \equiv 1 - \frac{(x_1 - d)^2}{a_0^2} - \frac{x_2^2}{b_0^2}; \quad f_3 \equiv g_1 (g_1^2 + |\nabla g_1|^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$g_2 \equiv 1 - \frac{(x_1 + d)^2}{a_0^2} - \frac{x_2^2}{b_0^2}; \quad f_4 \equiv g_2 (g_2^2 + |\nabla g_2|^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$f_5 \equiv \frac{1}{2l} (l^2 - x_1^2).$$

Если ширина штампа меньше ширины сжимаемого тела (рис. 168, б), то положим

$$\omega \equiv (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (\bar{f}_3 \vee_0 \bar{f}_4); \quad \omega_1 \equiv f_2 \vee_0 \bar{f}_5; \quad (4.186)$$

$$\omega_2 \equiv [(f_1 \wedge_0 f_2) \vee_0 f_5] \vee_0 (\bar{f}_3 \vee_0 \bar{f}_4).$$



Если  $l > a$  (рис. 168, в), то

$$\omega_1 \equiv f_2, \quad \omega_2 \equiv f_1 \wedge_0 (\overline{f_2 \vee_0 f_1}). \quad (4.187)$$

Неопределенные компоненты  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  структуры (4.174) находим по той же методике, что и при решении предыдущих задач. Руководствуясь анализом точности, полученной при решении тестовых задач, количество координатных функций примем равным 21. Интегрирование будем выполнять по формуле Гаусса (400 точек).

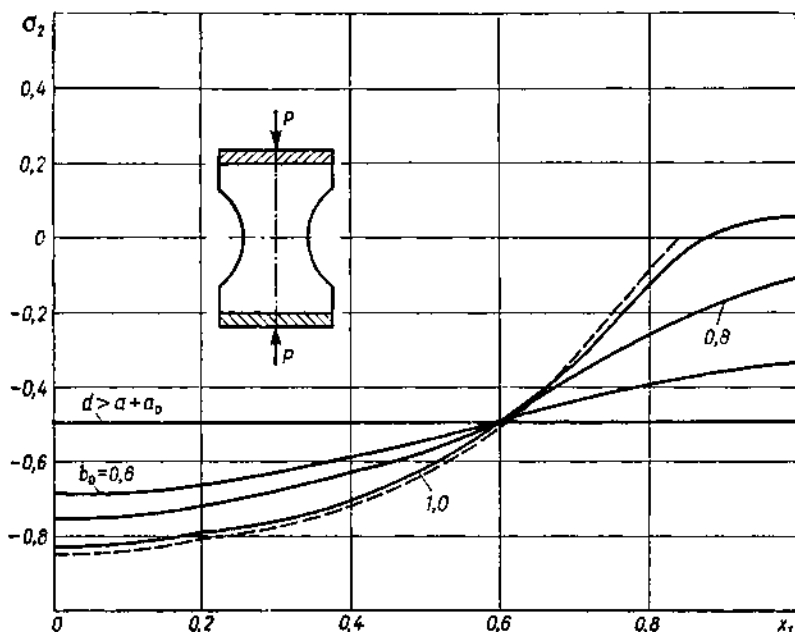


Рис. 169.

на четверть области  $\Omega$ ). Для контроля точности используем условия статического равновесия

$$P = \int_{-a_1}^{a_1} \sigma_2(x_1, x_{2i}) dx_1 \quad (x_{2i} = ib/m, \quad i = 1, \dots, m). \quad (4.188)$$

(Сила  $P$ , действующая на штамп, уравновешивается суммарным усилием (4.188) в любом сечении  $x_2 = \text{const}$ ).

На рис. 169 приведены эпюры контактных напряжений, полученные при  $a = 1$ ;  $b = 1,2$ ;  $l > a$ ;  $d = 1$ ;  $a_0 = 0,5$ ;  $b_0 = 0,6$ ;  $0,8$ ;  $1,0$ ;  $P = 1$ ;  $\lambda = 0,57692$ ;  $\mu = 0,38454$ . Значения суммарных напряжений в сечениях  $x_2 = ib/m$  ( $m = 4$ ) приведены в табл. 14.

Из рис. 169 видно, что уменьшение размеров эллиптических врезов приводит к более равномерному распределению контактных напряжений по ширине основания штампа. С ростом высоты вреза напряжения под площадкой контакта перераспределяются и начиная

с некоторого момента становятся положительными по краям площадки контакта. Это означает, что при некоторых размерах эллиптических врезов происходит отрыв основания штампа от упругого тела. Естественно, что этот отрыв приводит к перераспределению напряженно-деформированного состояния, и полученное по описанной выше методике решение в случае положительных

Таблица 14

$a_0$	$l$				
	0	1	2	3	4
0,6	0,996	1,004	0,998	0,996	1,003
0,8	0,994	1,007	0,993	0,993	1,000
1,0	1,001	1,008	0,996	0,996	1,006

нормальных напряжений под площадкой контакта надо уточнить. Прежде всего необходимо заменить функции  $\omega_1, \omega_2$  (4.187) на функции (4.186). При этом значение  $l$  неизвестно.

Применим метод последовательных приближений, считая  $l = l_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Значение  $l_k$  будем выбирать, руководствуясь предыдущими результатами в зависимости от наличия или отсутствия

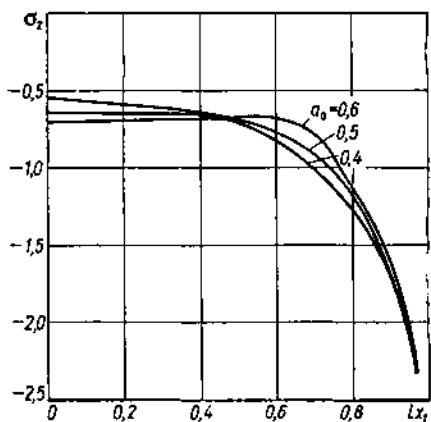


Рис. 170.

положительных нормальных напряжений на участке  $(-l_k, l_k)$ . Напряжения должны быть ограниченными, поэтому нет необходимости вводить функции для учета особенностей типа (4.185). Окончанию итераций должно соответствовать выполнение условия  $\sigma_n(\pm l_k, \pm b) \approx 0$ .

Пусть при сохранении значений всех остальных параметров в рассмотренном выше примере  $a_0 = 0,5; b_0 = 1$ . Ширина площадки контакта  $l_k = 0,83$  получена на третьем шаге с точностью 0,01%. Распределение контактных напряжений для этого случая

отмечено на рис. 169 штриховой кривой.

Пусть значение  $l$  достаточно мало. (Участки  $\partial\Omega_1$  и  $\partial\Omega_2$  описываются формулами (4.186), а на концах площадки контакта напряжения бесконечно велики.) При построении структуры решения введена функция особенностей (4.185). Расчеты проведены при сохранении значений геометрических и физических параметров, выбранных в предыдущих примерах, но полагалось  $l = 0,6; b_0 = 1,1; a_0 = 0,4; 0,5; 0,6$ . В табл. 15 приведены значения суммарных напряжений в сечениях тела  $x_2 = ib/m$  при  $m = 4$ .

На рис. 170 приведены эпюры контактных напряжений при разных значениях  $a_0$ .

Многочисленные примеры решения контактных (в том числе пространственных) задач теории упругости с помощью теории  $R$ -функций приведены в работах [128, 156]. Приведенные выше сравнительно простые примеры отражают возможности развиваемой нами методики и подобраны с таким расчетом, чтобы отметить некоторые особенности «технологии» применения  $R$ -функций. В сложных задачах за громоздкими выкладками заметить эти особенности не всегда просто. Кроме того, выше приведены лишь такие примеры, которые легко реализуются с помощью ГП «Поле-3», позволяющего оперативно проводить численные эксперименты (изменять количество координатных функций, густоту сетки интегрирования, тип аппроксимирующих полиномов и т. д.) и на их основе

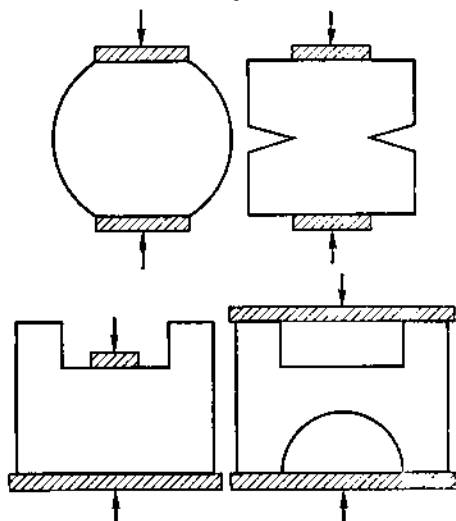


Рис. 171.

составлять представление о степени точности полученных результатов. Благодаря ГП «Поле-3» можно легко менять геометрическую информацию. Например, взяв за основу пакет перфокарт в последнем примере, можно, изменяя или добавляя несколько директив, решить, например, задачи, для чертежей, указанных на рис. 171.

Таблица 15

$a_0$	$i$				
	0	1	2	3	4
0,4	0,989	0,993	0,987	1,003	1,083
0,5	0,989	0,993	0,988	1,003	1,108
0,6	0,993	0,996	0,991	0,999	1,080

Так же просто решаются с помощью ГП «Поле-3» и осесимметричные задачи. Более сложно решать пространственные (трехмерные) задачи. В настоящее время близится к завершению аналогичный ГП и для пространственных задач. Создание такого ГП не означает, однако, что с его помощью смогут получать достоверные результаты не специалисты в области теории упругости. Достаточно вспомнить рассмотренный выше пример, в котором наблюдается отставание

упругого тела от штампа и должны исчезнуть особенности типа  $r^{-1/2}$  у кромки площадки контакта. При переходе к пространственным задачам теории упругости трудности осмысливания результатов счета неизмеримо возрастают.

### § 9. Две пространственные задачи с неполностью известными границами площадок контакта

Рассмотрим задачи о вдавлении штампов в упругое полупространство [22]. При симметричном и несимметричном нагружениях штампов, в предположении, что площадка контакта в плане есть круг, задача рассматривалась в ряде работ [1, 63, 90, 91, 189]. Проведем дополнительное исследование, которое позволит с помощью метода  $R$ -функций получить приближенное решение, когда область контакта — часть круга, а линии отставания упругого полупространства от подошвы штампа заранее неизвестны.

1. Как уже отмечалось в § 17 гл. 3, если упругое тело является упругим полупространством, можно свести сложную задачу решения системы уравнений Ламе к более простой задаче нахождения в полупространстве (пусть это будет полупространство  $x_3 \geq 0$ ) гармонической функции  $\varphi$ , удовлетворяющей следующим граничным условиям:

$$\varphi(x_1, x_2, 0) = w(x_1, x_2); \quad (x_1, x_2) \in \partial\Omega_1; \quad (4.189)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = 0; \quad (x_1, x_2) \notin \partial\Omega_1; \quad (4.190)$$

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{R}\right); \quad R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \infty, \quad (4.191)$$

где  $\partial\Omega_1$  — область контакта штампа с упругим полупространством,  $x_3 = w(x_1, x_2)$  — уравнение поверхности основания штампа после вдавления его в полупространство.

Искомое давление  $p(x_1, x_2)$  под штампом определяется с помощью функции  $\varphi(x)$  по формуле

$$p(x_1, x_2) = - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0}, \quad (4.192)$$

где  $E$  — модуль Юнга, а  $\nu$  — коэффициент Пуассона упругого полупространства.

Для кругового в плане наклонного штампа с плоским основанием В. М. Абрамовым [1] получено точное решение

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \left[ w_0 + \operatorname{arccctg} \sigma - \gamma x_1 \left( \frac{\sigma}{1+\sigma^2} - \operatorname{arccctg} \sigma \right) \right], \quad (4.193)$$

где  $w_0$  и  $\gamma$  — параметры, характеризующие соответственно осадку и наклон штампа,  $a$  — радиус площадки контакта, а функция  $\sigma$  определяется формулой

$$\sigma \equiv \frac{1}{a\sqrt{2}} \sqrt{V(r^2 - a^2 - x_3^2)^2 + 4a^2x_3^2 + r^2 - a^2 - x_3^2}. \quad (4.194)$$

Решение (4.193) получено в предположении, что круговой штамп всей своей подошвой контактирует с полупространством.

Нетрудно установить, что функция  $\sigma$  удовлетворяет условиям

$$\sigma(r, 0) = 0 \quad (r \leq a); \quad \left. \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0 \quad (r > a); \quad (4.195)$$

$$\sigma(r, x_3) = O(R); \quad R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \infty.$$

Отмеченные свойства  $\sigma$  будут существенно использованы при построении структуры решения рассматриваемой задачи для полупространства.

Пусть площадка контакта есть  $\partial\Omega_1$ , остальная часть границы упругого полупространства —  $\partial\Omega_2$ , а  $\Gamma$  — граница на плоскости  $x_3 = 0$ , разделяющая  $\partial\Omega_1$  и  $\partial\Omega_2$ , и пусть  $\omega(x_1, x_2) = 0$  — уравнение  $\Gamma$  на плоскости  $x_1Ox_2$ . Построим функцию  $\omega_1 = \omega_1(x_1, x_2, x_3)$  такую, что

$$\omega_1(x_1, x_2, 0) \equiv \omega(x_1, x_2); \quad \left. \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0. \quad (4.196)$$

Такая функция может быть построена по тем же правилам, что и функция  $\omega(x_1, x_2)$ , путем использования условных  $R$ -функций (см. § 7 гл. 2), например

$$x_1 \wedge_{\alpha, x_3^2 x_2} \equiv \frac{1}{1+\alpha} (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\alpha x_1 x_2});$$

$$x_1 \vee_{\alpha, x_3^2 x_2} \equiv \frac{1}{1+\alpha} (x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\alpha x_1 x_2}), \quad (4.197)$$

где  $\alpha = \alpha(x_1, x_2, x_3)$ ,  $|\alpha| < 1$  при  $x_3 = 0$ .

Введем функцию

$$\sigma_1 \equiv \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{(x_3^2 - \omega_1^2)^2 + 4a^2 x_3^2 + x_3^2 - \omega_1^2} \right]} \psi_0(x_1, x_2, x_3), \quad (4.198)$$

где  $\psi_0 \in C^2$  — ограниченная на бесконечности функция. Нетрудно убедиться в том, что функция  $\sigma_1$  удовлетворяет тем же условиям, что и функция  $\sigma$ , но уже не для круга  $a^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$ , а для области  $\partial\Omega = (\omega \geq 0)$ .

Структуру решения краевой задачи, учитывающую условия (4.189) — (4.191), возьмем в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{2}{\pi} \left\{ \omega_0 \operatorname{arccctg} \sigma_1 + [\gamma x_1 + \beta x_2 + f^*(x_1, x_2)] \times \right. \\ & \left. \times \left( -\frac{\sigma_1}{1+\sigma_1^2} + \operatorname{arccctg} \sigma_1 \right) \right\} + \frac{\sigma_1}{1+\sigma_1^2} \Phi(x_1, x_2, x_3^2), \quad (4.199) \end{aligned}$$

где  $f^*(x_1, x_2)$  — ограниченное на бесконечности продолжение функции  $f(x_1, x_2)$  на всю плоскость  $x_1Ox_2$ ,  $\Phi$  — неопределенная компонента структуры решения (4.199). Отметим, что условие на бесконечности (4.191) будет учитываться формулой (4.199), если

функции  $\psi_0$  и  $\Phi$  ограничены на бесконечности. Давление под штампом, найденное с помощью структуры решения (4.192), имеет в окрестности линии  $\Gamma$  требуемые особенности. Заметим, что структура решения (4.199) позволяет предусматривать естественное вырождение приближенного решения в точное, когда область контакта вырождается в круг.

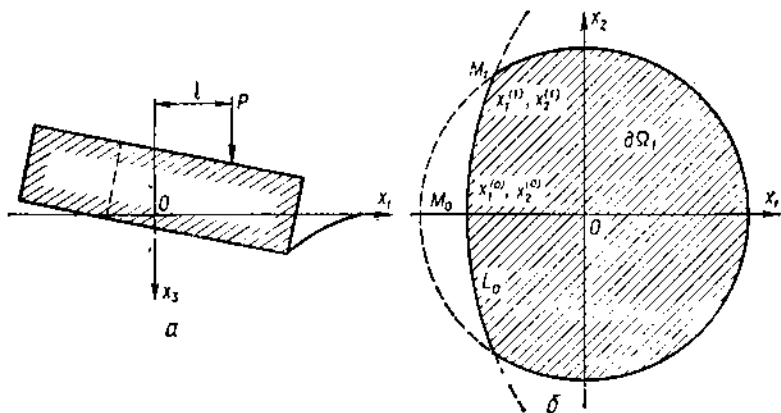


Рис. 172.

В некоторых случаях целесообразно использовать структуру решения, несколько отличную от (4.199), а именно

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \left[ 1 + \frac{\sigma_1}{1 + \sigma_1^2} \Phi(x) \right], \quad (4.200)$$

где

$$\varphi_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ \omega_0 \operatorname{arccctg} \sigma_1 + [\gamma x_1 + \beta x_2 + f^*(x_1, x_2)] \times \right. \\ \left. \times \left( \operatorname{arccctg} \sigma_1 - \frac{\sigma_1}{1 + \sigma_1^2} \right) \right\}.$$

Эта структура — полная [128] при дополнительном предположении, что  $\omega(x_1, x_2) \equiv \omega_0 + \gamma x_1 + \beta x_2 + f(x_1, x_2) > 0$  в  $\partial\Omega_1$ . Далее это условие будет проверяться при численной реализации.

2. Рассмотрим задачу о наклонном круговом в плане штампе с плоским основанием. Будем предполагать, что площадка контакта не обязательно есть весь круг, а область контакта зависит от приложенной к штампу силы.

Плоскость, ограничивающую упругое полупространство, примем за плоскость  $x_1 O x_2$ , начало координат поместим в точке  $O$ , а ось  $O x_3$  направим внутрь упругого полупространства (рис. 172, а).

Предположим, что линия действия силы  $P$  направлена параллельно оси  $O x_3$  и пересекает плоскость  $x_1 O x_2$  в точке  $(l, 0)$ . Тогда нормальное напряжение  $\sigma_x$  будет во всех точках круга  $r < a$  сжимающим лишь при условии, что расстояние  $l$  от точки прило-

жения силы до оси  $Ox_3$  не превосходит  $1/3 a$  [128]. Если  $l > 1/3 a$ , то под штампом возникает зона растягивающих напряжений. Если допустить отставание точек упругого тела от подошвы штампа, то получится область контакта  $\partial\Omega_1$ , которая будет частью круга (рис. 172, б), а напряжения  $\sigma_x$  в ней будут всюду сжимающими.

Рассматриваемая задача осложнена тем, что часть границы области контакта (линия  $L_0$ ) неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи. При этом должно быть использовано

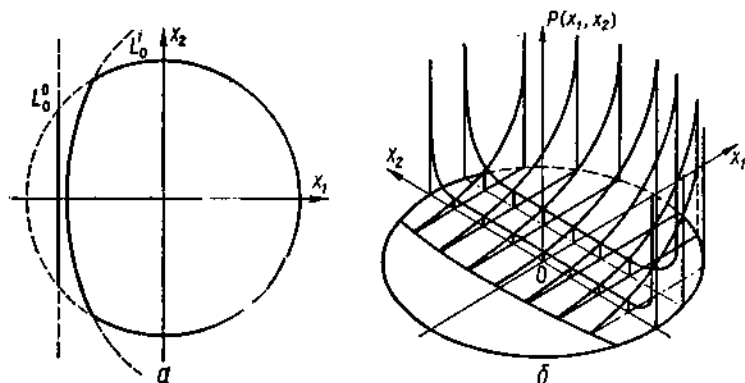


Рис. 173.

дополнительное условие, что везде под штампом  $\sigma_x \leq 0$ , причем равенство может достигаться только на линии отрыва  $L_0$  [128].

Предположим, что линия  $L_0$  принадлежит семейству линий, уравнение которого имеет вид

$$f_0(x_1, x_2) \equiv \sum_{i+2j=0}^s d_{i2j}(\epsilon, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_1^{(m)}, x_2^{(m)}) = 0, \quad (4.201)$$

где  $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$  — точки, через которые проходит  $L_0$ . Параметр  $\epsilon = a + x_1^{(0)}$  введен для того, чтобы можно было осуществить предельный переход к круговой области контакта (см. ниже). В этом случае при  $\Phi \equiv 0$  (4.199) превращается в точное решение задачи. Заметим, что, вообще, точное решение может быть получено и без введения этого параметра при некоторой другой, не равной тождественно нулю функции  $\Phi$  (это следует из полноты структуры решения [128].) Коэффициенты  $d_{i2j}$  определим из следующих условий:

а)  $f_0(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0$  — кривая  $L_0$  проходит через заданные точки  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$  ( $k=0, 1, \dots, m$ ); б) функция  $f_0(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$  положительна в области  $\partial\Omega_0$ , лежащей справа от кривой  $L_0$ ; в) при  $\epsilon = 0$  область, определяемая неравенством  $f_0(x_1, x_2) \geq 0$ , должна выродиться в полуплоскость  $x_1 \geq -a$ .

Опишем процедуру определения области контакта штампа с полупространством (т. е. процедуру выбора линии  $L_0$  из семейства (4.201)). В качестве начальной области контакта возьмем область

$\partial\Omega_1^0$  (рис. 173, а,  $L_0^0$  — линия, на которой давление, определяемое решением В. М. Абрамова [1], обращается в нуль при  $l > 1/3 a$ ). Анализ точного решения показывает, что  $L_0^0$  есть прямая линия.

Решив контактную задачу для области  $\partial\Omega_1^0$  с помощью метода Ритца, проверим, нет ли в этой области перемены знака функции  $\sigma_x(x_1, x_2, 0)$ . Если в области  $\partial\Omega_1^0$  есть точки, в которых  $\sigma_x^1(x_1, x_2, 0)$  меняет знак, то они, очевидно, лежат справа от линии  $L_0^0$ . В качестве линии  $L_0^1$  берем линию, на которой давление, полученное на предыдущем этапе, обращается в нуль. Процесс повторяется до тех пор, пока в области  $\partial\Omega_0^k$  не будет зон (с некоторой точностью, конечно) с отрицательным давлением. В этом случае принимаем  $\partial\Omega_0^{(k)}$  за истинную область контакта.

Учитывая симметрию области контакта  $\partial\Omega_1$ , строим функцию  $\omega_1(x_1, x_2, x_3^2)$ , которая должна быть непрерывно-дифференцируемой и положительной внутри области  $\partial\Omega$ . С использованием условных  $R$ -функций (4.197) находим

$$\omega_1 \equiv f_0(x_1, x_2) \wedge_{\alpha_1, \sqrt{\varepsilon} x_3^2} (a^2 - x_1^2 - x_2^2), \quad (4.202)$$

где  $\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_1^{(0)}}{a}\right)$ ,  $x_1^{(0)}$  — абсцисса крайней левой точки границы области контакта (см. рис. 172, б).

Коэффициент  $\alpha_1$  в формуле (4.202) зависит от координаты  $x_1^{(0)}$  и вырождается в единицу при  $x_1^{(0)} = -a$ , т. е. когда областью контакта является круг (в этом случае при  $x_3 = 0$  должно быть  $\omega_1 \equiv a^2 - x_1^2 - x_2^2$ ). Принимая во внимание то обстоятельство, что нормальное напряжение  $\sigma_x$  обращается в нуль на линии отрыва штампа от полупространства, функцию  $\sigma_1$  в формуле (4.199) заменяем функцией

$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{\omega_2}{\varepsilon + \omega_2},$$

где функция  $\omega_2$  построена по формуле

$$\omega_2 \equiv -[\omega_1 \wedge_{\alpha_1, \sqrt{\varepsilon} x_3^2} (-f_0)] \quad (|\alpha_1| < 1)$$

и равна нулю только на той части линии  $L_0$ , которая принадлежит кругу  $x_1^2 + x_2^2 < a^2$ . При таком выборе функции  $\sigma_2$  функция  $\Phi(x)$ , определяемая формулой (4.199), при любой  $\Phi(x) \in C^1$  удовлетворяет краевым условиям смешанной контактной задачи с учетом характера поведения решения вблизи линии раздела граничных условий, т. е. контактные напряжения на линии отрыва  $L_0$  равны нулю ( $\sigma_x = O(\sqrt{\omega_2})$ ) при  $\omega_2 \rightarrow 0$ , а в окрестности дуги окружности (см. рис. 173, а) имеют порядок  $\rho^{-1/2}$  ( $\rho$  — кратчайшее расстояние от точки под штампом до границы площадки контакта).



Для проведения численных расчетов искомую функцию  $\varphi(x)$  удобно представить в виде

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} (\omega_0 \varphi^{(1)} - \gamma \varphi^{(2)}), \quad (4.203)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &\equiv \operatorname{arccctg} \sigma_2 \left( 1 + \frac{\sigma_2}{1 + \sigma_2^2} \Phi_1 \right); \\ \varphi^{(2)} &\equiv x_1 \left( \frac{\sigma_2}{1 + \sigma_2^2} - \operatorname{arccctg} \sigma_2 \right) \left( 1 + \frac{\sigma_2}{1 + \sigma_2} \Phi_2 \right), \end{aligned}$$

причем  $\Phi_1, \Phi_2$  — неизвестные функции.

Представим функции  $\Phi_1, \Phi_2$  в виде линейной комбинации системы полиномов Чебышева

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \sum_{i+2j+2k=0}^N \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{i,2j,k}^{(N)} T_i(x'_1) T_{2j}(x'_2) T_{2k}(x'_3), \quad (4.204)$$

где

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Используя функционал (интеграл Дирихле)

$$I(\varphi) = \int_{\Omega=(x_i \geq 0)} (\operatorname{grad} \varphi)^2 d\Omega$$

и разложения (4.204), согласно методу Ритца, получаем систему  $2N_1$  линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_{i,2j,2k}^{(N)}, b_{i,2j,2k}^{(N)}$ :

$$\frac{\partial I}{\partial a_{i,2j,2k}^{(N)}} = 0; \quad \frac{\partial I}{\partial b_{i,2j,2k}^{(N)}} = 0 \quad (i + 2j + 2k = 0, 1, \dots, N). \quad (4.205)$$

Для проведения расчета выберем функцию  $f_0(x_1, x_2)$  в виде

$$f_0(x_1, x_2) = 2a [x_1 - x_1^{(0)} + \varepsilon (x_1 - bx_2^2 - x_1^{(0)})].$$

Нетрудно убедиться в том, что в этом случае линия  $L_0 = (f_0 = 0)$  есть парабола, проходящая через точки  $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$  и  $M_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$  (см. рис. 172, б) при  $b = [(x_1^{(1)} - x_1^{(0)}) (1 + \varepsilon)] (\varepsilon x_2^{(1)})^{-2}$ .

В процессе уточнения области контакта  $\partial\Omega_1$  на каждом этапе приходится решать систему алгебраических уравнений относительно параметров  $\omega_0$  и  $\gamma$ , которая следует из условия равновесия штампа. Только после нахождения параметров  $\omega_0$  и  $\gamma$  для той или иной области контакта можно проследить за знаком контактного напряжения.

Схема расчетов следующая:

- а) задается суммарная сила  $P$  и точка ее приложения;
- б) задается первоначальная область контакта  $\partial\Omega_1^0$ , которая заведомо больше истинной;
- в) для заданной области решаем контактную задачу, т. е. определяем коэффициенты  $a_{i,2j,2k}$   $b_{i,2j,2k}$ ;
- г) из условия равновесия штампа находим параметры  $\omega_0$  и  $\gamma$ ;
- д) вычисляем давление в области контакта и выявляем зоны, где оно положительно и отрицательно;

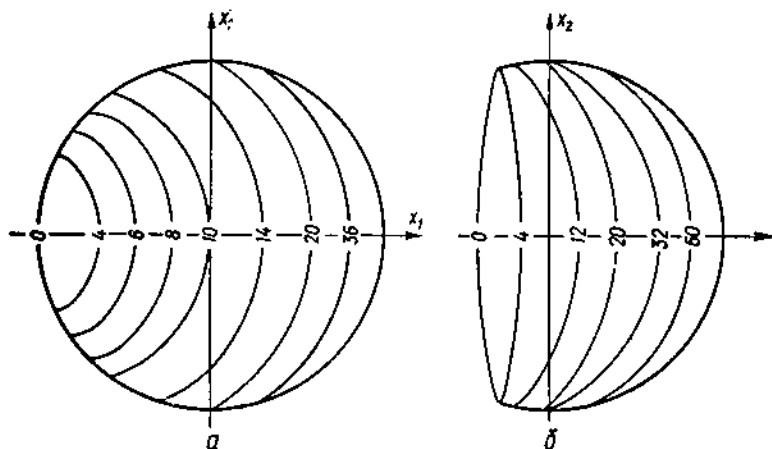


Рис. 174.

е) область, в которой напряжение сжимающее, принимается за новую область контакта  $\partial\Omega_1^1$ .

(Конечно, аппроксимация границы между положительным и отрицательным давлением осуществляется с помощью линий выбранного семейства. В данном случае — это параболы.)

Расчеты показывают, что метод уточнения области контакта сходится очень быстро — две-три итерации практически приводят к искомой области контакта.

Ниже приведена зависимость размеров (при  $N = 5$ ,  $P = 10$ ) области контакта  $(x_1^{(0)}, x_1^{(1)})$  от плеча  $l$  приложения силы:

$l$	1,1433	0,2333	0,2500
$x_1^{(1)}$	-0,372	-0,124	-0,083
$x_1^{(0)}$	-0,373	-0,128	-0,084

На рис. 173, б представлена эпюра распределения давления под штампом при  $l = 0,2333$ . Линии равных давлений приведены на рис. 174 (а — при  $l = 0,1433$ , б — при  $l = 0,2333$ ).

В окрестности угловых точек площадки контакта наблюдается сложный характер напряженного состояния: в зависимости от нап-

равления подхода к этим точкам напряжение изменяется от нуля до бесконечности.

3. Рассмотрим контактную задачу о штампе в виде кругового цилиндра [128], основанием которого является эллиптический параболоид

$$x_3 = -\frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2} \quad (R_1 < R_2). \quad (4.206)$$

Считаем, что штамп под действием внешних сил перемещается поступательно в направлении оси  $Ox_3$  и, таким образом, осадка под штампом определяется функцией

$$w(x_1, x_2) \equiv w_0 - \frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2},$$

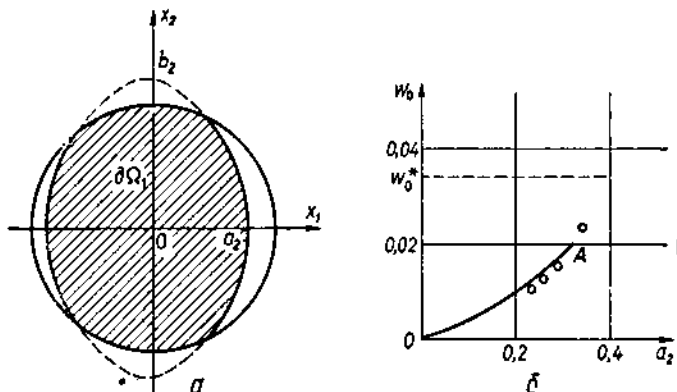


Рис. 175.

а радиусы главных кривизн  $R_1$  и  $R_2$  в вершине параболоида большие по отношению к размерам контактной зоны.

При принятых предположениях в зависимости от осадки  $w_0$  штамп с границей полупространства соприкасается: по эллиптической площадке

$$f_2(x_1, x_2) \equiv 1 - \frac{x_1^2}{a_2^2} - \frac{x_2^2}{b_2^2} \geq 0 \quad (4.207)$$

при  $a_2 < b_2 < a$ ; по части круга, размеры которой определяются величинами  $R_1$ ,  $R_2$  и  $w_0$  (рис. 175, а); по кругу

$$f_1(x_1, x_2) \equiv a^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0. \quad (4.208)$$

Такое разграничение задачи на три варианта введено в связи с тем, что в первом и третьем случаях для рассматриваемой задачи получены точные решения [90]. Наша цель — проследить развитие площадки контакта в процессе осадки штампа.

Искомая гармоническая в полупространстве  $x_3 \geq 0$  функция  $\varphi(x)$  должна удовлетворять условиям

$$\varphi(x)|_{x_3=0} = \omega(x_1, x_2); \quad (x_1, x_2) \in \partial\Omega_1; \quad (4.209)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = 0; \quad (x_1, x_2) \notin \partial\Omega_1 \quad (4.210)$$

и стремиться к нулю на бесконечности как  $R^{-1} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$ .

Под действием достаточно большой силы штамп погружается в упругое полупространство, и область контакта является круг. При неполном погружении задача усложняется, так как область контакта заранее неизвестна и ее необходимо определить из условия непрерывности контактного давления на участках, гладкосмыкающихся с границей полупространства  $x_3 \geq 0$  (после ее деформации). Предположим, что эти участки есть дуги эллипса, полуоси  $a_2$  и  $b_2$  которого находятся также, как параметры  $b$  и  $e$  в предыдущем примере.

Область контакта  $\partial\Omega_1$  (см. рис. 175, а) может быть представлена в виде пересечения областей  $S_2$  и  $S_1$ , определяемых неравенствами (4.207) и (4.208) соответственно:  $\partial\Omega_1 = S_1 \cap S_2$ . Заменяя символ  $\cap$  символом условной  $R$ -конъюнкции, получим

$$\omega_1(x_1, x_2, x_3^2) = f_1(x_1, x_2) \wedge_{\alpha, \varepsilon, x_3^2} f_2(x_1, x_2) \quad (-1 < \alpha < 1, \varepsilon = a - a_2).$$

Функцию  $\sigma_2$  построим по формуле  $\sigma_2 = \sigma_1 \frac{\omega_2}{\varepsilon + \omega_2}$ , где функция  $\omega_2$  построена по правилу

$$\omega_2 = - \{ [f_1 \wedge_{\alpha, x_3^2} f_2] \wedge_{\alpha, x_3^2} (-f_2) \}. \quad (4.211)$$

Структуру решения, удовлетворяющую условиям (4.209), (4.210) возьмем в виде

$$\varphi(x) = \varphi_0 \left( 1 + \frac{\sigma_2}{1 + \sigma_2^2} \Phi \right), \quad (4.212)$$

где  $\varphi_0 \equiv \frac{2}{\pi} \left[ \omega_0 \operatorname{arccctg} \sigma_2 - \frac{2}{\pi} \left( \frac{x_1^2}{2R_1} + \frac{x_2^2}{2R_2} \right) \left( \frac{\sigma_2}{1 + \sigma_2^2} - \operatorname{arccctg} \sigma_2 \right)^2 \right]$ .

Множитель  $\left( \frac{\sigma_2}{1 + \sigma_2^2} - \operatorname{arccctg} \sigma_2 \right)^2$  обеспечивает убывание функции

$\varphi(x)$  на бесконечности как  $R^{-1}$ . После нахождения функции  $\varphi(x)$  (по методу Ритца) давление под штампом вычисляем по формуле (4.192), которая в данном случае принимает вид

$$p(x_1, x_2) = \frac{2k}{\pi} \left[ \omega_0 \left( 1 - \frac{\pi}{2} \Phi \right) - \left( \frac{x_1^2}{2R_1} + \frac{x_2^2}{2R_2} \right) \left( 4 - \frac{\pi}{2} \Phi \right) \right] \times \\ \times \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega(\varepsilon + \omega_2)}}. \quad (4.213)$$

Таким образом, выбор функции  $\omega_2$  в (4.213) обеспечивает вблизи границы контактной площадки необходимый характер давления: оно ограничено вблизи линий отрыва гладкого основания штампа и стремится к бесконечности в окрестности его ребер с требуемой скоростью.

Неопределенную функцию  $\Phi$  находим с помощью метода Рунца в виде разложения вида (4.204). Для численных расчетов приняты такие значения параметров:  $R_1 = 5$ ;  $R_2 = 8$ ;  $a = 0,4$ ;  $\nu = 0,45$ ;  $E = 200$ .

На рис. 175, б дана зависимость осадки  $\omega_0$  от параметра  $a_2$  в процессе нагружения штампа (участок кривой  $OA$  построен по данным работы [63]). Точка  $\omega_0^*$  соответствует полному соприкосновению штампа с основанием.

По формулам, приведенным выше, можно получить зависимость осадки  $\omega_0$  от параметра  $a_2$  в промежуточной области, когда  $a_2 < a_1$ . Задав параметру  $a_2$  ряд значений, получим значения  $\omega_0$  (рис. 175, б, точки). Из рисунка видно достаточно хорошее согласование результатов, полученных методом  $R$ -функций, с точными (для тех случаев, для которых они были ранее получены). При этом в аппроксимирующих полиномах сохранились степени до порядка  $N = 6$ .

## § 10. Расчет тонких пластин

Конструктивные элементы в виде тонких пластин на практике встречаются весьма часто. Рассматривая изгиб и колебания пластин, будем исходить из обычных предположений теории тонких упругих пластин в условиях малых деформаций [118]. Считаем, что материал, из которого изготовлена пластина, изотропный и подчиняется обобщенному закону Гука, наибольшая толщина пластины значительно меньше ее размеров в плане, а прогиб — меньше толщины. Принимаем гипотезу о неизменяемости нормального элемента и предположение о том, что нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной плоскости пластины, можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями. Исходя из этого все компоненты напряжений, возникающие при изгибе и колебаниях пластин, можно выразить через прогиб  $u(x_1, x_2)$  точек срединной поверхности пластины. Прогиб  $u(x_1, x_2)$  определяется дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned}
 Au \equiv \Delta(D \Delta u) - (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \\
 \left. + \frac{\partial^2 D}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) = f(x_1, x_2)
 \end{aligned}
 \quad (4.214)$$

при статическом изгибе и уравнением

$$Au \equiv \Delta (D \Delta u) - (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 D}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) = - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x_1, x_2, t) \quad (4.215)$$

в задачах динамики. Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $D$  — цилиндрическая жесткость пластины,  $D = Eh^3 [12(1 - \nu^2)]^{-1}$ ,  $h$  — толщина пластины,  $h = h(x_1, x_2)$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.  $E$  — модуль Юнга,  $\gamma$  — удельный вес,  $g$  — ускорение земного притяжения;  $f(x_1, x_2)$  и  $f(x_1, x_2, t)$  — поперечные нагрузки на пластину.

Для пластин постоянной толщины уравнения (4.214) и (4.215) значительно упрощаются и принимают соответственно следующий вид:

$$D(\Delta \Delta u) = f(x_1, x_2); \quad (4.216)$$

$$D(\Delta \Delta u) = - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x_1, x_2, t). \quad (4.217)$$

О краевых условиях различных типов для этих уравнений и об учитываемых их структурах решений см. в § 11 гл. 3.

Если в уравнении (4.215)  $f(x_1, x_2, t) \equiv 0$ , а краевые условия однородные, то приходим к так называемой задаче на собственные значения. В ней необходимо отыскать собственные значения  $p$ , которым соответствуют отличные от нуля решения (собственные решения) уравнения

$$Au - \frac{\gamma h}{g} p^2 u = 0. \quad (4.218)$$

Приведем вариационные постановки сформулированных задач, руководствуясь методом Ритца. Соответствующие функционалы для статической задачи и задачи на собственные значения имеют вид

$$I_1 = \int_{\Omega} \left\{ h^3 \left\{ (\Delta u)^2 - 2(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} - 2fu \right\} d\Omega + k \int_{\Gamma_2} h^3 \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma; \quad (4.219)$$

$$I_2 = \int_{\Omega} \left\{ h^3 \left\{ (\Delta u)^2 - 2(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} - p^2 \frac{\gamma h}{gD} u^2 \right\} d\Omega + k \int_{\Gamma_2} h^3 \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma, \quad (4.220)$$

где  $p$  — частота собственных колебаний,  $\Gamma_2$  — упруго закрепленная часть края  $\Gamma$ .

Если никакая часть границы  $\partial\Omega = \Gamma$  не находится в состоянии упругого закрепления, то контурный интеграл в выражениях

(4.219) и (4.220) отсутствует. Если же весь край пластинки жестко закреплен, то функционалы  $I_1$  и  $I_2$  можно представить в более простой форме

$$I_1 = \int_{\Omega} [h^3 (\Delta u)^2 - 2uf] d\Omega; \quad (4.221)$$

$$I_2 = \int_{\Omega} \left[ h^3 (\Delta u)^2 - p^2 \frac{\gamma h}{Dg} u^2 \right] d\Omega. \quad (4.222)$$

Следуя методу Ритца и учитывая результаты § 11 гл. 3, форму изогнутой поверхности пластины можем приближенно представить формулой (структурой решения)

$$u(x_1, x_2) \approx u_n(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n C_i \chi_i(x_1, x_2), \quad (4.223)$$

где  $\chi_i$  — последовательность функций, точно удовлетворяющих граничным условиям задачи независимо от выбора постоянных  $C_i$ . Подставляя выражение (4.223) в функционалы (4.221) и (4.222) и дифференцируя по  $C_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), придем к системам линейных уравнений

$$\frac{\partial I_1}{\partial C_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n); \quad (4.224)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial C_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (4.225)$$

которые соответственно можно переписать так:

$$\sum_{j=1}^n C_j \left\{ \int_{\Omega} D(x_1, x_2) \left[ \Delta \chi_i \Delta \chi_j - (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] d\Omega \right\} = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} fh \chi_i d\Omega; \quad (4.226)$$

$$\sum_{j=1}^n C_j \left\{ \int_{\Omega} D(x_1, x_2) \left[ \Delta \chi_i \Delta \chi_j - (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] d\Omega \right\} = \sum_{i=1}^n C_i \lambda \int_{\Omega} h \chi_i \chi_j d\Omega. \quad (4.227)$$

Для матричной записи систем (4.226) и (4.227) введем следующие обозначения:  $P$  — матрица для левых частей систем (4.226) и (4.227);  $T$  — матрица для правой части системы (4.227);  $K$  — столбец свободных членов системы (4.226);  $v$  — вектор с компонентами  $C_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Тогда системы (4.226) и (4.227) перепишутся соответственно в виде

$$Pv = K; \quad (4.228)$$

$$Pv = \lambda T v. \quad (4.229)$$

Заметим, что система (4.228) имеет единственное решение, если  $\det P \neq 0$ , а система (4.229) имеет решения, отличные от нуля,

если ее определитель равен нулю. Отсюда получаем уравнение частот

$$\det(\Pi - \lambda T) = 0. \quad (4.230)$$

Множество решений этого уравнения составляет спектр частот собственных колебаний данной пластинки. Каждой частоте соответствует собственная функция  $u(x_1, x_2)$ , определяющая некоторую форму колебаний. Собственные функции находятся с точностью до мультипликативной постоянной.

Зная функцию прогибов  $u(x_1, x_2)$ , можно определить по известным формулам изгибающие и крутящие моменты, перерезывающие силы, напряжения и другие расчетные характеристики [102].

В развитии метода  $R$ -функций применительно к решению задач об изгибе и колебаниях тонких пластин основные результаты принадлежат Л. В. Курпе, Н. Г. Склепусу, Л. А. Учишвили, И. В. Гончарюку, В. П. Тицкому, Ф. Ф. Ковалю, А. Ваберски, В. М. Колодяжному и др. [16, 25—27, 50, 53, 118].

1. Рассмотрим тестовую задачу, решенную Ф. Ф. Ковалем в условиях эксплуатации ГП «Поле-3», об изгибе равномерно нагруженной ( $fD^{-1} \equiv 1$ ) круглой пластинки радиуса один при  $\nu = 0,3$ , свободно опертой по контуру. Точное решение [174] этой задачи имеет вид

$$u_T = \frac{1}{64} \left[ (1 - x_1^2 - x_2^2)^2 + \frac{4}{1,3} (1 - x_1^2 - x_2^2) \right].$$

Используем структуру решения разностного типа

$$u = \Phi_1(x+h)\omega(x)[1 - 0,15\omega(x)] + \omega^3(x)\Phi_2(x),$$

предполагая, что  $\omega(x)$  — нормализована до второго порядка. Здесь принято:  $\omega(x) = \omega_1(x) + \frac{1}{3}\omega_1(x+h)$ ;  $\omega_1(x) = \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2)$ ;

$h = (h_1, h_2)$ ;

$$\begin{aligned} h_1 &= \omega\left(x_1 - \frac{1}{2}\omega(x), x_2\right) - \omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\omega(x), x_2\right); \\ h_2 &= \omega\left(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\omega(x)\right) - \omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x)\right). \end{aligned} \quad (4.231)$$

Задача сводится к отысканию минимума функционала (4.226) при  $k = 0$ ,  $h \equiv \text{const}$ ,  $f \equiv 1$ . Аппроксимирующие полиномы для  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  выбирались четными по каждой из координат. Интегрирование велось по четверти области при использовании 36-точечной формулы Гаусса (1296 узлов). Ниже приведены приближенные значения максимального прогиба в зависимости от количества  $n_1 + n_2$  координатных функций ( $n_1$  — для  $\Phi_1$ ,  $n_2$  — для  $\Phi_2$ ):

$n_1 + n_2$	1+0	1+1	3+0	3+1	3+3	6+1
$u_{\text{max}} \cdot 10^{-2}$	6,51600	6,31284	6,35777	6,37057	6,37022	6,37019

Точное значение максимального прогиба  $U_T = 6,37019$ .

2. Рассмотрим задачу об изгибе под действием равномерно распределенной нагрузки жестко защемленной по контуру пласти-



ны шестиугольного очертания, симметричной относительно оси  $Ox_2$  (рис. 176, а). Для расчетов примем  $x^1 = (1, 0)$ ,  $x^2 = (1; 1,356)$ ,  $x^3 = (0,390; 2,069)$ .

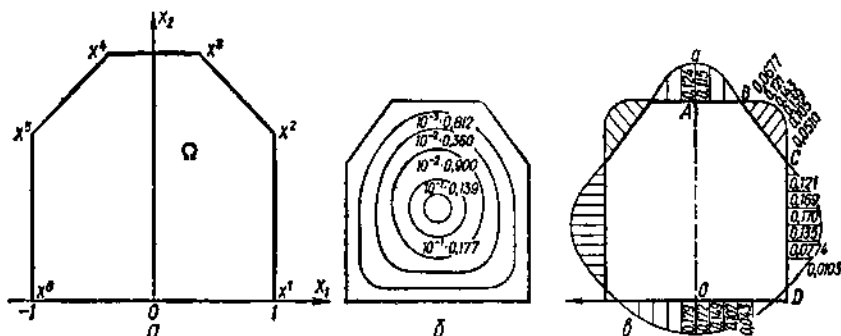


Рис. 176.

В качестве опорных областей выберем полуплоскости, определяемые неравенствами

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= (\sigma_1 \equiv x_2 \geq 0); \\ \Sigma_2 &= (\sigma_2 \equiv 2,069 - x_2 \geq 0); \\ \Sigma_3 &= \left( \sigma_3 \equiv \frac{-x_1(x_2^3 - x_2^2) + x_2(x_1^3 - x_1^2) - x_2^2 x_1^3 + x_1^2 x_2^3}{\sqrt{(x_1^3 - x_1^2)^2 + (x_2^3 - x_2^2)^2}} \geq 0 \right); \\ \Sigma_4 &= \left( \sigma_4 \equiv \frac{x_1(x_2^3 - x_2^2) + x_2(x_1^3 - x_1^2) - x_2^2 x_1^3 + x_1^2 x_2^3}{\sqrt{(x_1^3 - x_1^2)^2 + (x_2^3 - x_2^2)^2}} \geq 0 \right), \end{aligned}$$

и вертикальную полосу

$$\Sigma_5 = \left[ \sigma_5 \equiv \frac{1}{2} (1 - x_1^2) \geq 0 \right].$$

Область  $\Omega$  получаем в виде пересечения областей  $\Sigma_i$ :

$$\Omega = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \cap \Sigma_4 \cap \Sigma_5.$$

Соответствующее уравнение границы  $\partial \Omega$  получаем в виде

$$\omega(x_1, x_2) \equiv [(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4)] \wedge \sigma_5 = 0.$$

При этом использована простейшая из  $R$ -конъюнкций ( $\wedge_0$ ), а скобки в последней формуле расставлены так, чтобы функция  $\omega(x_1, x_2)$  обладала симметрией относительно оси  $Ox_2$ :  $\omega(-x_1, x_2) = \omega(x_1, x_2)$ .

Используя структуру решения (3.325) и представив неопределенную компоненту в виде

$$\Phi \approx \sum_{\substack{i+j=0 \\ i, j > 0}}^m C_{ij} T_i(x_1) T_j(\lambda x_2 - \mu), \quad (4.232)$$

где  $\lambda = (1.0345)^{-1}$ ,  $\mu = 1,0346$ , неизвестные коэффициенты  $C_{ij}$  найдем из условия минимума функционала (4.221). Результаты вычисления постоянных  $C_{ij}$  при различном числе  $N$  координатных функций следующие:

N	$C_{00}$	$C_{01}$	$C_{02}$	$C_{20}$
3	-0,0496	0,295	-0,147	—
4	-0,107	0,408	-0,209	-0,200
5	0,0143	0,205	-0,000790	-0,209
6	0,0780	0,115	0,0843	-0,0939
7	0,129	0,0301	0,186	-0,0963
8	0,112	0,0598	0,158	-0,135
9	0,144	0,0565	0,162	-0,139

N	$C_{02}$	$C_{21}$	$C_{22}$	$C_{23}$	$C_{24}$
3	—	—	—	—	—
4	—	—	—	—	—
5	-0,0708	—	—	—	—
6	-0,109	-0,164	—	—	—
7	-0,178	-0,160	0,0175	—	—
8	-0,161	-0,0929	0,0115	-0,0424	—
9	-0,165	-0,0882	0,0124	-0,0466	-0,0250

На рис. 176, б, в приведены соответственно линии равных прогибов и эпюра изгибающего момента  $M_n$  по границе  $\partial\Omega$ . (Все вычисления проведены для уравнения  $\Delta\Delta u = 1$ .)

3. Пусть пластина постоянной толщины, жестко защемленная по всему контуру, имеет форму, изображенную на рис. 177. Рассмотрим задачу об определении собственных форм и частот колебаний данной пластины. Область  $\Omega$  можно построить, взяв в качестве опорных следующие области:

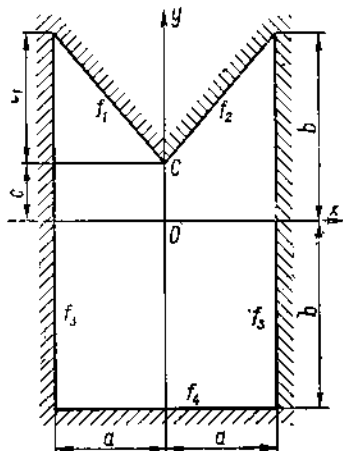


Рис. 177.

а) полуплоскости  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_3$ , определяемые соответственно неравенствами

$$\Sigma_1 = \left[ \sigma_1 \equiv \frac{a(x_2 - c) - x_1(b - c)}{\sqrt{a^2 + (b - c)^2}} \geq 0 \right];$$

$$\Sigma_2 = \left[ \sigma_2 \equiv \frac{a(x_2 - c) + x_1(b - c)}{\sqrt{a^2 + (b - c)^2}} \geq 0 \right];$$

$$\Sigma_3 = [\sigma_3 \equiv b + x_2 \geq 0];$$

б) полосу  $\Sigma_4$ , определяемую неравенством

























$$\Sigma_4 = \left[ \sigma_4 \equiv \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2) \geq 0 \right].$$

Здесь  $c$  — ордината точки  $C$ ,  $b - c = c_1$  — глубина вреза в пластину.

Логика построения области  $\Omega$  определяется формулой

$$\Omega = (\overline{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}) \cap \Sigma_3 \cap \Sigma_4,$$

Таблица 16

n	$c_1 = 0$					
						
6	36,0032	73,9851	108,215	132,313	165,216	240,812
10	35,9848	73,0914	106,814	131,216	164,848	224,970
15	35,9846	73,0908	106,810	131,027	164,532	223,988
n	$c_1 = 0,25 b$					
						
6	45,984	81,411	106,180	135,53	147,05	217,24
10	45,078	80,272	104,000	132,87	140,01	210,84
15	45,046	80,199	103,350	131,99	138,08	209,08
n	$c_1 = 0,5 b$					
						
6	79,286	102,83	157,03	189,97	195,16	264,08
10	78,908	101,63	152,67	184,88	191,01	250,82
15	78,444	100,16	151,30	181,25	189,72	243,67
n	$c_1 = 0,75 b$					
						
6	157,02	153,11	260,04	261,82	322,38	343,91
10	152,64	151,83	253,89	254,63	311,79	340,00
15	152,11	149,77	251,22	250,64	308,31	336,52

а соответствующая функция  $\omega(x_1, x_2)$  (симметричная относительно оси  $Ox_2$ ) может быть взята в виде

$$\omega(x_1, x_2) \equiv (\sigma_1 \wedge_0 \sigma_2) \wedge_0 (\sigma_3 \wedge_0 \sigma_4).$$

Так как опорные уравнения  $\sigma_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) нормализованы до первого порядка, согласно свойств операции  $\wedge_0$  нормализованным до первого порядка будет и уравнение границы  $\partial\Omega = (\omega = 0)$ .

Для нахождения собственных значений и собственных векторов используем уравнения (4.229), (4.230). По собственным векторам легко построить соответствующие собственные формы колебаний. Для этого достаточно подставить полученные значения  $C_{ij}$  в формулу для  $\Phi$  (4.232), а затем  $\Phi$  — в структуру решения (3.325). Для заданной пластины с отношением перпендикулярных сторон  $b/a = 1$  найдены шесть низших значений частот

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{4a^2} \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}} \quad (i = 1, \dots, \sigma)$$

при различной глубине вреза  $c_1$  в пластину. В табл. 16 приведены расчетные формы колебаний и соответствующие значения коэффициента собственной частоты  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) флажкообразной пластинки, жестко защемленной по контуру. Из таблицы видно влияние глубины вреза  $c_1$  в пластину на формы и частоты собственных колебаний пластин. Для экспериментальной косвенной оценки сходимости получаемых результатов расчет проводился при различном числе  $n$  координатных функций. Во многих случаях, как это видно из приведенных на рис. 178 данных, наблюдается хоро-

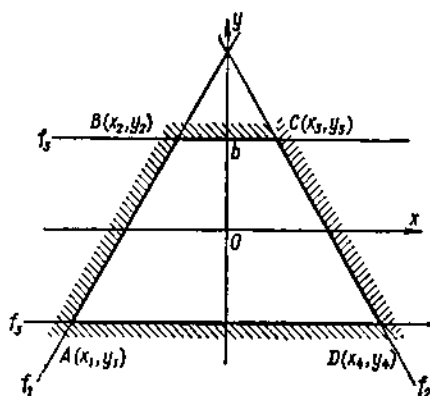


Рис. 178.

Таблица 17

Тип колебаний	Тон	$\beta$	
		По данным Игуши	Метод R-функций
Симметрично-симметричный	Основной	55,9845	55,9848
Симметрично-антисимметричный	1 обертона	73,4002	73,0914
Антисимметрично-антисимметричный	2 обертона	108,220	106,814
Симметрично-симметричный	3 обертона	132,183	131,216
Симметрично-антисимметричный	4 обертона	164,990	164,848
Антисимметрично-антисимметричный	5 обертона	243,098	224,970

тинки, жестко защемленной по контуру. Из таблицы видно влияние глубины вреза  $c_1$  в пластину на формы и частоты собственных колебаний пластин. Для экспериментальной косвенной оценки сходимости получаемых результатов расчет проводился при различном числе  $n$  координатных функций. Во многих случаях, как это видно из приведенных на рис. 178 данных, наблюдается хоро-

шая сходимость результатов. Анализ численных экспериментов показывает, что для получения с точностью до 1—5% шести низших значений коэффициента собственной частоты достаточно ограничиться десятью членами аппроксимирующего полинома.

4. Для сравнения метода  $R$ -функций с другими методами был проведен расчет серии пластин простой формы (прямоугольник, квадрат, треугольник, трапеция), для которых известны решения, полученные другими методами. Функция  $\omega(x_1, x_2)$  строилась с учетом того, чтобы, изменяя соответствующие параметры, можно было бы получить любую из названных форм (рис. 178). А именно

$$\omega(x_1, x_2) = (f_1 \wedge f_2) \wedge f_3,$$

где

$$f_1 \equiv \frac{-x_1(x_2^2 - x_2^1) + x_1(x_2^2 - x_1^1) - x_2^1 x_1^2 + x_1^2 x_1^1}{\sqrt{(x_2^1 - x_2^2)^2 + (x_1^1 - x_1^2)^2}};$$

$$f_2 \equiv \frac{-x_1(x_2^4 - x_2^3) + x_2(x_1^4 - x_1^3) - x_2^3 x_1^4 + x_1^3 x_1^4}{\sqrt{(x_2^3 - x_2^4)^2 + (x_1^3 - x_1^4)^2}};$$

$$f_3 \equiv \frac{1}{2b} (b^2 - x_2^2).$$

Таблица 18

$\frac{a}{b}$	$\beta$ . метод	
	Фурье	$R$ -функция
1	35,984	35,985
1,5	27,003	27,006
2	24,565	24,587
2,5	23,766	23,712

Результаты расчета жестко защемленной квадратной пластины на изгиб методом  $R$ -функций (под чертой) хорошо согласуются с результатами расчета методом С. П. Тимошенко (над чертой) [174]:

$\frac{u}{(x_1 = x_2 = 0)}$	$\frac{M_{x_1}}{(x_1 = x_2 = 0)}$	$\frac{M_{x_2}}{(x_1 = x_2 = 0)}$	$\frac{M_{x_1}}{(x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = 0)}$	$\frac{M_{x_2}}{(x_1 = 0, x_2 = \frac{a}{2})}$
$\frac{0,00126}{0,00125}$	$\frac{0,0231}{0,0235}$	$\frac{0,0231}{0,0235}$	$\frac{-0,0513}{-0,0516}$	$\frac{-0,0513}{-0,0516}$

В табл. 17 сравниваются первые шесть значений коэффициентов собственных частот колебаний  $\beta$  квадратной жестко защемленной пластины  $(p = \frac{\beta}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}})$ , вычисленных с помощью метода  $R$ -функций при  $n = 10$ , со значениями, полученными Игуши [118]. В табл. 19 сравниваются значения частот основного тона собственных колебаний прямоугольных пластин, вычисленные при  $n = 3$  методом  $R$ -функций, со значениями для частот основного тона, полученными в работе [175] методом Фурье.

5. Рассмотрим смешанную задачу об изгибе пластины подковообразной формы (рис. 179), жестко защемленной по внешней полуокружности  $\partial\Omega_1$  радиуса  $R = 2$  и свободно опертой по остальной

части  $\partial\Omega_2$  контура. Нормализованное уравнение  $\partial\Omega_1$  возьмем в виде

$$\omega_1(x_1, x_2) \equiv 2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0 \quad (4.233)$$

(легко убедиться, что порядок нормализованности этого уравнения равен бесконечности). Уравнение  $\partial\Omega_2$ , нормализованное до первого порядка, получаем в виде

$$\omega_2^{(1)} = f_1(x) \wedge_0 f_2(x) = 0,$$

где  $f_1(x) \equiv x_2$ ,  $f_2(x) \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1$ . Нормализованное до второго порядка уравнение  $\partial\Omega_2$ , согласно [113], можем написать в виде

$$\omega_2(x) \equiv \omega_2^{(1)}(x) + \frac{1}{3}\omega_2^{(2)}(x + h) = 0, \quad h = (h_1, h_2), \quad (4.234)$$

где  $h_1, h_2$  определяются формулами (3.199) при замене  $\omega$  на  $\omega_2$ . Структуру решения задачи выберем в виде

$$u = \omega_1^2(x+h)\Phi_1(x+h)\omega_2(x)\left(1 - \frac{v\omega_2(x)}{2\rho}\right) + \omega^2(x)\omega_2(x)\Phi_2(x), \quad (4.235)$$

где  $\omega = (\omega_1\omega_2)^2$ ,  $\rho = f_2(\sqrt{f_1^{-1}} + \sqrt{f_2^{-1}})$ . (Последняя формула — склейка кривизны.)

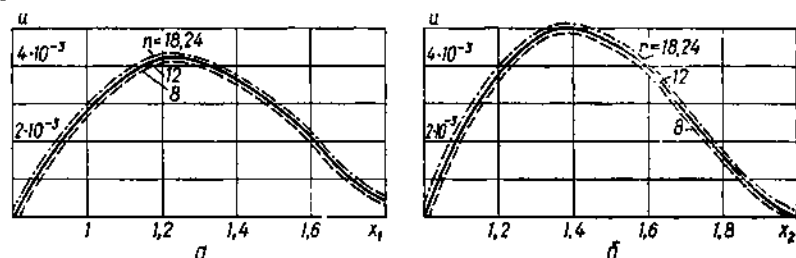


Рис. 180.

На рис. 180а и б приведены значения прогибов по сечениям АВ и CD (см. рис. 179) в зависимости от числа координатных функций. Нижней кривой соответствует  $n = 8$  координатных функций, верхней —  $n = 18, 24$  и  $32$  (последние графики сливаются). Каждой из неопределенных компонент соответствовало  $0,5n$ . Интегрирование осуществлялось по методу Гаусса. Общее число узлов в половине области бралось равным 400.

Последняя задача решалась в условиях эксплуатации ГП «Поле-3». Время счета на ЭВМ «БЭСМ-6» — 10 мин.

## § 11. Задача электростатики с разрывными граничными условиями

Рассмотрим следующую задачу электростатики. Два проводника  $\partial\Omega_1 = ABCD$  и  $\partial\Omega_2 = AFED$  (рис. 181) ограничивают прямоугольную область  $\Omega = [-a, a] \times [-b, b]$ . На проводнике  $ABCD$  задан потенциал  $u_0$ , а на проводнике  $AFED$  — потенциал  $-u_0$ . Требуется определить потенциальную функцию  $u(x)$  в области  $\Omega$ .

Эта задача является неоднородной задачей Дирихле для уравнения Лапласа с разрывными краевыми условиями

$$u = \begin{cases} u_0, & x \in \partial\Omega_1; \\ -u_0, & x \in \partial\Omega_2. \end{cases} \quad (4.236)$$

Функция  $\psi_1 \equiv -(x_1 \wedge_\alpha [-(x_1 - a)^2 (x_2^2 - b^2)^2])$  обращается в нуль на части  $\partial\Omega_1$  границы и положительна внутри  $\Omega$  и на  $\partial\Omega_2$ . Аналогично функция  $\psi_2 \equiv -([(-x_1) \wedge_\alpha [-(x_1 + a)^2 (x_2^2 - b^2)^2])$  положительна в  $\Omega$  и на  $\partial\Omega_1$ . С помощью этих функций можно построить функцию  $\varphi$ , склеивающую граничные значения (4.236):

$$\varphi \equiv u_0 \frac{\psi_2 - \psi_1}{\psi_2 + \psi_1}. \quad (4.237)$$

Структуру решения рассматриваемой задачи возьмем в виде

$$u(x) = u_0 \left[ \frac{\psi_2 - \psi_1}{\psi_2 + \psi_1} - (a^2 - x_1^2)(b^2 - x_2^2) \sum_{i+j=0}^n C_{ij} x_1^i x_2^j \right]. \quad (4.238)$$

Применяя метод Бубнова — Галеркина для определения постоянных  $C_{ij}$  при  $a = b = 1$ ;  $n = 3$ ;  $\alpha = 0,9$ , получено следующее приближение:

$$u = u_0 \left[ \frac{\psi_2 - \psi_1}{\psi_2 + \psi_1} + (1 - x_1^2)(1 - x_2^2) (-0,755x_1 + 0,0464x_1x_2 + 0,370x_1^3) \right]. \quad (4.239)$$

В работе [111] приведено точное решение этой задачи, полученное методом разделения переменных:

$$u = u_0 \left( x_1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} n\pi x_2 \sin n\pi x_1}{n \operatorname{ch} n\pi} \right). \quad (4.240)$$

Погрешность формулы (4.239) не превышает 0,4%. Разрывность граничных условий в точках  $(0, \pm 1)$  приводит к медленной сходимости ряда, входящего в формулу (4.240), вблизи этих точек. В приближенном решении (4.239) эти разрывы учитываются первым слагаемым.

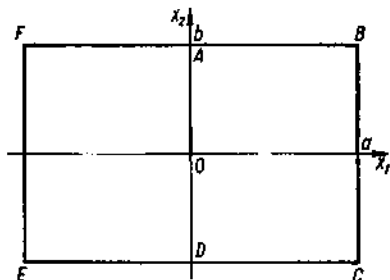


Рис. 181.

## § 12. Задачи магнитной гидродинамики

Разнообразие геометрических форм конструкций современного магнитогидродинамического оборудования и все более жесткие требования, предъявляемые практикой к точности электромагнитных расчетов, существенно сужают область применения классических аналитических методов для определения сложных электрических полей и подчеркивают актуальность разработки универсальных методов и алгоритмов, ориентированных на применение быстродействующих вычислительных машин. Располагая алгоритмами, позволяющими варьировать геометрические и аналитические компоненты соответствующей краевой задачи, можно в ряде случаев заменить длительный и дорогостоящий эксперимент быстрым расчетом на ЭВМ различных вариантов конструкции и выбором наиболее подходящего из них. При этом создаются предпосылки для автоматизации проектирования МГД-устройств.

В развитии метода  $R$ -функций применительно к задачам магнитной гидродинамики основные результаты принадлежат Т. И. Шейко [145—148, 184—187]. Приведем некоторые примеры расчета МГД-полей.

К расчету электрических полей приводит задача [145—148], в которой рассматривается стационарное движение среды с постоянной изотропной проводимостью по бесконечно длинному каналу в магнитном поле. Предполагается, что жидкость подчинена закону Ома, эффект Холла исключается, магнитное поле известно и равно внешнему при малых магнитных числах Рейнольдса  $Re_m$ . Как известно [148], путем введения электрического потенциала  $E = -\nabla u$  и некоторых преобразований из системы уравнений Максвелла, закона Ома и условия  $\operatorname{div} j = 0$  можно получить уравнение

$$\Delta u = \operatorname{div} [v \times B] \quad (4.241)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} u|_{\partial\Omega_i} &= \text{const} \quad \text{на электродах;} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega_i} &= [v \times B] \quad \text{на изоляторах,} \end{aligned} \quad (4.242)$$

где  $\operatorname{int} \partial\Omega_i \cap \operatorname{int} \partial\Omega_j = \emptyset$ ,  $B$  — напряженность магнитного поля,  $\nu$  — нормаль к  $\partial\Omega$ ,  $v$  — скорость жидкости.

Если  $Re_m \ll 1$ , (4.241) можно записать с точностью до членов порядка малости магнитных чисел Рейнольдса:

$$\Delta u = B \operatorname{rot} v. \quad (4.243)$$

Для непроводящих стенок канала при ламинарном режиме течения среды граничные условия будут

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.244)$$



Сформулированная краевая задача (4.243), (4.244) имеет решение при некотором ограничении на правую часть (4.243), аналогичном условию разрешимости задачи Неймана [88].

Оси декартовых координат расположим следующим образом: ось  $Ox$  — параллельно приложенному неоднородному магнитному полю  $B = (B_x, 0, 0)$ , ось  $Oz$  — в направлении скорости жидкости  $v = (0, 0, v_z)$ , ось  $Oy$  — в плоскости электродов.

Точное решение краевой задачи (4.243), (4.244) в трехмерном и двухмерном пространствах известно лишь для простейших форм поперечного сечения канала. Рассмотрим некоторые плоские задачи для каналов сложного профиля с поперечной неоднородностью магнитного поля. При этом используем структуру решения (см. § 10 гл. 3)

$$u = \Phi_0 - \omega \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right), \quad (4.245)$$

которая при любом выборе функции  $\Phi_0 \in C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$  точно удовлетворяет граничному условию (4.244). Здесь  $\omega = 0$  — нормализованное уравнение  $\delta\Omega$ . Если положить

$$\Phi_0 = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x, y) = \sum_{i+j=1}^m a_{ij} T_i(\beta x) T_j(\mu y), \quad (4.246)$$

где  $\{\varphi_k\}$  — полная система (в данном случае  $T_k(t)$  — полиномы Чебышева), то коэффициенты  $a_k$  можно определить по методу Ритца из условия минимума функционала

$$I(u) = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2B_x \frac{\partial v_z}{\partial y} u \right] dx dy. \quad (4.247)$$

Для этого приближенное решение задачи будем искать в виде следующей формулы, получающейся в результате подстановки формулы (4.246) в (4.245):

$$u_n = \sum_{i+j=0}^m a_{ij} \left\{ T_i(\beta x) T_j(\mu y) - \omega(x, y) \left[ \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial T_i(\beta x)}{\partial x} T_j(\mu y) + \frac{\partial \omega}{\partial y} T_i(\beta x) \frac{\partial T_j(\mu y)}{\partial y} \right] \right\}, \quad (4.248)$$

где  $n = C_{m+2}^2$ .

При постановке задачи (4.243), (4.244) предполагалось известным распределение скорости в канале. Однако точное решение задачи

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = -A, \quad v_z|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.249)$$

где  $A$  — некоторая константа, достаточно просто получить лишь для сечений цилиндрической трубы в виде круга, эллипса, кругового кольца, канала равностороннего треугольника и плоского канала. Для более сложных форм сечений распределение скорости будем определять приближенными методами на основе применения  $R$ -функций.

Поскольку краевая задача (4.249) — это однородная задача Дирихле, можно использовать структуру решения

$$v_2 = \omega(x, y) \Phi_1(x, y), \quad (4.250)$$

где  $\Phi_1(x, y)$  — неопределенная функция, которую также будем аппроксимировать линейными комбинациями произведений полиномов Чебышева

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{i+j=0}^m b_{ij} T_i(\beta x) T_j(\mu y).$$

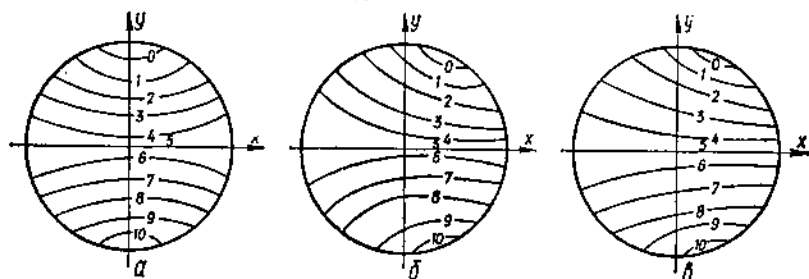


Рис. 182.

Коэффициенты  $b_{ij}$  будем также находить по методу Рунца. Ниже рассмотрим три варианта магнитных полей: а)  $B_x = B_0$ ; б)  $B_x = B_0 + b_1 x$ ; в)  $B_x = B_0 + b_1 x + b_2 x^2$  [148]. В примерах полагалось  $B_0 = b_1 = b_2 = 1$ .

Таблица 19

Номер линии	Рис. 182, а		Рис. 182, б		Рис. 182, в	
	$u_T$	$u_n$	$u_T$	$u_n$	$u_T$	$u_n$
5±5	±0,9999	±0,9879	±1,0495	±1,0466	±1,1827	±1,1825
5±4	±0,7999	±0,7903	±0,8395	±0,8373	±0,9462	±0,9461
5±3	±0,5999	±0,5928	±0,6297	±0,6279	±0,7096	±0,7096
5±2	±0,3999	±0,3952	±0,4197	±0,4186	±0,4731	±0,4731
5±1	±0,1999	±0,1976	±0,2098	±0,2096	±0,2365	±0,2365
5	0	0	0	0	0	0

1. Рассмотрим вначале тестовую задачу. Пусть  $\omega(x, y) = \frac{1}{2} \times (1 - x^2 - y^2)$ . Тогда известно точное решение краевой задачи (4.249)  $v_2 = 2v(1 - x^2 - y^2)$ , где  $v = \frac{1}{2} A$  — средняя по сечению скорость жидкости. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 v_2(r) r dr &= 4v \int_0^1 (1 - r^2) r dr = \\ &= 4v \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = v. \end{aligned}$$

Линиями уровня (рис. 182, а, б, в) представлено распределение электрического потенциала при указанных выше магнитных полях (соответственно «а», «б», «в»), а в табл. 19 — значения потенциала на линиях уровня как для точного  $u_t$ , так и приближенного  $u_n$  решений при числе координатных функций  $n = 9$ . Численный эксперимент показывает, что уже для  $n = 6$  достигается точность 1,2%.

2. Пусть поперечное сечение канала есть прямоугольник со сторонами  $a = 1$ ;  $b = 2$  (рис. 183). Нормализованное уравнение  $\partial\Omega$  можно написать в виде

$$\omega(x, y) \equiv \frac{1}{2} (1 - x^2) \wedge_0 \frac{1}{4} (4 - y^2) = 0.$$

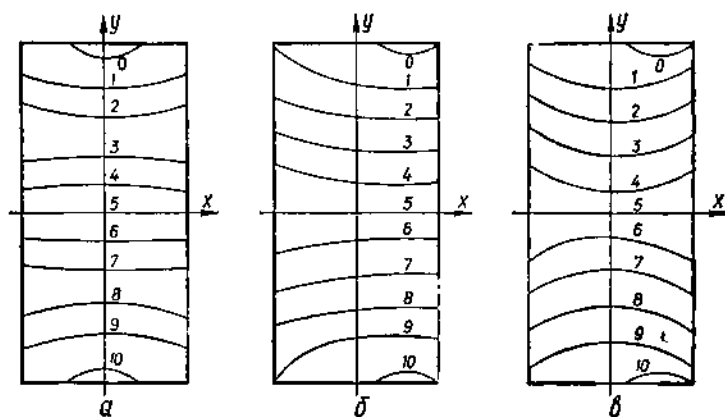


Рис. 183.

Соответствующее распределение скорости  $v_x$  при шести координатных функциях получаем в виде

$$v_x = \omega(x, y) \left[ 0,3528 - 0,005737 \left( x^2 - \frac{1}{2} \right) - \right. \\ \left. - 0,3581 \left( \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \right) + 0,1292 \left( x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \right) - \right. \\ \left. - 0,03179 \left( x^2 - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \right) - 0,1175 \left( \frac{1}{16} y^4 - \frac{1}{4} y^2 + \frac{1}{8} \right) \right].$$

Для этого сечения канала на рис. 183 и в табл. 20 представлены данные для  $u_n$ , аналогичные данным соответственно рис. 182 и табл. 19.

3. Рассмотрим канал  $H$ -образной формы поперечного сечения (рис. 184). Функция  $\omega(x, y)$  в этом случае может быть построена в виде

$$\omega(x, y) \equiv \left[ \frac{1}{2a} (a^2 - x^2) \wedge_0 (b^2 - y^2) \right] \wedge_0 \left[ \frac{1}{2c} (x^2 - c^2) \vee_0 \right. \\ \left. \vee_0 \frac{1}{2d} (d^2 - y^2) \right].$$

При  $a = 1$ ;  $b = 1$ ;  $c = 0,5$ ;  $d = 0,5$  распределение скорости может быть получено при 10 координатных функциях в виде

$$v_z = \omega(x, y) \left[ -0,3028 + 0,04789 \left( x^2 - \frac{1}{2} \right) + 0,3459 \left( y^2 - \frac{1}{2} \right) + 0,02699 \left( x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \right) - 0,3118 \left( x^2 - \frac{1}{2} \right) \left( y^2 - \frac{1}{2} \right) - 0,3435 \left( y^4 - y^2 + \frac{1}{8} \right) + 0,05946 \left( x^6 - \frac{4}{3} x^4 + \frac{9}{16} x^2 - \frac{1}{32} \right) + 0,4450 \left( x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \right) \left( y^2 - \frac{1}{2} \right) + 0,1483 \left( x^2 - \frac{1}{2} \right) \left( y^4 - y^2 + \frac{1}{8} \right) - 0,06906 \left( y^6 - \frac{4}{3} y^4 + \frac{9}{16} y^2 - \frac{1}{32} \right) \right].$$

Таблица 20

Номер линии	$u_n$ , рис. 183, а	$u_n$ , рис. 183, б	$u_n$ , рис. 183, в
5±5	±0,1721	±0,1806	±0,2146
5±4	±0,3377	±0,1445	±0,1716
5±3	±0,1032	±0,1083	±0,1287
5±2	±0,0688	±0,0722	±0,0858
5±1	±0,0344	±0,0361	±0,0429
5	0	0	0

Таблица 21

Номер линии	$u_n$ , рис. 184, а	$u_n$ , рис. 184, б	$u_n$ , рис. 184, в
5±5	±0,0153	±0,0198	±0,0231
5±4	±0,0127	±0,0158	±0,0184
5±3	±0,0103	±0,0119	±0,0138
5±2	±0,0054	±0,0079	±0,0092
5±1	±0,0023	±0,0039	±0,0046
5	0	0	0

Линии уровня для  $u_n$  при  $n = 9$  и соответствующие им значения для указанных выше магнитных полей приведены на рис. 184 и в табл. 21.

4. Для цилиндра, сечение которого показано на рис. 185, функция  $\omega(x, y)$  может быть построена в виде

$$\omega(x, y) = \{ [x^2 + (y-1)^2 - 0,25] \wedge_0 [x^2 + (y+1)^2 - 0,25] \wedge_0 (1 - x^2 - y^2) \}.$$

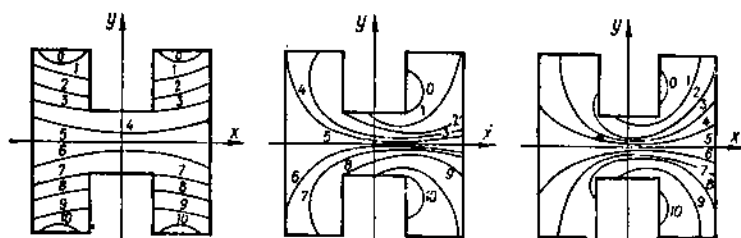


Рис. 184.

Решение задачи (4.249) при шести координатных функциях получаем в виде

$$v_z = \omega(x, y) [-0,07274 + 0,6276(x^2 - 0,5) + 0,9398(y^2 - 0,5) - 0,2033(x^4 - x^2 + 0,125) + 1,0658(x^2 - 0,5)(y^2 - 0,5) + 0,8805(y^4 - y^2 + 0,125)]. \quad (4.251)$$

Распределение электрического потенциала и его значения для соответствующих магнитных полей при  $n = 9$  представлены на рис. 185 и в табл. 22.

Таблица 22

Номер линии	$u_n$ , рис. 185, а	$u_n$ , рис. 185, б	$u_n$ , рис. 185, в
5±5	±0,0494	±0,0649	±0,0764
5±4	±0,0395	±0,0519	±0,0611
5±3	±0,0297	±0,0389	±0,0459
5±2	±0,0198	±0,0259	±0,0306
5±1	±0,0099	±0,0130	±0,0153
5	0	0	0

5. Решение трехмерной краевой задачи (4.243), (4.244) для магнитного поля, заданного в виде  $B_x = \xi(x, y)\eta(z)$ ;  $B_y = B_z = 0$ , благодаря применению интегрального преобразования Фурье и с учетом того, что в районах входа и выхода жидкости ( $z \rightarrow \pm \infty$ ) все электрические возмущения пренебрежимо малы, а  $B_x(z) \rightarrow 0$ , сводится к отысканию функции  $\bar{u}(x, y, \rho)$ , удовлетворяющей следующим уравнению и краевому условию:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \rho^2 \bar{u} = F(\rho) \chi(x, y); \quad (4.252)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = 0,$$

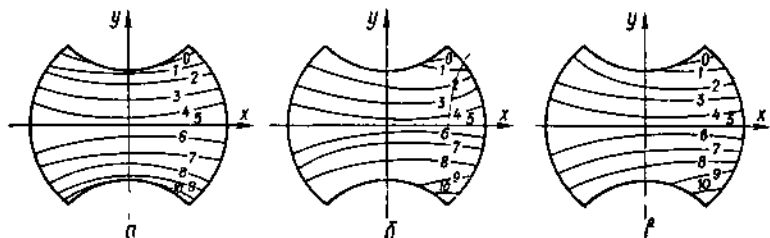


Рис. 185.

где  $\rho$  — параметр преобразования. Эта краевая задача также может быть решена вариационным методом при использовании структуры решения вида (4.245). Чтобы найти  $\bar{u}(x, y, \rho)$  по методу Ритца, необходимо минимизировать функционал [88]

$$I(\bar{u}) = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \rho^2 \bar{u}^2 + 2F\chi \right] dx dy. \quad (4.253)$$

Таблица 23

Номер линии	$u(z=0)$	$u(z=1,5)$
5±5	±0,9879	±0,4939
5±4	±0,7903	±0,3952
5±3	±0,5927	±0,2964
5±2	±0,3952	±0,1976
5±1	±0,1976	±0,0988
5	0	0

Соответствующая система алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов  $a_k = a_k(p)$  имеет вид

$$\frac{\partial I(\tilde{u}_n)}{\partial a_k} = 0. \quad (4.254)$$

Решение этой системы (по методу Крамера) имеет вид

$$a_k = F(p) \frac{\Delta_k(p)}{\Delta(p)}, \quad (4.255)$$

где  $\Delta(p)$  и  $\Delta_k(p)$  — целые рациональные функции, причем степень  $\Delta_k(p)$  меньше степени  $\Delta(p)$ .

Переходя в область оригинала, получаем окончательный результат в виде

$$u_n(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^n \Psi_k(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} F(p) \frac{\Delta_k(p)}{\Delta(p)} \exp(ipz) dp, \quad (4.256)$$

где

$$\Psi_k(x, y) = \varphi_k - \omega \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right).$$

Заметим, что при  $B = B_x(z)$  форма линий уровня одна и та же во всех сечениях  $z = \text{const}$ , а изменяется лишь амплитуда распределения электрического потенциала.

Для канала кругового сечения, рассмотренного в п. 1, при

$$B_x = \frac{1}{2} B_0 \left( 1 + \frac{1-z^2}{|1-z^2|} \right),$$

$n = 12$  в табл. 23 приведены значения  $u_n$ . При изменении вида магнитного поля в плоскости поперечного сечения канала наблюдается существенное изменение формы линий уровня потенциала и соответствующих амплитуд.

### § 13. Расчет проводимости неоднородной среды в магнитном поле

В работах Ю. П. Емца [34] и В. Ф. Резцова [106] рассматривались электрические поля в пленках или пластинках с неоднородностями, а также в сплошной среде с цилиндрическими включениями, вызываемые внешним однородным везде магнитным полем. Предполагалось, что собственное магнитное поле токов в системе пренебрежимо мало. На границе раздела сред предполагалась непрерывность нормальной к границе составляющей тока ( $j_{1\nu} = j_{2\nu}$ ) и касательной составляющей напряженности электрического поля ( $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ ). На бесконечности поле предполагалось однородным. При этих предположениях в работе [34] было получено аналитическое решение задачи для произвольных соотношений между проводимостями и параметрами Холла сред. Т. И. Шейко [185] применила



и функции тока

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_1} \Big|_{\partial \Omega_{1,1} \cup \partial \Omega_{1,2}} &= \psi_{01} = \psi_{02} = 0; \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu_1} \Big|_{\partial \Omega_{1,3}} &= \psi_{03} = -1; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \nu_1} \Big|_{\partial \Omega_{1,4}} &= \psi_{04} = 1. \end{aligned} \quad (4.266)$$

На границе  $\Gamma$  между областями  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  из условий  $j_{1\nu} = j_{2\nu}$ ;  $E_{1\tau} = E_{2\tau}$  следует

$$\varphi_1 = \varphi_2; \quad -\sigma_{\mu 1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu_2} + \beta_1 \sigma_{\mu 1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_2} = -\sigma_{\mu 2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu_2} + \beta_2 \sigma_{\mu 2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_2}. \quad (4.267)$$

Аналогично

$$\psi_1 = \psi_2; \quad \rho_1 \sigma_{\mu 1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu_2} + \rho_1 \sigma_{\mu 1} \beta_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau_2} = \rho_2 \sigma_{\mu 2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \nu_2} + \rho_2 \sigma_{\mu 2} \beta_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau_2}, \quad (4.268)$$

где  $\nu_i$  — внешние нормали к  $\partial \Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $\tau_i$  — соответствующие направления касательных к  $\Gamma$ , такие, что  $\tau_i \times \nu_i$  есть единичный вектор оси  $Oz$ .

Таким образом, приходим к двум задачам одинакового типа относительно функций  $\varphi$  и  $\psi$ . Для контроля за ходом решения этих задач на основе физических соображений представляет интерес величина угла между линиями равного потенциала и тока

$$\cos(\nabla \varphi, \nabla \psi) = \frac{(\nabla \varphi, \nabla \psi)}{|\nabla \varphi| |\nabla \psi|}.$$

Из условий (4.260) и (4.261) следует, что

$$\nabla \psi = (-j_y, j_x); \quad \nabla \varphi = \left( -\frac{j_x + \beta j_y}{\sigma_\mu (1 + \beta^2)}, -\frac{j_y - \beta j_x}{\sigma_\mu (1 + \beta^2)} \right).$$

Отсюда

$$\cos(\nabla \varphi, \nabla \psi) = \frac{\beta}{1 + \beta^2}. \quad (4.269)$$

В работе [185] решение поставленных задач проводилось методом  $R$ -функций, что позволило рассматривать включения  $\Omega_2$  различной формы.

В § 13 гл. 3 были рассмотрены более простые по сравнению с (4.267) и (4.268) условия на границе сред (3.445) и (3.446). Построим структуру, удовлетворяющую новым граничным условиям (4.267) — (4.268).

Пусть  $\varphi(x, y)$  есть структура решения рассматриваемой краевой задачи, но для однородной среды (т. е. характеристики в  $\Omega_2$  такие же, как и в  $\Omega_1$ ). Вместо аргументов  $x, y$  подставим соответственно функции

$$X(x, y) = x + \alpha(x, y); \quad Y(x, y) = y + \gamma(x, y), \quad (4.270)$$



где  $\alpha(x, y)$  и  $\gamma(x, y)$  выберем из следующих условий:

$$а) \alpha(x, y)|_{\partial\Omega_1} = 0; \gamma(x, y)|_{\partial\Omega_1} = 0; \frac{\partial\alpha}{\partial\nu_1}\Big|_{\partial\Omega_1} = 0; \frac{\partial\gamma}{\partial\nu_1}\Big|_{\partial\Omega_1} = 0.$$

(Выполнение этих условий обеспечит удовлетворение условиям на внешней границе  $\partial\Omega_2 = \partial\Omega_{1,1} \cup \partial\Omega_{1,2} \cup \partial\Omega_{1,3} \cup \partial\Omega_{1,4}$ .)

б)  $\alpha(x, y)|_{\partial\Omega_2} = 0; \gamma(x, y)|_{\partial\Omega_2} = 0$ . (Это условие обеспечит непрерывность функции  $\varphi(X, Y)$  на границе  $\partial\Omega_2$ , т. е. будет выполняться первое из условий (4.267).)

Для того чтобы удовлетворить второму условию (4.267), будем искать функции  $\alpha(x, y)$  и  $\gamma(x, y)$  в виде

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &\equiv \frac{\omega_1^2 |\omega_2|}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \left( a_{11} \frac{\partial\omega_2}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial\omega_2}{\partial y} \right); \\ \gamma(x, y) &\equiv \frac{\omega_1^2 |\omega_2|}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \left( a_{21} \frac{\partial\omega_2}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial\omega_2}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (4.271)$$

где  $\omega_i \equiv \omega_i(x, y)$  ( $i = 1, 2$ ) — нормализованные уравнения  $\partial\Omega_i$ , а  $a_{ij}$  — некоторые постоянные, подлежащие определению из второго условия (4.267).

Подставляя (4.271) в формулу (4.267) и приравнявая коэффициенты при одинаковых производных справа и слева, получаем

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} &= \frac{\sigma_{\mu 1} - \sigma_{\mu 2}}{\sigma_{\mu 1} + \sigma_{\mu 2}} = \frac{\sigma_1(1 + \beta_2^2) - \sigma_2(1 + \beta_1^2)}{\sigma_1(1 + \beta_2^2) + \sigma_2(1 + \beta_1^2)}; \\ a_{21} = -a_{12} &= \frac{\beta_2\sigma_{\mu 2} - \beta_1\sigma_{\mu 1}}{\sigma_{\mu 1} + \sigma_{\mu 2}} = \frac{\beta_2\sigma_2(1 + \beta_1^2) - \beta_1\sigma_1(1 + \beta_2^2)}{\sigma_1(1 + \beta_2^2) + \sigma_2(1 + \beta_1^2)}. \end{aligned} \quad (4.272)$$

Аналогично для краевого условия (4.268) коэффициенты  $a_{ij}$  получаем в виде

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{21} &= \frac{\rho_1\sigma_{\mu 1} - \rho_2\sigma_{\mu 2}}{\rho_1\sigma_{\mu 1} + \rho_2\sigma_{\mu 2}} = \frac{\beta_2^2 - \beta_1^2}{2 + \beta_1^2 + \beta_2^2}; \\ a_{21} = -a_{12} &= \frac{\beta_1\rho_1\sigma_{\mu 1} - \beta_2\rho_2\sigma_{\mu 2}}{\rho_1\sigma_{\mu 1} + \rho_2\sigma_{\mu 2}} = \frac{\beta_1(1 + \beta_2^2) - \beta_2(1 + \beta_1^2)}{2 + \beta_1^2 + \beta_2^2}. \end{aligned} \quad (4.273)$$

Согласно § 10 гл. 3 структура решения для однородной среды, удовлетворяющая краевым условиям на внешней границе области  $\Omega_1$ , может быть написана в виде

$$\varphi(x, y) = \Phi_1 - \omega_1 D_1 \Phi_1 - \omega_1 \Psi_0 + \omega_1^2 \Phi_2, \quad (4.274)$$

где  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$  — неопределенная компонента структуры;

$$D_1 = \frac{\partial\omega_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}; \quad (4.275)$$

$$\Psi_0 = \left( \sum_{i=1}^m \Psi_{oi} \omega_{1i}^{-1} \right) \left( \sum_{i=1}^m \omega_{1i}^{-1} \right)^{-1},$$

а  $\psi_{01}$  — нагружающие функции из условия (4.265) или (4.266);  $\omega_{1i}(x, y) = 0$  — уравнения соответствующих участков  $\partial\Omega_{1i}$  внешней части границы  $\partial\Omega_1$ . (В данном случае  $m = 4$ .)

Таким образом, после подстановки в структуру (4.274) вместо аргументов  $x, y$  выражений  $X, Y$  (4.270), кроме условий на внешней части границы  $\partial\Omega_1$ , будут удовлетворяться и условия (4.267) или (4.268) (в зависимости от нахождения функции  $\varphi$  или  $\psi$ ).

Как и везде в предыдущих параграфах, представляя неопределенные компоненты в виде некоторых полиномов с неопределенными коэффициентами, можем последние найти одним из вариационных методов. (Проще всего использовать метод Ритца.)

Для реализации метода Ритца перейдем к однородным краевым условиям, а затем построим функционал Ритца. Этот переход осуществим путем замены  $\varphi = u + u_0$ , где  $u_0 = -\omega_1 \Psi_0$  удовлетворяет краевым условиям (4.265) — (4.266). Выбрав  $u$  в виде  $u = \Phi_1 - \omega_1 D_1 \Phi_1 + \omega_1^2 \Phi_2$  (или используя соответствующую структуру решения разностного типа (3.300)  $u = \Phi_1(x + h(x)) + \omega_1^2(x) \Phi_2(x)$ ) обеспечим удовлетворение однородным краевым условиям Неймана на внешней части границы  $\Omega_1$ . Затем, после подстановки вместо  $x, y$  выражений  $X, Y$ , удовлетворим также и условия на границе  $\Gamma = \partial\Omega_2$  раздела сред при любом выборе  $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2\} \in C^2(CI \Omega_1 \cup CI \Omega_2) C^1(CI \Omega_1 \cup CI \Omega_2)$ .

Таким образом, задача сводится к отысканию в области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  решения уравнения

$$Lu = -Lu_0 \quad (4.276)$$

при граничном условии на внешней границе  $\partial\Omega_1$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_1} = 0 \quad (4.277)$$

и на границе  $\Gamma$  раздела сред

$$u_1 = u_2; \\ -\sigma_{\mu 1} \frac{\partial u_1}{\partial \nu_2} + \beta_1 \sigma_{\mu 1} \frac{\partial u_1}{\partial \tau_2} = -\sigma_{\mu 2} \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} + \beta_2 \sigma_{\mu 2} \frac{\partial u_2}{\partial \tau_2}. \quad (4.278)$$

Функции из  $C^2$ , удовлетворяющие условиям (4.277) (4.278), образуют, очевидно, линейное пространство, которое обозначим  $\mathfrak{M}$ . Покажем согласно [185], что оператор  $L$  на этом линейном пространстве положительно определен, т. е. покажем, что  $(Lu, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$ , где  $\gamma \equiv \text{const} > 0 \forall u \in \mathfrak{M}$ . Используя известную формулу Грина, можем написать

$$(Lu, u) = -\sigma_{\mu 1} \int_{\Omega_1} u_1 \Delta u_1 d\Omega_1 - \sigma_{\mu 2} \int_{\Omega_2} u_2 \Delta u_2 d\Omega_2 = \\ = \sigma_{\mu 1} \int_{\Omega_1} (\nabla u_1)^2 d\Omega_1 + \sigma_{\mu 2} \int_{\Omega_2} (\nabla u_2)^2 d\Omega_2 - \sigma_{\mu 1} \int_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} d\partial\Omega_1 - \\ - \sigma_{\mu 2} \int_{\partial\Omega_2} u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} d\partial\Omega_2.$$

Учитывая однородные краевые условия Неймана на внешней границе  $\partial\Omega_1'$  и условия (4.267) на  $\Gamma$ , получаем

$$\int_{\partial\Omega_1'} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} d\partial\Omega_1' = 0;$$

$$\int_{\partial\Omega_2} \left( \sigma_{\mu 1} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_2} - \sigma_{\mu 2} u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} \right) d\partial\Omega_2 = \int_{\partial\Omega_2} (\beta_1 \sigma_{\mu 1} - \beta_2 \sigma_{\mu 2}) u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} d\partial\Omega_2 = \text{const} \cdot u_2^2|_{x^0} = 0 \quad (x^0 \in \partial\Omega_2).$$

Последнее равенство следует из замкнутости  $\partial\Omega_2$ . Итак,

$$(Lu, u) = \sigma_{\mu 1} \int_{\Omega} (\nabla u_1)^2 d\Omega_1 + \sigma_{\mu 2} \int_{\Omega_2} (\nabla u_2)^2 d\Omega_2.$$

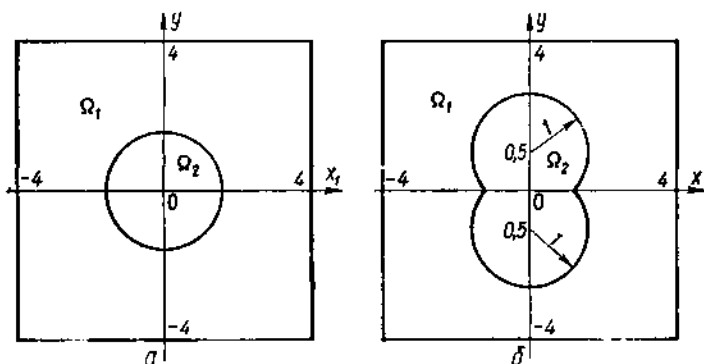


Рис. 187.

При  $\sigma_{\mu 1}, \sigma_{\mu 2} > 0$   $(Lu, u) > 0$ , а согласно неравенству Стеклова — Фридрихса [165],  $(Lu, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$ .

Из положительной определенности оператора  $L$  на множестве  $\mathfrak{M}$  следует, что краевая задача (4.276) — (4.278) эквивалентна задаче о минимуме функционала

$$I = (Lu, u) - 2(u, -Lu_0) = E_1 \left[ \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (\Delta u)^2 d\Omega + \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (\nabla u, \nabla u_0) d\Omega \right] - E_2 \int_{\partial\Omega_2} u \frac{\partial u_0}{\partial \nu} d\partial\Omega_2 + E_3 \int_{\partial\Omega_1} u \frac{\partial u_0}{\partial \nu} d\partial\Omega_1, \quad (4.279)$$

где  $E_1 = \frac{1}{2} (\sigma_{\mu 2} \text{sign } \omega_2 + \sigma_{\mu 2}) + \frac{1}{2} (\sigma_{\mu 1} \text{sign } \bar{\omega}_2 + \sigma_{\mu 1})$ ,  $E_2 = \sigma_{\mu 2} \beta_2 - \sigma_{\mu 1} \beta_1$ ,  $E_3 = \sigma_{\mu 1}$ . Выражения для контурных интегралов

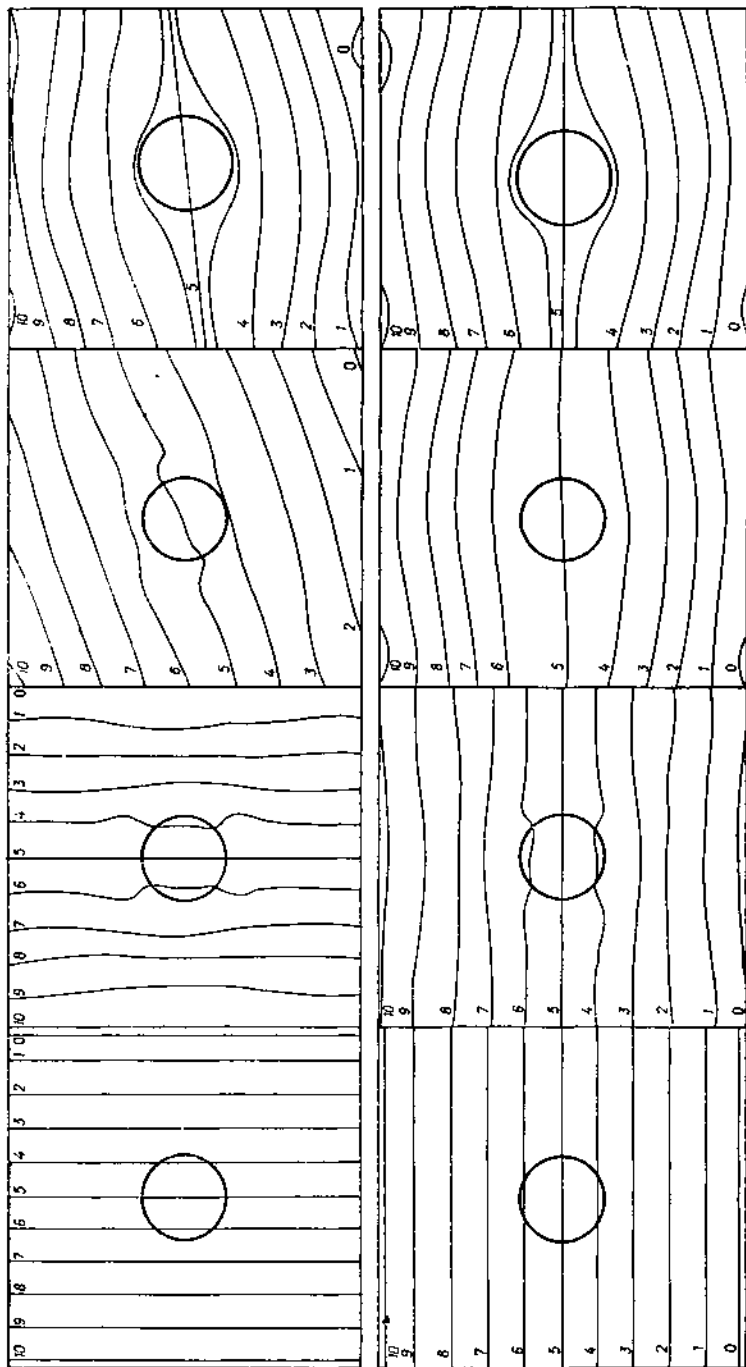


Рис. 188.

можно объединить с помощью формулы склейки

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \left( \omega_2 E_3 u \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \omega_1 E_2 u \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \right) d\partial\Omega.$$

Полученные структура и функционал подключены к ГП «Поле-3» (см. § 1).

Таблица 24

$x$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$y$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$
4,0	3,9901	4,2296	3,8957	30,732	4,0	3,9901	4,2296	3,3420	3,0723
3,5	3,4900	3,7319	3,4406	25,406	3,5	3,4900	3,7319	2,8246	2,5397
3,0	2,9942	3,2848	2,9439	19,426	3,0	2,9942	3,2848	2,2486	1,9416
2,5	2,5012	2,7705	2,3163	13,849	2,5	2,5012	2,7705	1,7035	1,3836
2,0	2,0038	2,1223	1,5089	9,2861	2,0	2,0038	2,1223	1,2427	0,9271
1,5	1,5028	1,4423	0,8095	5,1231	1,5	1,5028	1,4423	0,8160	0,5109
1,0	1,0010	1,3729	1,5256	0,5077	1,0	1,0010	1,3729	0,2831	0,0503
0,5	0,5008	0,5123	0,4029	0,0054	0,5	0,5008	0,5123	0,1483	0,0002
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

В работе [185] рассмотрены задачи для инородных включений в виде круга (рис. 187, а) и соединения двух пересекающихся кругов (рис. 187, б). Для первой задачи приведены распределения электрического потенциала и функции тока при следующих наборах параметров: 1)  $\sigma_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ ; 2)  $\sigma_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 1$ ,  $\beta_2 = 10$ ; 3)  $\sigma_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 3$ ,  $\sigma_2 = 0,1$ ,  $\beta_2 = 0$ ;

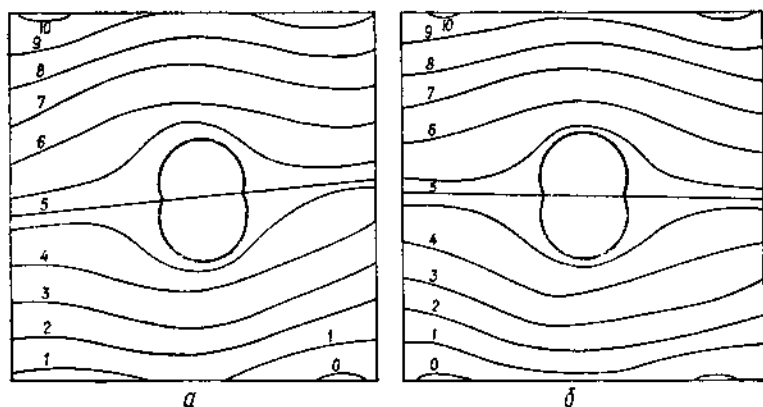


Рис. 189.

4)  $\sigma_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 10$ ,  $\sigma_2 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ . На рис. 189, а — г приведены соответствующие им линии уровня, а в табл. 24 — значения электрических потенциалов при  $y = 0$  и функций тока при  $x = 0$  вдоль осей координат.

Вторая задача была решена при  $\sigma_1 = 1$ ;  $\beta_1 = 10$ ;  $\sigma_2 = 1$ ;  $\beta_2 = 0$ . Для границы  $\partial\Omega_2$  в этом случае нормализованное уравне-

ние можно написать в виде

$$\omega_2(x, y) \equiv \frac{1}{2} [1 - x^2 - (y - 0,5)^2] \vee_0 \frac{1}{2} [1 - x^2 - (y + 0,5)^2] = 0.$$

Результаты решения в виде линий уровня приведены на рис. 189 ( $a$  — для функции  $\varphi$ ,  $b$  — для  $\psi$ ) и в табл. 25 (значения функций  $\varphi$  и  $\psi$  вдоль оси  $Oy$ ).

Таблица 25

$x$	$y$	$\varphi$	$\psi$
0	4,0	25,289	2,5276
0	3,5	19,477	1,9469
0	3,0	13,970	1,3961
0	2,5	9,4524	0,9440
0	2,0	5,4224	0,5408
0	1,5	0,9870	0,9376
0	1,0	0,3950	0,3836
0	0,0	0,0000	0,0000

В приведенных выше примерах вычисления проводились для 21 координатной функции; в качестве аппроксимирующих использовались степенные полиномы (в первой задаче) и полиномы Чебышева (во второй задаче); интегрирование проводилось по методу Гаусса (число точек в области равнялось 1296). Время решения для одного варианта на ЭВМ «БЭСМ-6» составило 20 мин,

на постановку первой задачи для ГП «Поле-3» программисту потребовалось 3 ч. Переход от первой задачи ко второй потребовал изменения всего лишь двух перфокарт с информацией о геометрии области  $\Omega_2$ .

Значения косинусов углов между линиями равного потенциала и линиями тока, полученные по формуле (4. 269) и в ходе решения, хорошо согласуются между собой и соответствуют априорным физическим представлениям.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов В. М.* Исследование случая несимметричного давления штампа круглого сечения на упругое полупространство.— Докл. АН СССР, 1939, 23, № 8, с. 759—763.
2. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения.— М.: Мир, 1977.— 349 с.
3. *Александров П. С.* Лекции по аналитической геометрии.— М.: Наука, 1968.— 912 с.
4. *Арнольд В. И.* О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных.— Мат. просвещение, 1958, № 3, с. 41—61.
5. *Арнольд В. И.* Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблемы топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений.— Функцион. анализ, 1970, 4, № 3, с. 1—9.
6. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел.— М.: Физматгиз, 1963.— 686 с.
7. *Ахизер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М.: Наука, 1965.— 408 с.
8. *Бабич В. М.* К вопросу о распространении функций.— Успехи мат. наук, 1953, 8, вып. 2, с. 111—113.
9. *Березовский А. А.* Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела.— Киев: Наук. думка, 1968.— 165 с.
10. *Берс Л., Джонс Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1966.— 352 с.
11. *Бондаренко Б. А.* Полигармонические полиномы.— Ташкент: Фан, 1968.— 172 с.
12. *Бугаев Н. В.* Способ последовательных приближений: Его прил. к числ. решению алгебраич. уравнений.— Мат. сб., 1896, 18, вып. 2, с. 289—336.
13. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике.— М.: Наука, 1972.— 687 с.
14. *Бузько Я. П., Проценко В. С.* О решении термоупругих контактных задач. Харьков, 1974.— 16 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 5).
15. *Бурак Я. И.* Некоторые задачи кручения и изгиба призматических стержней.— Киев: Изд-во АН УССР, 1959.— 82 с.
16. *Ваберски А.* Статистические характеристики колебаний тонких пластин сложной формы в плане.— Ракет. техника и космонавтика, 1978, 16, № 8, с. 27—34.
17. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1967.— 436 с.
18. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1976.— 280 с.
19. *Воробьев Ф. П., Мануйлова А. М., Шевченко А. К.* Построение диагностической системы для заболеваний желчных путей. Киев, 1977.— 41 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т кибернетики; № 77/80).
20. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М.: Наука, 1974.— 455 с.

21. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике.— М. : Гостехиздат, 1956.— 783 с.
22. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости.— М. : Гостехиздат, 1953.— 264 с.
23. *Ганжела Н. Ф., Рвачев В. Л.* Об одном методе сведения краевых задач математической физики к задаче математического программирования.— Дифференц. уравнения, 1973, № 12, с. 2202—2206.
24. *Глушков В. М.* Синтез цифровых автоматов.— М. : Физматгиз, 1962.— 476 с.
25. *Гончарюк И. В., Рвачев В. Л., Сенченко Н. П.* Решение одной краевой задачи оптимизации для неоднородных тел.— В кн.: Краевые задачи математической физики. Харьков : Вища школа, 1975, вып. 2, с. 11—16. (Вестн. Харьк. политехн. ин-та; № 105).
26. *Гончарюк И. В., Тицкий В. П.* Алгоритм решения некоторых задач оптимизации при изгибе ортотропных пластин сложной конфигурации.— В кн.: Краевые задачи математической физики. Харьков : Вища школа, 1975, вып. 2, с. 8—11. (Вестн. Харьк. политехн. ин-та; № 105).
27. *Гончарюк И. В., Тицкий В. П.* Апостериорные оценки погрешностей приближенных решений некоторых краевых задач.— В кн.: Краевые задачи математической физики. Харьков : Вища школа, 1976, вып. 3, с. 9—12. (Вестн. Харьк. политехн. ин-та; № 113).
28. *Грицайчук В. М.* О построении координатных последовательностей для симметричных областей : Препринт семинара «Методы вычисл. и прикл. математики» ВЦ СО АН СССР.— Новосибирск, 1979.— 16 с.
29. *Грицайчук В. М.* Применение  $R$ -функций и методов теории групп к решению некоторых задач теории упругости : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Днепропетровск, 1979.— 18 с.
30. *Дабаян А. А.* О вычислении атомарных функций.— Мат. методы анализа динам. систем, 1978, вып. 2, с. 6—10.
31. *Деклу Ж.* Метод конечных элементов.— М. : Мир, 1976.— 95 с.
32. *Дзядык В. К.* О продолжении функций, удовлетворяющих условию Липшица в метрике  $Z_p$ .— Мат. сб., 1956, 40, № 2, с. 239—442.
33. *Дорохов В. А., Дикий Л. И., Шкляров Л. И.* Алгоритм и стандартная программа построения уравнений поверхностей для многогранных областей.— Респ. фонд алгоритмов и программ. Мат. обеспечение автоматизир. систем проектирования электро- и радиотехн. устройств, 1972, вып. 5, с. 226—229.
34. *Емец Ю. П.* О проводимости среды с неоднородными включениями в магнитном поле.— Журн. техн. физ., 1974, 44, вып. 5, с. 916—921.
35. *Жеребятьев И. Ф., Лукьянов А. Т.* Математическое моделирование уравнений типа теплопроводности с разрывными коэффициентами.— М. : Энергия, 1968.— 56 с.
36. *Зарипов М. Ф., Горбатков С. А.* Элементы теории нелинейных электромагнитных систем с распределенными параметрами.— М. : Наука, 1979.— 224 с.
37. *Зенкевич О., Чанг И.* Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред.— М. : Недра, 1974.— 239 с.
38. *Зенкин О. В.* Об аналитическом описании геометрических образов.— Кибернетика, 1970, № 4, с. 103—110.
39. *Ильин В. П.* Численные методы решения задач электрооптики.— Новосибирск : Наука, 1974.— 204 с.
40. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач.— М. : Наука, 1974.— 480 с.
41. *Калекин О. Ю.* Об удовлетворении граничных условий для перфорированной цилиндрической оболочки.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1971, № 4, с. 365—368.
42. *Канторович Л. В.* Математические методы в организации и планировании производства.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1939.— 111 с.
43. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 742 с.
44. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа.— М. : Л. : Гостехиздат, 1950.— 695 с.
45. *Карганолов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1977.— 240 с.



46. Кафаров В. В., Дорохов И. Н. Системный анализ процессов химической технологии.— М.: Наука, 1979.— 399 с.
47. Клименко В. Г., Рвачев В. Л. Деформация упругого тела с впаиной шайбой сложной формы.— Прикл. механика, 1969, 5, вып. 4, с. 77—81.
48. Клименко В. Г., Рвачев В. Л. О полноте по энергии систем координатных функций, строящихся по методу  $R$ -функций.— Дифференц. уравнения, 1969, 5, № 9, с. 1724—1726.
49. Коваль Ф. Ф. Новые конструктивные подходы построения общих структур-решения краевой задачи.— Мат. методы анализа динам. систем, 1978, вып. 2, с. 22—32.
50. Коваль Ф. Ф. Развитие конструктивных средств метода  $R$ -функций (функций В. Л. Рвачева) решения краевых задач: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Новосибирск, 1979.— 17 с.
51. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных.— Докл. АН СССР, 1956, 108, № 2, с. 179—182.
52. Колодяжный В. М., Рвачев В. А. О приближении в равномерной метрике функций, удовлетворяющих граничному условию, функциями специального вида.— Докл. АН СССР, 1975, 222, № 6, с. 1276—1278.
53. Колодяжный В. М., Рвачев В. А. Структурное построение полных последовательностей координатных функций вариационного метода решения краевых задач.— Харьков, 1975.— 75 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; № 10).
54. Колодяжный В. М., Рвачев В. А. О приближении функций, удовлетворяющих краевым условиям.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 49—53.
55. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Моск. мат. об-ва, 1967, 16, с. 209—292.
56. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближений.— М.: Наука, 1976.— 320 с.
57. Кочубей А. А. Исследование нестационарного конвективного теплообмена при течении жидкостей в трубах сложного поперечного сечения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Днепрпетровск, 1979.— 138 с.
58. Крушевский А. Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин.— Минск: Наука и техника, 1967.— 228 с.
59. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости.— М; Л.: Гостехиздат, 1947.— 464 с.
60. Леонов М. Я. К теории чистого кручения.— Вopr. машиноведения и прочности в машиностроении, 1960, вып. 6, с. 5—15.
61. Литвин О. М., Рвачев В. Л. Классична формула Тейлора, її узагальнення та застосування.— Київ: Наук. думка, 1973.— 124 с.
62. Лопатинский Я. Б. Введение в современную теорию дифференциальных уравнений в частных производных.— Киев: Наук. думка, 1980.— 216 с.
63. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости.— М.: Гостехиздат, 1955.— 492 с.
64. Лыков А. В. Теория теплопроводности.— М.: Гостехиздат, 1952.— 392 с.
65. Ляшко И. И., Сергиенко И. В., Мистецкий Г. Е. и др.— Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ.— Киев: Наук. думка, 1977.— 288 с.
66. Макеецов Е. Н. Модели из кубиков.— М.: Сов. радио, 1978.— 192 с.
67. Манько Г. П. Основные директивы входного языка генератора программ «Поле-2». Харьков, 1979.— 71 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения, № 116).
68. Манько Г. П. Отладочные директивы входного языка генератора программ «Поле-2».— Харьков, 1979.— 30 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 117).
69. Манько Г. П. Язык директив для генератора программ «Поле-3» (ч. 1).— Харьков, 1979.— 66 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т проб. машиностроения; № 118).

70. Манько Г. П. Язык директив для генератора программ «Поле-3» (ч. 2).— Харьков, 1979.— 72 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения, № 119).
71. Манько Г. П. Автоматизированная система (генератор программ) «Поле-3».— В кн.: Комплексы программ математической физики. Новосибирск : Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1980, с. 268—275.
72. Манько Г. П., Рвачев В. Л. Конструирование решений краевых задач с разрывными граничными условиями и условиями сопряжения для областей сложной формы.— Теорет. электротехника, 1972, вып. 13, с. 124—128.
73. Манько Г. П., Рвачев В. Л., Шейко Т. И. Некоторые дифференциальные свойства одной достаточно полной системы  $R$ -функций.— Кибернетика, 1976, № 1, с. 76—78.
74. Манько Г. П., Синекон Н. С., Синекон Н. И. Автоматизация решения основных задач теории упругости методом  $R$ -функций.— В кн.: Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе : Тез. докл. II Респ. конф. Киев, 1978, с. 171.
75. Манько Г. П., Федько В. В. Математическое обеспечение для дифференцирования суперпозиций функций.— Харьков, 1980.— 26 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 156).
76. Мартынюк А. А. К задаче об устойчивости аналитических движений.— Укр. мат. журн., 1971, 23, № 4, с. 534—540.
77. Мартынюк А. А., Бойко А. Г. Оценка области устойчивости и установившегося движения.— В кн.: Тр. семинара по мат. физике и нелинейным колебаниям.— Киев: Наук. думка, с. 157—164.
78. Мартынюк А. А. О методе  $R$ -функций в задачах устойчивости и специализированном конструировании.— Мат. физика, 1972, вып. 11, с. 86—92.
79. Мартынюк А. А. Техническая устойчивость в динамике.— Киев : Техніка, 1973.— 188 с.
80. Мартынюк А. А. Устойчивость движения сложных систем.— Киев : Наук. думка, 1975.— 352 с.
81. Мартынюк А. А. Развитие метода функции Ляпунова в теории устойчивости движения сложных систем.— Прикл. механика, 1979, 15, № 10, с. 3—23.
82. Мартынюк А. А., Казакова Л. Т. О численном исследовании устойчивости по первому приближению.— Мат. физика, 1976, вып. 20, с. 46—52.
83. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.— М. : Наука, 1973.— 352 с.
84. Мендельсон Э. Введение в математическую логику.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
85. Миносян Р. С. О смешанной граничной задаче уравнения Лапласа для прямоугольника.— Прикл. математика и механика, 1952, 16, 3, с. 293—304.
86. Миносян Р. С. О некоторых граничных задачах распространения тепла в твердых телах : Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук.— Ереван, 1975.— 17 с.
87. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа.— М. : Изд-во иностр. лит., 1957.— 256 с.
88. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике.— М. : Наука, 1970.— 511 с.
89. Моисеев Н. Н., Иваницов Ю. П., Стоярова Е. М. Методы оптимизации.— М. : Наука, 1978.— 352 с.
90. Моссаковский В. И. Давление круглого штампа на упругое полупространство.— Науч. зап. Ин-та машиноведения и автоматки АН УССР, 1953, 2, № 1, с. 9—53.
91. Моссаковский В. И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий.— Прикл. математика и механика, 1954, 18, 2, с. 187—196.
92. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М. : Изд-во АН СССР, 1954.— 648 с.
93. Никольский С. М. О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств.— Мат. сб., 1956, 40, № 2, с. 243—268.
94. Ницова Б. У. Построение интерполяционных кубических сплайнов.— Докл. АН УССР. Сер. А., 1977, № 3, с. 208—211.

95. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.— М.: Мир, 1975.— 558 с.
96. *Перевозчикова О. Л., Ющенко Е. Л.* Проблемы реализации современных языков программирования.— Киев: О-во «Знание» УССР, 1980.— 32 с.
97. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия.— М.: Наука, 1974.— 176 с.
98. *Подгорный А. Н.* Математические проблемы в машиностроении.— В кн.: Математизация знаний и научно-технический прогресс.— Киев: Наук. думка, 1975, с. 214—228.
99. *Попов Г. Я.* Решение контактных задач теории упругости методом интегральных уравнений / Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук.— М., 1963.— 24 с.
100. *Проценко В. С., Проценко В. Г., Синекон Н. С.* О решении некоторых контактных задач для упругого прямоугольника структурным методом.— Прикл. механика, 1974, 10, вып. 9, с. 60—64.
101. *Проценко В. С., Рвачев В. А., Скибин А. А.* Руководство к решению уравнений математической физики с частными производными.— Харьков: Изд-во ХАИ, 1979.— 63 с.
102. *Прочность. Устойчивость. Колебания /* Справочник под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко.— М.: Машиностроение, 1968.— Т. 3. 567 с.
103. *Пухов Г. Е.* Преобразования Тейлора и их применение в электротехнике и электронике.— Киев: Наук. думка, 1978.— 259 с.
104. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений.— Киев: Наук. думка, 1980.— 419 с.
105. *Растрюгин Л. А.* Статистические методы поиска.— М.: Наука, 1968.— 376 с.
106. *Резцов В. Ф.* Об электрических полях и тензоре эффективной проводимости сплошных неоднородных сред с эффектом Холла.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 1, с. 82—85.
107. *Рвачев В. Л.* О давлении на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму клина.— Прикл. математика и механика, 1959, 23, № 1, с. 169—178.
108. *Рвачев В. Л.* Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов.— Докл. АН УССР, 1963, 153, № 4, с. 765—767.
109. *Рвачев В. Л.* Геометрические приложения алгебры логики.— Киев: Техніка, 1967.— 212 с.
110. *Рвачев В. Л.* Элементы дискретного анализа и теории  $R$ -функций.— Харьков: Изд-во Харьк. политехн. ин-та, 1972.— 169 с.
111. *Рвачев В. Л.* Методы алгебры логики в математической физике.— Киев: Наук. думка, 1974.— 259 с.
112. *Рвачев В. Л.* Математическое обеспечение для уравнений с частными производными, основанное на теории  $R$ -функций. Харьков, 1980.— 27 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; № 155).
113. *Рвачев В. Л., Бобылева О. Н.* О построении обобщенной формулы Тейлора разностного типа.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 6, с. 768—778.
114. *Рвачев В. Л., Бородай Г. П.* О приближенном решении пространственных задач теории упругости для кусочно-однородных тел методом  $R$ -функций.— Докл. АН СССР, 1979, 247, № 4, с. 818—821.
115. *Рвачев В. Л., Волков А. П., Манько Г. П., Краченко В. Ф.* О решении одной краевой задачи методом  $R$ -функций.— Дифференц. уравнения, 1967, 3, № 9, с. 1602—1605.
116. *Рвачев В. Л., Гончарюк И. В.* Кручение стержней сложного профиля.— Харьков: Харьк. политехн. ин-т, 1973.— 104 с.
117. *Рвачев В. Л., Коваль Ф. Ф., Манько Г. П.* Некоторые новые конструктивные средства теории  $R$ -функций.— ДАН УССР, Сер. А, 1975, № 8, с. 691—694.
118. *Рвачев В. Л., Курпа Л. В., Склепус Н. Г., Учишвили Л. А.* Метод  $R$ -функций в задачах об изгибе и колебаниях пластины сложной формы.— Киев: Наук. думка, 1973.— 124 с.
119. *Рвачев В. Л., Манько Г. П., Семенова А. Е.* Решение некоторых задач электростатики с помощью ГП «Поле-1».— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1976, 7, № 1, с. 103—110.

120. Рвачев В. Л., Манько Г. П., Шевченко А. Н. Краткая характеристика языка программирования *RL-1*, ориентированного на расчет полей методом *R*-функций.— Кибернетика, 1977, № 1, с. 1—6.
121. Рвачев В. Л., Манько Г. П., Шклярюв Л. И. О решении задачи Неймана для областей сложной формы.— Теорет. электрон. 1967, № 4, с. 115—120.
122. Рвачев В. Л., Мацевитый А. М., Семенова А. Е. Система программирования для расчета полей различной физической природы.— Кибернетика, 1975, № 1, с. 10—11.
123. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Про одну фінітну функцію.— ДАН УРСР. Сер. А, 1971, № 6, с. 705—707.
124. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. О представлении многочленов финитными функциями.— Мат. физика, 1972, 11. с. 126—129.
125. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Атомарные функции в математической физике.— В кн.: Математизация знаний и научно-технический прогресс. Киев: Наук. думка, 1975, с. 188—199.
126. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Теория приближений и атомарные функции.— М.: Знание, 1978.— 64 с.— (Сер. Математика, кибернетика, № 3).
127. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах.— Киев: Наук. думка, 1979.— 196 с.
128. Рвачев В. Л., Проценко В. С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей.— Киев: Наук. думка, 1977.— 235 с.
129. Рвачев В. Л., Проценко В. С. Метод квазифункций Грина.— В кн.: Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1979, с. 188—196.
130. Рвачев В. Л., Сенчуков В. Ф. Об улучшении качества структур решения краевых задач.— Харьков, 1978.— 62 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 31).
131. Рвачев В. Л., Сенчуков В. Ф. О выделении особенностей при решении краевых задач для уравнений с разрывной правой частью. Харьков, 1979.— 21 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 135).
132. Рвачев В. Л., Синекон Н. С. Концентрация напряжений вокруг эллиптической полости в прямоугольнике, сжимаемом штампами.— В кн.: Всесоюз. конф. «Смеш. задачи механики деформируемого тела». Ростов н/Д: Изд-во Рост. н/Д ун-та, ч. 2, с. 50—51.
133. Рвачев В. Л., Синекон Н. С. Формулы свертки в методе *R*-функций и их применение к построению структур решений краевых задач.— Докл. АН СССР, 1980, 255, № 1, с. 80—83.
134. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах.— Киев: Наук. думка, 1976.— 287 с.
135. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена.— Киев: Наук. думка, 1978.— 138 с.
136. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П., Литвин Н. Н. Температурні поля в композитних середовищах.— Вісн. АН УРСР, 1975, № 8, с. 8—13.
137. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П., Литвин М. М. Расчет температурного поля кусочно-однородных тел сложной формы.— Теплофизика и теплотехника, 1977, вып. 32, с. 18—22.
138. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П., Ракова А. Ф. Стационарные задачи теплопроводности для составных призматических тел.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 11, с. 983—987.
139. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П., Сафонов Н. А. Про розв'язання стаціонарних нелінійних крайових задач теплопровідності.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1975, № 8, с. 749—752.
140. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П., Сизова Н. Д. Расчет пространственного стационарного температурного поля внутри прямой призмы при определенной температуре на ее гранях.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 10, с. 945—948.
141. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П., Сизова Н. Д. Температурное поле в цилиндрической блоке аксиально-поршневого насоса.— Инж.-физ. журн., 1980, № 3, т. 34, с. 527—531.
142. Рвачев В. Л., Столя Ю. Г. К задаче распознавания пересечения геометрических фигур специального вида.— Кибернетика, 1965, № 6, с. 100—105.

143. Рвачев В. Л., Стоян Ю. Г. Алгоритм построения неравенств, которым удовлетворяют параметры размещения непересекающихся тел.— Кибернетика, 1966, № 5, с. 129—135.
144. Рвачев В. Л., Федотова Е. А. Сопоставление аппроксимационных свойств сплайнов и атомарных функций.— Методы сплайн-функций, 1977, вып. 72, с. 92—96.
145. Рвачев В. Л., Шейко Т. И. До розв'язання задач про розподіл електричного потенціалу при течіях у каналах складної форми.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 11, с. 990—993.
146. Рвачев В. Л., Шейко Т. И. Метод решения задач распределения потенциала в канале сложной формы при течениях в магнитном поле.— В кн.: Сб. материалов к VI Тал. совещ. по электромагнит. расходомерам и электротехнике жидких проводников (Расходомеры жидких металлов. Расходомеры установк.). Таллин: Тал. пед. ин-т, 1973, с. 20—24.
147. Рвачев В. Л., Шейко Т. И. К вопросу о распределении электрического потенциала при течении проводящей жидкости в неоднородном магнитном поле.— Мат. физика, 1975, вып. 18, с. 135—139.
148. Рвачев В. Л., Шейко Т. И. К теории электрических полей при МГД-течениях в каналах сложных форм.— Магнит. гидродинамика, 1976, № 3, с. 43—49.
149. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.— 287 с.
150. Савелов А. А. Плоские кривые.— М.: Физматгиз, 1960.— 293 с.
151. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука.— 592 с.
152. Сергеенко И. В. О применении вектора спада для решения задач оптимизации комбинаторного типа.— Упр. системы и машины, 1975, № 3, с. 92—98.
153. Силин Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы.— М.: Сов. радио, 1966.— 632 с.
154. Синекон Н. С. Решение контактных задач теории упругости методом  $R$ -функций.— В кн.: Конструкционная прочность лопаток турбин ГТД. Куйбышев, 1976, с. 107—108.
155. Синекон Н. С. Контактные задачи теории упругости для тел конечных размеров.— Харьков, 1977.— 22 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; № 47).
156. Синекон Н. С. Некоторые контактные задачи и их математическое обеспечение: Автореф. дис. ... канд. техн. наук.— Харьков, 1978.— 21 с.
157. Сироджа И. Б. Алгоритм распознавания геометрических образов.— Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1967, № 5, с. 62—66.
158. Сироджа И. Б., Салыга В. И., Кузьмина О. И. Разработка комбинированных статистических моделей технологических комплексов углеобогатительных фабрик.— В кн.: Идентификация и оценка параметров систем. Ч. 2. Препринт IV симпоз. ИФАК (Тбилиси, 21—27 сент. 1976). М.: 1976, с. 436—445.
159. Скоробагатько В. Я., Боднарчук П. И. Ветвящиеся цепные дроби и их применение.— Киев: Наук. думка, 1974.— 220 с.
160. Слесаренко А. П. О решении линейных и нелинейных задач теплопроводности для неклассических областей.— В кн.: Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности. Киев: Наук. думка, 1977, с. 28—38.
161. Слесаренко А. П. Решение задачи теплопроводности для неоднородной области с неидеальным тепловым контактом.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 6, с. 496—499.
162. Слесаренко А. П. Применение интегральных преобразований и структурного метода к решению нестационарной трехмерной задачи теплопроводности для неклассической области.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978, с. 218—222.
163. Слесаренко А. П. Многомерные задачи теплопроводности при изменяющемся во времени коэффициенте теплообмена.— ДАН УССР. Сер. А, 1980, № 1, с. 68—72.

164. Слесаренко А. П., Богородский В. К. Диалоговый режим работы с ЭВМ при исследовании температурных полей в элементах энергетических устройств с применением электронных устройств выдачи графической информации.— *Вісн. АН УРСР*, 1978, № 5, с. 38—47.
165. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики.— П.-г., 1923.— Т. 2. 285 с.
166. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике.— М.: Наука, 1976.— 248 с.
167. Стоян Ю. Г. Размещение геометрических объектов.— Киев: Наук. думка, 1975.— 240 с.
168. Стоян Ю. Г., Гиль Н. И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов.— Киев: Наук. думка, 1976.— 248 с.
169. Стоян Ю. Г., Кулиш Е. Н. О размещении оборудования летательных аппаратов. Киев, 1977.— 42 с.— (Препринт / АН УССР.— Ин-т кибернетики; № 77/78).
170. Стоян Ю. Г., Панасенко А. А. Периодическое размещение геометрических объектов.— Киев: Наук. думка, 1978.— 175 с.
171. Стоян Ю. Г., Пулятин В. П. Размещение источников физических полей.— Киев: Наук. думка, 1981.— 200 с.
172. Стоян Ю. Г., Соколовский В. Э. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей.— Киев: Наук. думка, 1980.— 206 с.
173. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов.— М.: Мир, 1977.— 349 с.
174. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки.— М.: Физматгиз, 1963.— 635 с.
175. Тимошенко С. П. Курс теории упругости.— Киев: Наук. думка, 1972.— 508 с.
176. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.— 304 с.
177. Тоница В. С., Шкляров Л. И. Об одном алгоритме автоматического построения аналитических образов сложных геометрических объектов.— В кн.: Вычислительная техника в машиностроении. Минск: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1974, с. 3—14.
178. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963.— 368 с.
179. Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры.— М.: Гостехиздат, 1950.— 240 с.
180. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления.— М.: Наука, 1978.— 488 с.
181. Феценко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях.— Киев: Наук. думка, 1969.— 250 с.
182. Харрик И. Ю. О приближении функций, обращающихся на границе области в нуль вместе с частными производными, функциями особого вида.— *Сиб. мат. журн.*, 1963, 4, № 2, с. 408—425.
183. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления.— М.: Наука, 1973.— 238 с.
184. Шейко Т. И. О магнитогидродинамическом течении в канале сложного сечения.— *Прикл. механика*, 1978, 14, № 11, с. 103—109.
185. Шейко Т. И. Метод  $R$ -функций в задаче о проводимости неоднородной среды в магнитном поле.— *Журн. техн. физ.*, 1979, 49, вып. 12, с. 2527—2534.
186. Шейко Т. И. Некоторые особенности решения краевых задач математической физики методом  $R$ -функций в условиях эксплуатации программирующей системы серии «Поле».— В кн.: Комплексы программ математической физики: Тр. VI Всесоюз. семинара по комплексам программ мат. физики, Новосибирск, 1980 г. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1980, с. 285—293.
187. Шейко Т. И. Об учете особенностей в угловых точках и точках стыка граничных условий в методе  $R$ -функций.— *Прикл. механика*, 1982, № 4, с. 95—102.

188. Шклярёв Л. И., Тоница В. С. Алгоритм аналитического описания областей, ограниченных конечным числом дуг окружностей и отрезков прямых.— В кн.: Комбинаторная геометрия и оптимальные размещения. Киев, Ин-т кибернетики АН УССР, 1972, с. 15—24.
189. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости.— М.: Гостехиздат, 1949.— 270 с.
190. Энциклопедия кибернетики.— Киев: Гл. ред. УСЭ, 1974.— Т. 1. 608 с.; Т. 2. 624 с.
191. Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 335 с.
192. Ющенко Е. Л. Адресное программирование.— Киев: Гостехиздат, УССР, 1963.— 290 с.
193. Яблонский С. В. Функциональные построения в  $k$ -значной логике.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1958, № 51, с. 5—142.
194. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1979.— 272 с.
195. Яблонский С. В., Гаярилов Г. П., Кудрявцев Б. В. Функции алгебры логики и классы Поста.— М.: Наука, 1966.— 120 с.
196. Яценко Н. Н., Квасов В. И. Итерационный метод построения полукубических сплайн-функций.— Докл. АН СССР, 1970, № 5, с. 1055—1057.
197. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании  $k$ -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса.— Докл. АН СССР, 1959, 127, № 1, с. 44—46.
198. Geurey M. Les quasi fonctions de Green et les systemes d'equations aux derivees partielles du type elliptique.— Ann. Ecole Normale Superieure, 1935, N 52, p. 39—108.
199. Giraud G. Sur certains problems non lineaires de Neumann et sur certains problems non lineaires mixte.— Ann. Ecole Normale Superieure, 1932, N 49, p. 1—104, 245—308.
200. Hestenes M. R. Extension of the range of differentiable function.— Duke Math. J., 1941, 8, N 1, p. 183—192.
201. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.— 2. Aufl.— Leipzig Teubner, 1924, S. 282.
202. Levi E. E. I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente elliptiche alle derivate parziali.— Mem. Soc. It. dei XL, 1909, 16, p. 1—112.
203. Post E. Introduction to a general theory of elementary propositions.— Amer. J. Math., 1921, 43, p. 163—185.
204. Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logic.— Ann. Math. Studies / Princeton Univ. 1941, 5, p. 122.
205. Schultz M. H. Rayleigh — Ritz — Galerkin methods for multidimensional problems.— SIAM J. Numer. Anal., 1969, 6, N 4, p. 523—538.
206. Whitney H. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets.— Trans. Amer. Math. Soc., 1936, 36, № 1, p. 63—89.

## СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $\forall$  — квантор общности (для всех)  
 $\exists$  — квантор существования (существует)  
 $\emptyset$  — пустое множество  
 $A \setminus B$  — разность множеств  $A$  и  $B$   
 $\bar{A}$  — дополнение множества  $A$  или операция отрицания в алгебре логики (в зависимости от контекста)  
 $\text{Cl}A$  — замыкание множества  $A$   
 $\dim A$  — размерность множества  $A$   
 $2^A$  — совокупность всех подмножеств множества  $A$   
 $A \times B$  — прямое произведение множеств  $A$  и  $B$   
 $A^n$  —  $n$ -я степень множества  $A$   
 $\{x : Px\}$  — совокупность элементов, обладающих свойством  $Px$   
 $f : A \rightarrow B$  — отображение множества  $A$  на множество  $B$   
 $f(A)$  — образ множества  $A$  при отображении  $f$   
 $f^{-1}(A)$  — прообраз множества  $A$  при отображении  $f$   
 $f|_A$  — сужение (ограничение) отображения  $f$  на множество  $A$   
 $\inf(\sup) A$  — нижняя (верхняя) грань множества  $A \subset \mathbb{R}$   
 $\mathbb{N}$  — множество неотрицательных целых чисел  
 $\mathbb{Z}$  — множество произвольных целых чисел  
 $\mathbb{Q}$  — множество рациональных чисел  
 $\mathbb{R}$  — множество действительных чисел  
 $\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел  
 $\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное вещественное евклидово пространство  
 $C^m(\Omega)$  — множество  $m$  раз непрерывно дифференцируемых в области  $\Omega$  функций  
 $\|f\|_A$  — норма  $f$  в линейном нормированном пространстве  $A$   
 $\tilde{C}^r[a, b] = \{f(x) \in C^r[a, b] : f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b), i = 0, 1, \dots, r-1\}$   
 $W^r = \{f(x) : f(x) \in \tilde{C}^r[-\pi, \pi], \|f^{(r)}(x)\|_C \leq 1\}$   
 $L_p(\Omega) = \{f(x) : (f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}), \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\}$   
 $Z = \{f(x) : \forall h > 0, |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| < Ch\}$   
 $d_n(A)$  —  $n$ -й поперечник (по Колмогорову) в метрике  $C$  компакта  $A$   
 $H^m(\mathbb{R}^n)$  — пространство С. Л. Соболева,  $H^m(\mathbb{R}^n) = \{f(x) \in L_2(\mathbb{R}^n) : f^{(\alpha)} \in L_2(\mathbb{R}^n) \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$   
 $\text{supp } f(x)$  — носитель функции  $f(x)$ ,  $\text{supp } f(x) = \text{Cl } \{x : f(x) \neq 0\}$   
 $f \circ \varphi$  — свертка функций  $f$  и  $\varphi$



- $X \wedge Y$  — конъюнкция в алгебре логики ( $X, Y \in B_k$ )  
 $X \vee Y$  — дизъюнкция в алгебре логики ( $X, Y \in B_k$ )  
 $\bar{X}$  — отрицание (если  $X \in B_k$ ) в алгебре логики  
 $\tilde{X}$  — циклическое отрицание (если  $X \in B_k$ ) в алгебре логики  
 $X \rightarrow Y$  — импликация в алгебре логики ( $X, Y \in B_k$ )  
 $X \sim Y$  — равнозначность в алгебре логики ( $X, Y \in B_k$ )  
 $X / Y$  — операция Шеффера в алгебре логики ( $X, Y \in B_k$ ) или фактор-группа группы  $X$  по нормальному делителю  $Y$  (в зависимости от контекста)

$\wedge_0, \wedge_\alpha, \wedge_0^m,$

$\wedge_p, \dots$  — символы  $R$ -конъюнкций

$\vee_0, \vee_\alpha, \vee_0^m,$

$\vee_p, \dots$  — символы  $R$ -дизъюнкций

$\bar{x}$  —  $R$ -отрицание

$\rightarrow_0, \rightarrow_\alpha, \rightarrow_0^m, \dots$  — символы  $R$ -импликаций

$\sim_0, \sim_\alpha, \sim_0^m, \dots$  — символы  $R$ -равнозначностей

$/_0, /_\alpha, /_0^m, \dots$  — символы  $R$ -операций Шеффера

$(f, \Phi)$  — скалярное произведение или вектор  $(f_1, \dots, f_n, \Phi_1, \dots, \Phi_m)$  (если  $f = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ ) в зависимости от контекста)

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебраическая операция 23  
— — сохраняющая 0 25  
Алфавит отображения 23  
Ассоциативность 14
- Базис 26  
— естественный 269
- Векторы  
— касательные 191  
— нормальные 191  
Верхняя нормальная функция 189  
Высказывание 34
- Двузначный предикат 58  
Диаграммы  
— коммутативные 32  
— Эйлера 17  
Дизъюнкция 38  
— характеристическая 68  
— элементарная 43  
Дизъюнктивная нормальная форма 43  
— — — совершенная 55, 68  
— — — сокращенная 56  
— — — минимальная 54  
— — — тупиковая 56  
Дистрибутивность 15  
Дифференциальный кортеж 442  
Дробная компонента функции 387
- Задача  
— вторая основная теории упругости 339, 485  
— Дирихле 317  
— Неймана 318  
— об упруго закрепленной пластине 329  
— о жестко защемленной пластине 325  
— о пластине, частично жестко защемленной и частично свободной 335  
— о свободно опертой пластине 325  
— о частично жестко защемленной и частично упруго закрепленной пластине 331
- первая основная теории упругости 340, 474  
— пространственная контактная теории упругости при отсутствии трения 343  
— смешанная основная теории упругости 342  
— смешанного типа 321  
— третьего типа 321  
Закон  
— двойного отрицания 15  
— исключенного третьего 15  
— логического противоречия 15
- Идемпотентность 15  
Импликанта 55  
— лишняя 56  
— простая 56  
Импликация 38  
Инверсия 214  
Инверсная степень 131  
Истинность булевой переменной 5+
- Качественные градации 101  
Коммутативность 14  
Композиция 23  
Компоненты  
— аналитические 312  
— геометрические 312  
Конституента 55  
Конъюнктивная нормальная форма 43  
Конъюнкция 37  
— элементарная 43  
— характеристическая 68  
Координатные доли 120  
Кортежная алгебра 442  
Критерий функциональной полноты 53
- Логическое  
— сложение 38  
— умножение 37
- Метод  
— Бубнова — Галеркина 367

- коллокаций 356
- Куранта 359
- математического программирования 361
- наименьших квадратов 357
- разностно-аналитический 360
- Ритца 358
- стандартных элементов 98, 210
- Трефца 360
- — комбинированный 361
- штрафов 354
- Множества 14
- дополнение 14
- замкнутые 25
- — по признаку 26
- — суперпозиционно 24
- — композиционно 25
- логика формирования 81
- нормалей 191
- $H$ -реализуемые точечные 81
- $H$ -чертежей 148
- пересечение 14
- полуалгебраические 145
- предполные 54
- пустые 13
- разность 14
- симметрическая разность 14
- соединение 14
- унитарные 14
- Монотонное покрытие 112
- Неопределенные компоненты пучка 256
- Нормализанта 289
- $m$ -го уровня 295
- Нормаль 191
- Нормальная вектор-функция 187
- Нормальные прямые 191
- Область
- Дирихле 170, 173
- допустимых значений 237
- конституентная 18
- $H$ -реализуемая 147
- опорная 59, 81
- раскроя 252
- Общее решение краевой задачи 313, 360
- Операция
- кортежная 442, 443
- строго  $n$ -местная 21
- Шеффера 38
- Ось
- симметрии 220
- выкройки 244
- Отображения
- правильные 23
- $H$ -реализуемые 24
- Отрицание 36
- равнозначности 38
- Параметры
- материала 252
- размещения выкройки 244
- раскроя 252
- План 238
- Полнота пучка 266
- Положительно определенный оператор 359
- Полюс
- выкройки 244
- интерполяции 264
- Порядок симметрии оси 220
- Правила де Моргана 15
- Предикаты
- канонические 60
- $k$ -значные 78
- Принцип двойственности 19
- Пучки
- интерполяционных формул 265
- функций 69, 256
- Пучок 69
- Равнозначность 38
- трехзначная 115
- Радиус охвата чертежа 190
- Раскрой 252
- Решение
- допустимое 238
- оптимальное 238
- $R$ -отображения 101
- векторные 107
- совершенные 107
- частичные 107
- $R$ -операторы 140
- $R$ -функции 101, 106, 111, 114, 127, 128
- действительные 111
- условные 137
- Симметрия
- относительно точки 213
- — оси 220
- — плоскости 216
- Система
- алгоритмически полная 7, 147, 148
- Вебба 66
- достаточно полная 26, 105
- полная 25, 74
- — по признаку 26
- Поста 66
- Россера и Тьюкетта 66
- Сплайн 364
- дефекта  $n$ - $m$  365
- натуральный 365
- степени  $n$  364
- Шенберга финитный 366
- эрмитовый 365
- Структура решения 312
- лучшего качества 316
- — неполная 313

- обобщенная 313
- общая 313
- оптимальная (по порядку) 431
- полная 313
- — в смысле метрики 313
- частичная 313

Суперпозиция 23

Тавтология 40

Теорема

- Квайна 57
- Принцип двойственности для булевых функций 47
- Уитни 143

Точки

- базовые 170
- верхнего противостояния 188
- — раздела 188
- Дирихле 173
- концевые 258
- противостояния 80, 172
- раскроя 252
- соседние 51
- чертежа регулярные 191

Уравнение

- выкройки каноническое 244
- нормальное 142
- — векторное 187
- нормализованное до  $m$ -го порядка 191
- — в обобщенном смысле 191
- области 161
- общего положения выкройки 245
- предикатное 60, 78
- прямой ориентированное 93
- — нормальное 94
- симметричное чертежа 212

Условия

- взаимного пересечения выкроек 246
- Дирихле 263
- Неймана 303
- смешанные 304
- третьего рода 304

Формулы

- двойственные 19, 47

- одинаковой структуры 24

- пропозициональные 40

- самодвойственные 19, 47

Функции

- атомарные 380
- безгранично-дробимые финитные 387
- булевы 34
- — линейные 43, 51
- — замыкающие 82, 86
- $k$ -значной логики 34
- — частично заданные 108
- константы  $k$ -значной логики 65
- машинный способ задания 29
- монотонные 50
- нагружающие 258
- непрерывные 70
- $H$ -реализуемые 24
- отрицания 65
- переключательные 34
- плотного размещения 254
- простые непрерывные 88
- — замыкающие 89
- сопровождающие 102, 110
- характеристические 58, 65
- цели 237
- циклического отрицания 66
- частичные булевы 166
- чертежа нормальные 174

Чертеж

- алгебраический 6, 142
- верхнего раздела 188
- направляющий 233
- $H$ -реализуемый 6
- полуалгебраический 6, 145
- полу- $H$ -реализуемый 6
- полужелательный 147
- раздела 173
- элементарный 146

Эквивалентные структуры 317

Эквиваленция 38

Экстремальное пространство 377

Элементы

- похожие по признаку 26
- чертежа 159

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	5

## Глава 1

### Элементы дискретной математики

§ 1. Множества и логические операции над ними . . . . .	13
§ 2. Диаграммы Эйлера . . . . .	17
§ 3. Принцип двойственности . . . . .	19
§ 4. Композиция и суперпозиция. Замкнутые множества функций . . . . .	22
§ 5. Машинный способ задания функций. Коммутативные диаграммы . . . . .	29
§ 6. Функции алгебры логики . . . . .	33
§ 7. Булевы функции одного и двух аргументов . . . . .	36
§ 8. Свойства булевых функций двух аргументов. Конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы . . . . .	40
§ 9. Полные системы булевых функций . . . . .	47
§ 10. Понятие о минимизации булевых функций . . . . .	54
§ 11. Геометрическая интерпретация булевых функций . . . . .	58
§ 12. Применение булевых функций при построении переключательных схем . . . . .	62
§ 13. Полные системы в $k$ -значной логике. Аналитическое представление функций трехзначной логики . . . . .	64
§ 14. Некоторые замкнутые функциональные множества . . . . .	69
§ 15. Полные системы функций в множествах $\mathfrak{R}_3^1$ и $Q_3^1$ Аналитическое представление функций из $Q_3^1$ . . . . .	74
§ 16. Предикатные уравнения. Замыкающие функции алгебры логики . . . . .	78
§ 17. Трехзначные предикатные уравнения. Замыкающие и простые замыкающие функции трехзначной логики . . . . .	84
§ 18. Построение предикатных уравнений заданных геометрических объектов . . . . .	90

## Глава 2

### $R$ -функции и обратная задача аналитической геометрии

§ 1. Описательное и формальное определение $R$ -отображений . . . . .	100
§ 2. Обобщение понятия $R$ -отображения . . . . .	106
§ 3. Действительные $R$ -функции . . . . .	111
§ 4. Основная система $R$ -функций . . . . .	114
§ 5. Проблема минимизации $R$ -функций . . . . .	127
§ 6. Логические и дифференциальные свойства основной системы $R$ -функций . . . . .	128
§ 7. Условные $R$ -функции . . . . .	137

§ 8.	Некоторые $R$ -операторы	140
§ 9.	Чертеж и его уравнение	141
§ 10.	Переход от предикатных уравнений чертежей к обычным	148
§ 11.	Примеры построения уравнений границ областей	150
§ 12.	Уравнение произвольного чертежа. Алгоритмически полные системы функций	159
§ 13.	Примеры построения уравнений элементарных чертежей	162
§ 14.	Задача о построении уравнений чертежей и частичные функции алгебры логики	165
§ 15.	Семейства выпуклых областей	167
§ 16.	Области Дирихле	170
§ 17.	Нормальное уравнение чертежа	174
§ 18.	Нормальное уравнение произвольного чертежа на плоскости, состоящего из дуг окружностей и отрезков прямых	181
§ 19.	Векторная нормальная функция чертежа	187
§ 20.	Верхняя нормальная функция	188
§ 21.	Нормализованные уравнения чертежей	190
§ 22.	Полиномиальные уравнения чертежей, близких к полуалгебраическим чертежам	203
§ 23.	Автоматическое построение уравнений чертежей	204
§ 24.	Учет симметрии чертежей при построении их уравнений	211
§ 25.	Тела вращения, призмы, конусы, спирали	230
§ 26.	Задачи математического программирования	237
§ 27.	Оптимальное размещение геометрических объектов (оптимальный раскрой)	242

### Глава 3

#### Пучки функций с заданными свойствами на чертежах. Краевые задачи и структуры их решений

§ 1.	Продолжение граничных значений функции внутрь области. Пучок функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи Дирихле	256
§ 2.	Интерполяция функций и пучки	264
§ 3.	Продолжение дифференциальных операторов, заданных на чертеже	268
§ 4.	Продолжение дифференциальных операторов, содержащих производные по дуге граничной кривой	274
§ 5.	Операторы разностного типа	280
§ 6.	Построение нормализованных до высших порядков уравнений чертежей	282
§ 7.	Формулы Тейлора и Эрмита и некоторые их обобщения. Метод нормализант	286
§ 8.	Пучки функций, удовлетворяющих дифференциальным и смешанным граничным условиям	303
§ 9.	Краевая задача и структура ее решения	311
§ 10.	Структуры решений основных типов краевых задач для уравнений второго порядка	317
§ 11.	Структуры решений основных типов краевых задач для уравнений четвертого порядка	324
§ 12.	Структуры решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными	339
§ 13.	Учет условий на границе сред с различными физическими характеристиками	345
§ 14.	Методы нахождения неопределенных компонент. Проблема выбора аппроксимирующих полиномов	352
§ 15.	Слайды	364
§ 16.	Атомарные функции	380
§ 17.	Учет особенностей и априорной информации при построении структур решений краевых задач	398
§ 18.	Метод квазифункций Грина	415
§ 19.	Регионально-структурный метод	421

§ 20. Функционально-разностная аппроксимация уравнений и итерационные методы . . . . .	427
§ 21. Выделение гладкой части решения. Аппроксимационные свойства структур решений . . . . .	429

#### Глава 4

##### Реализация метода *R*-функций при решении краевых задач

§ 1. Генераторы программ серии «Поле» для решения краевых задач математической физики . . . . .	433
§ 2. Пример решения с помощью ГП «Поле-3» краевой задачи для уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами . . . . .	445
§ 3. Расчет стационарных температурных полей . . . . .	448
§ 4. Нестационарные температурные поля . . . . .	462
§ 5. Метод линейных итераций в задачах с внешней нелинейностью . . . . .	470
§ 6. Примеры расчета двумерных полей напряжений и деформаций . . . . .	473
§ 7. Вторая основная задача теории упругости. Кручение стержней . . . . .	481
§ 8. Контактные задачи теории упругости . . . . .	488
§ 9. Две пространственные задачи с неполностью известными границами площадок контакта . . . . .	500
§ 10. Расчет тонких пластин . . . . .	509
§ 11. Задача электростатики с разрывными граничными условиями . . . . .	519
§ 12. Задачи магнитной гидродинамики . . . . .	520
§ 13. Расчет проводимости неоднородной среды в магнитном поле . . . . .	526
Список литературы . . . . .	535
Список основных обозначений . . . . .	544
Предметный указатель . . . . .	546

**ВЛАДИМИР ЛОГВИНОВИЧ РВАЧЕВ**

**ТЕОРИЯ R-ФУНКЦИИ  
И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

Утверждено к печати ученым советом  
Института проблем машиностроения АН УССР

*Редактор В. П. Егорова*

*Оформление художника Д. С. Бродского*

*Художественный редактор И. П. Антонок*

*Технический редактор А. М. Капустина*

*Корректоры Т. Я. Чорная, Р. С. Коган,*

*Л. Н. Регета*

Информ. бланк № 4768

Сдано в набор 17.08.81. Подп. в печ. 21.04.82.

БФ 01140. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 1

Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 34,5.

Усл. кр.-отт. 35,06. Уч.-изд. л. 36,83. Тираж 2400 экз.

Заказ № 2-153

Цена 5 руб 80 коп

Издательство «Наукова думка»

252601 Киев, ГСП Ревина, 3.

Отпечатано с матриц Головного предприятия на

Книжной фабрике «Коммунист», 310012.

Харьков-12, Энгельса, 11.



В. Д. ГРАМШЕ

ТЕОРИЯ  
R-ФУНКЦИЙ  
И НЕКОТОРЫЕ  
ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ